Digitized by Google

XXIII
E
5

XIII
5
5

BIBLIOTECA NAZ.
Vittorio Emanuele III
XXIII
E
5
NAPOLI

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

MARINI GHETALDI

PATRITII RAGVSINI
MATHEMATICI PRAESTANTISSIMI.

DE RESOLVTIONE.

& Compoſitione Mathematica
LIBRI QVINQVE.

Opus Poſthumum.



NAPOLI

ROMAE,
Ex Typographia Reuerendæ Cameræ Apoſtolicæ.
M. DC. XXX.

Superiorum Permiſſu, & Priuilegio.

Ad vſum Don Mauri De Finario

Digitized by Google

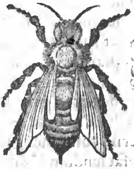
ILLVSTRISSIMO
atque Excellentiſs. Principi
THADAEO
BARBERINO,
GENERALI REI MILITARIS
in Pontificia ditione Moderatori.

ANDREAS BROGIOTTVS F.

INTER admirabilia tuæ felicitatis ornamenta & decora dignitatis, Excellentiſsime Princeps, id etiam habes, vt Mathematicas diſciplinas, quæ copiarum idoneum imperatorem, egregiumq; militiæ ducem cumulatè perficiunt, impenſe, ac ſummopere calleas. Ea gratia ſcilicet aliquid in hoc genere mihi dari peroptabam operis, cuius euulgatione aditum mihi ad meum in te patefaciendum animum aperirem. Numquam adeo meæ ſatisfeciſſem voluntati, niſi qui ceteris veſtri nominis gentiſq; luminibus eum quem potui cultum atque obſeruantiam præſtiti, quiddam etiam inueniſsem quod tuæ gloriæ dedicarem. Votis aliquando meis adfuit Marinus Ghetaldus inſignis huius memoriæ Mathe-

Digitized by Google

Mathematicus; cuius opera præclara ne cum ipſo cecidiſſe videantur Authore, iuſſis cauet ſuis & typis meis Eminentiſſimus Cardinalis Barberinus frater tuus: qui magnorum monumenta virorum iacere in tenebris, occulique ſepulcro non patitur. Facit ipſe pro ſua in doctos homines pietate, vt eos ab interitu vindicet qui laboribus ac vigilijs plurimis aduerſus mortalitatem vincentem, & conterentem omnia ſe communire non dubitarunt; facit pro ſua in me beneuolentia, vt opera potiſſimum mea eorumdem doctorum hominum immortalitati conſultum velit. Erit nunc tuæ benignitatis, humaniſſime Princeps, excipere à me perlibenter hoc munus, quod ex animi mei ſententia, ac ſimpliciter offero, ratus, tibi diſplicere non poſſe officium meum quod ceteris iam Barberinæ familiæ Principibus eſt probatum. Vale.



Digitized by Google

INDEX PROPOSITIONVM, ET PROBLEMATVM LIBRI I.

PRopoſitio Prima. Si recta linea ſecetur vtcumque; rectangulum ſub tota, & differētia partium cui plano ad ipſas partes relato æquale ſit inueſtigare. pag. 2

Theorema I. Si recta linea ſecetur vtcumque, rectangulum ſub tota, & differentia partium, æquale eſt differentiæ quadratorum partium. ibid.

Idem Theor. poſſet quoq; ita enũciari.

Si recta linea ſecetur vtcumque, rectangulum ſub tota, & differentia partium vnà cum quadrato partis minoris, æquale eſt quadrato partis maioris. 3

Propoſ. II. Si recta linea ſecetur vtcumq; quadratum differentiæ partium, quibus planis ad ipſas partes relatis æquale ſit inueſtigare. ibid.

Theor. II. Si recta linea ſecetur vtcumque, quadratum differentiæ partium, æquale eſt quadratis partium minus duplo ſub partibus rectangulo. 4

Idem Theor. poteſt quoq; ita proponi.

Si recta linea ſecetur vtcumque, quadrata partium ſimul æqualia ſunt quadrato differentiæ partium, vnà cum duplo ſub partibus rectangulo. ibid.

Propoſ. III. Si recta linea ſecetur vtcũque, quadratum totius minus quadrato differentiæ partium, cui plano ad ipſas partes relato æquale ſit inueſtigare. ibid.

Theor. III. Si recta linea ſecetur vtcũque, quadratũ totius minus quadrato differentiæ partiũ æquale eſt quadruplo ſub partibus rectangulo. 5

Idem Theor. potuit quoq; ita enũciari.

Si recta linea ſecetur vtcũque, quadruplum rectangulum ſub partibus, vna cum quadrato differentiæ partium æquale eſt totius lineæ quadrato. ibid.

Propoſ. IV. Si recta linea ſecetur vtcũque, quadratũ totius vnà cũ quadrato differentiæ partium, quibus planis ad ipſas partes relatis, æquale ſit inuenire. ibid.

Theor. IV. Si recta linea ſecetur vtcũque, quadratũ totius vnà cum quadrato differentię partium, dupla ſunt quadratorum partium. 6

Propoſ. V. In obtuſiangulis triangulis, quadratum lateris angulũ obtuſum ſubtendentis, quanto maius ſit quadratis reliquorum laterum inuenire. ibid.

Theor. V. In obtuſiangulis triangulis, quadratum lateris angulũ obtuſum ſubtendentis, maius eſt, quàm quadrata reliquorum laterũ, rectangulo comprehēſo bis ab vno reliquorum laterum, in quod ſcilicet protractum perpendicularis cadit, & à linea, quæ inter perpendicularē, & angulum obtuſum interijcitur. 7

Propoſ. VI. In acutiangulis triangulis, quadratum lateris angulum acutum ſubtendētis, quanto minus ſit quadratis reliquorum laterum inuenire. ibid.

Theor. VI. In acutiangulis triangulis, quadratum lateris angulum rectum ſubtendētis, minus eſt, quàm quadrata reliquorũ laterum, rectangulo cõprehenſo bis, ab vno reliquorũ laterum, in quod perpēdicularis cadit, & à portione ipſius lateris, quæ inter perpendicularem, & angulum acutum interijcitur. 8

Propoſ. VII. Si recta linea extrema, ac media ratione ſecetur, quadratum maioris portionis aſſumentis dimidium totius, quanto maius ſit quadrato dimidiæ totius inueſtigare. ibid.

Theor. VII. Si recta linea extrema, ac media rõne ſecetur, quadratũ maioris portionis aſſumentis dimidiã totius, quintuplum eſt quadrati dimidiæ totius. 9

Propoſ. VIII. Si recta linea partis ipſius quintuplũ poſſit, dupla dictæ partis, extrema, ac media ratione ſecta, quæritur an maior portio ſectæ ſit reliqua pars eius, quæ à principio rectæ lineæ. ibid.

Theor. VIII. Si recta linea partis ipſius quintuplum poſſit. Dupla dictæ partis extrema, ac media ratione ſecta, maior portio, reliqua pars eſt eius quæ à principio rectæ lineæ. 10

Propoſ. IX. Si recta linea ſecetur extrema, ac media ratione, quadratũ minoris portionis aſſumentis dimidiam maioris portionis. quanto maius ſit quadrato dimidiæ maioris portionis, inueſtigare. 11

Theor. IX. Si recta linea ſecetur extrema, ac media ratione, portio minor aſſumens dimidiam maioris portionis, quintuplũ po-

poteſt eius,quod à dimidia maioris portionis deſcribitur quadrati. ibid.
Propoſ. X. Si recta linea ſecetur extrema, ac media rõne:quadrata totius,& portionis minoris ſimul,quãto ſint maiora quadrato portionis maioris,inueſtigare.ibid.
Theor. X. Si recta linea ſecetur extrema, ac media ratione;quadrata totius,& portionis minoris ſimul,tripla ſunt quadrati portionis maioris. 12
Propoſ.XI. Si recta linea extrema,ac mediç ratione ſecetur, adijciaturq. ipſi æqualis maiori portioni. Quæritur an tota linea ſit extrema, ac media rõne ſecta, ita vt maior portio ſit in ea, quæ à principio poſita eſt recta linea. ibid.
Theor.XI. Si recta linea extrema,ac media ratione ſecetur, adijciaturq. ipſi æqualis maiori portioni,erit tota linea extrema, ac media,rõne,ſecta,& maior portio erit ea,quæ à princip.poſita eſt recta linea. 13
Problema primum. Datam rectam lineam ſecare, ita vt maior pars minorem dato exceſſu ſuperet. Oportet autẽ datum exceſſum minorem eſſe data ſecanda. ibid.
Poriſma. Recta data minus exceſſu dato, æqualis eſt duplo partis minoris. ibid.
Poriſma. Recta data plus exceſſu dato æqualis eſt,duplo partis maioris. 14
Probl.II. Datæ rectæ lineæ,alteram rectam adiungere, vt data cum adiuncta, ad adiunctam, datam teneat rationem. Oportet autem datam rationem eſſe maioris ad minus. ibid.
Poriſma. Vt differentia terminorum rationis datæ ad terminum minorem, ita eſt data ad adiunctam. 15
Probl. III. Datæ rectæ lineæ,alterã rectam adiungere, vt differentiæ datæ,& adiunctæ ad aggregatum earundẽ rationem, habeat datam. Oportet autem datam rationem eſſe minoris ad maius. 16
Hoc Problema duos caſus habet; aut enim data ſuperabit adiunctã,aut adiuncta datam. primũ data ſuperat adiũctam. ibid.
Poriſma. Vt aggregarum terminorum rationis datæ ad differentiam eorundem, ita eſt data ad adiunctam. Datur ergo adiuncta de qua quæritur. 17
Poriſma. Vt aggregatum terminornm rationis datæ,ad terminum ſecundũ,ita eſt data dupla ad compoſitam ex data, & adiuncta. 19
Poriſma. Vt differentia terminorũ rationis datæ,ad aggregatum eorundẽ, ita eſt data, ad adiunctam. Datur ergo adiuncta de qua quæritur. 20
Poriſma. Vt differentia terminorum rationis datæ ad terminum priorem,ita eſt data dupla ad exceſſum, quo adiuncta ſuperat datam. Datur ergo adiuncta de qua quæritur. 21
Probl.IV. Datam rectã lineam in duas partes diuidere, vt partium quadrata, dato quadrato differant.Oportet autem latus quadrati dati minus eſſe data ſecãda. 22
Poriſma. Latus quadrati dari medium proportionale eſt inter datam rectã,quæ ſecanda proponitur,& differentiam partium eiuſdem. Datur ergo differentia partium quæſita. 23
Probl.V. Datã rectam lineam ſecare,vt rectangulũ ſub partib. ad quadratũ vnius partium rationem habeat datam. ibid.
Poriſma. Vt aggregatum terminorum rationis datæ ad terminum ſecundũ, ita eſt dato recta ad partem, ad cuius quadratum debet habere rationem datam rectangulum ſub partibus. Datur ergo pars quæſita. 24
Poriſma. Vt aggregatum terminorum rationis datæ ad terminum ſecundum,ita eſt recta data, ad partem, ad cuius quadratum debet habere rationem datam rectangulum ſub partibus. Illud ipſum eſt,quod per antecedentẽ reſolutionẽ inueniebatur.Datur ergo pars quæſita. 25
Probl. VI. Datam rectam lineam ſecare,vt rectangulum ſub tota, & parte minore æquale ſit rectangulo ſub differentia partium,& parte maiore. ibid.
Poriſma. Quadratũ totius rectæ ſecãdæ duplum eſt quadrati à maiore parte deſcripti. Datur ergo maior pars quæſita. 26
Probl. VII. Datam rectam lineam ſecare, vt rectangulum ſub partibus cõprehenſum æquale ſit ei,quod à differentia partium ſit quadrato. ibid.
Poriſma. Quadratũ totius ſecandæ quintuplũ eſt quadrati differentiæ partiũ. Datur ergo differentia partiũ quæſita. ibid.
Theor. Si recta linea ſecetur,ita vt rectangulum ſub partibus cõprehenſum ęquale ſit ei,quod à differentia partiũ fit quadrato, quadratũ totius rectæ quintuplũ erit quadrati differentiæ partium. 27

LIBRI SECVNDI.

Theor. I. Si ſecentur duæ rectæ lineæ æquales, ita vt rectangulum ſub partibus vnius æquale ſit rectangulo ſub partibus alterius; partes vnius partibus alterius æquales erunt, maior videlicet maiori, minor minori. 30

Theor. II. Si duæ rectæ lineæ æquales ſectæ fuerint, atq; quadrata partiũ vnius ſimul ſumpta, æqualia fuerint quadratis partium alterius ſimul ſumptis, partes vnius partibus alterius æquales erunt, maior maiori, minor minori. 31

Theor. III. Si à duabus rectis lineis abſcindantur partes ęquales, & rectangulũ ſub tota, & parte reliqua vnius æquale ſit re ctangulo ſub tota, & reliqua parte alterius; tota toti, & reliqua pars, reliquæ æqualis erit. 31

Theor. IV. Si à duabus rectis lineis abſcindantur partes æquales, & reliqua pars primæ ad reliquam ſecundæ, vt tota ſecunda ad totam primam; reliquæ quoque partes æquales erunt. 32

Theor. V. Si duo rectangula fuerint æqualia; fuerint autẽ & quadrata laterum primi æqualia quadratis lateris ſecũdi. Latera primi laterib. ſecundi æqualia erũt, maius videlicet maiori, minor minori. Theorema hoc demonſtraui in libro variorum hic quoque eandem demonſtrationem transferam. ibid.

Theor. VI. Rectangulum ſub differentia crurum trianguli, & aggregato eorundẽ, æquale eſt rectangulo ſub differentia ſegmentorum baſis, & ipſa baſe. 33

Theor. VII. Differentia crurum trianguli ſe habet ad differentiã ſegmentorũ baſis, vt baſis ad aggregatum crurum. 33

Probl. I. Dato quadrato æquale rectangulum inuenire, cuius latera datam teneant rationem. ibid.

Poriſma. Vt terminus ſecundus rationis datæ ad terminum primũ, ita eſt quadratũ datum ad quadratum lateris primi rectanguli, de quo quæritur. Datur ergo latus primum rectanguli quæſiti. 34

Probl. II. Datam rectam lineam ſecare, vt partium quadrata ſimul ſumpta, ad quadratum differentiæ partium, rationẽ habeant datam. Oportet autem datam rationem eſſe maioris ad minus. ibid.

Poriſma. Vt exceſſus quo primus rationis datæ terminus duplus ſuperat ſecundũ, ad ipſum ſecundum, ita eſt quadratũ dimidiæ datæ, ad quadratum dimidiæ differentiæ partium. Datur ergo dimidia differentia partium, de qua quæritur. 35

Probl. III. Data perpẽdiculari, differentia crurũ triãguli, & differentia ſegmentorum baſis. inuenire triangulum. 36

Poriſma. Vt recta, cuius quadratum æquale eſt exceſſui, quo quadratum differentiæ ſegmentorum baſis trianguli ſuperat quadratum differentiæ crurum, ad rectã cuius quadratum æquale eſt quadrato perpendicularis duplæ, vnà cum prædicto quadratorum exceſſu, ita eſt differentia crurum, ad baſim. Datur ergo quæſita trianguli baſis. 37

Lemma I. Differentia ſegmenrorum baſis trianguli maior eſt quam differẽtia crurum. ibid.

Lemma II. In omni triangulo recta, cuius quadratum æquale eſt exceſſui, quo quadratum differẽtiæ ſegmentorum baſis ſuperat quadratum differentiæ crurum, ad rectam cuius quadratum æquale eſt quadrato perpendicularis duplæ, vnà cum eodem quadratorum exceſſu, minorem rationem habet, quàm differentia crurũ ad differentiam ſegmentorum baſis. ibid.

Problema Vietæ. Data baſe altitudine, & ratione crurum trianguli. inuenire triangulum. 49

Lemma. Si baſis trianguli ſecetur pro ratione crurum, & rectangulũ ſub ſegmentis applicetur ad altitudinem trianguli, latitudo inde orta non erit minor differentia ſegmentorum. 50

Problema conſtructum à Vieta. Data baſe trianguli, altitudine & rectangulo ſub cruribus; inuenire triangulum. 52

Problema. Data baſe trianguli, altitudine, & rectangulo ſub cruribus, inuenire triãgulum. 54

Lẽma. Si rectangulum ſub cruribus trianguli applicetur ad latitudinem eiuſdem trianguli, latitudo inde orta, non erit minor baſe, nec compoſita ex dimidia latitudine, & recta, cuius quadratum ęquale eſt exceſſui, quo quadratum dimidię latitudinis ſuperat quadratum dimidiæ baſis, minor erit altitudine. 55

Probl. IV. Data perpendiculari, aggregato cru-

crurum trianguli, & differentia ſegmentorum baſis,inuenite triangulum. 56
Poriſma. Vt recta,cuius quadratum ęquale eſt exceſſui,quo quadratum aggregati crurum trianguli, ſuperat quadratum differentiæ ſegmentorum baſis, ad rectã cuius quadratũ æquale eſt exceſſui, quo quadratũ aggregati crurũ ſuperat quadrata,quæ fiunt ex differẽtia ſegmentorum baſis,& perpẽdiculari dupla; ita eſt aggregatum crurum ad baſim. Datur ergo baſis triãguli de qua quærebatur. 57
Lemma I. Quadratum aggregati crurum trianguli maius eſt quadratis quæ fiunt ex differentia ſegmentorum baſis, & à perpendiculari dupla. ibid.
Lemma II. Recta,cuius quadratum æquale eſt exceſſui,quo quadratum aggregati crurum trianguli ſuperat quadratum differentiæ ſegmentorum baſis, ad rectã cuius quadratũ ęquale eſt exceſſui, quo idem quadratum aggregati crurum ſuperat quadrata differentię ſegmẽtorum baſis,& perpendicularis duplę,minorem rõnem habet, quàm aggregatũ crurum ad differentiã ſegmentorum baſis. 58
Probl. V. Data differentia ſegmentorum baſis ſubtendentis angulum rectum triãguli,& differentia crurum.Inuenire triãgulum. 61
Poriſma. Vt recta,cuius quadratum æquale eſt exceſſui, quo duplum quadratum differentię crurum ſuperat quadratum differentię ſegmentorum baſis ſubtẽdentis angulum rectum trianguli ad differẽtiã ſegmentorum baſis;ita eſt differentia crurum ad aggregatum eorundem. 62
Lemma. Differentia ſegmentorum baſis ſubtendentis angulum rectum trianguli,minor eſt, quàm recta cuius quadratum ęquale eſt duplo quadrati differentię crurum. ibid.
Probl. VI. Data differentia ſegmentorum baſis ſubtendentis angulum rectũ trianguli,& aggregato crurum,inuenire triãgulum. 64
Poriſma. Vt recta cuius quadratum æquale eſt ei,quo differt duplum quadratum aggregati crurum à quadrato differentię ſegmentorum baſis ſubtendentis angulum rectum triãguli, ad differentiam ſegmentorum baſis; ita eſt aggregatum crurũ ad differentiã eorundẽ.Datur ergo differẽtia crurũ,de qua quęrebatur. 65
Probl. VII. Data differentia crurum trianguli,& differentia ſegmentorum baſis, datoque exceſſu inter crus maius & baſim, inuenire triangulum. 66
Poriſma. Vt exceſſus quo dupla differẽtia crurum trianguli præſtat differentię ſegmentorum baſis, ad cõpoſitam ex differentia crurum,& duplo exceſſu,quo baſis ſuperat crus maius, ita eſt differentia crurum ad baſim. 67
Lemma. Si baſis trianguli fuerit crure maior,dupla crurum differentia differentiã ſegmentorum baſis excedet, ibid.
Lemma. Si baſis trianguli fuerit dimidio aggregati crurum maior, dupla crurum differentia,differentiam ſegmentorum baſis excedet. 68
Poriſma. Vt exceſſus,quo dupla differentia crurum trianguli præſtat differentiæ ſegmentorum baſis,ad compoſitam ex differẽtia crurum,& duplo exceſſu, quo baſis ſuperat crus maius,ita eſt differentia crurum ad baſim. 72
Poriſma. Vt exceſſus quo differentia ſegmentorum baſis trianguli ſuperat duplã differentiam crurum, ad exceſſum quo dupla differentia inter crus maius, & baſim ſuperat differentiam crurum, ita eſt differentia crurum, ad baſim. 78
Lemma I. Si baſis triãguli fuerit crure maiore minor;differentia autem ſegmentorum baſis fuerit maior,quàm dupla differentia crurum; Duplus exceſſus, quo crus maius ſuperat baſim, maior erit, quàm differentia crurum. 78
Lemma II. Iiſdẽ poſitis. Exceſſus,quo differentia ſegmentorum baſis ſuperat duplã,in differentiã crurum, ad exceſſum quo dupla differentia cruris maioris, & baſis ſuperat differentiam crurum, minorem habebit rationem,quàm differentia crurũ ad differentiã ſegmẽtorũ baſis. 79
Poriſma. Vt exceſſus,quo differentia ſegmentorum baſis trianguli ſuperat duplã differentiam crurum ad exceſſum, quo dupla differentia inter crus maius,& baſim ſuperat differentiam crurum, ita eſt differentia crurum ad baſim. 82
Lemma. Si baſis trianguli fuerit crure maiore minor, differentia autẽ ſegmentorũ baſis fuerit maior,quàm dupla differentia crurũ. Exceſſus quo differentia ſegmen-

mentorum baſis ſuperat duplã differentiam crurum,ad exceſſum quo dupla differentia inter crus maius,& baſim ſuperat differẽtiam crurum, minorem rõnem habebit,quàm differentia crurum ad differentiam ſegmentorum baſis. 82

Poriſma. Vt exceſſus,quo dupla differẽtia crurum trianguli ſuperat differentiam ſegmentorum baſis,ad exceſſum quo differentia crurum ſuperat duplam differẽtiam cruri maioris,& baſis; ita eſt differentia crurum ad baſim. 84

Lemma I. Si baſis triãguli fuerit crure maiori minor,ac etiam differentia ſegmẽtorum baſis minor, quàm dupla differentia crurũ. Duplus exceſſus,quo crus maius ſuperat baſim, minor erit, quàm differentia crurum. 85

Lemma II. Iiſdem poſitis.Dico inſuper exceſſum,quo dupla differentia crurum ſuperat differentiam ſegmentorum baſis, ad exceſſum quo differentia crurum ſuperat duplam differentiam cruris maioris,& baſis,minorem habere rationem, quàm differentiam crurum ad differentiam ſegmentorum baſis. ibid.

Poriſma. Vt exceſſus, quo dupla differẽtia crurum trianguli ſuperat differentiam ſegmentorum baſis,ad exceſſum,quo differentia crurum ſuperat duplam differentiam cruris maioris,& baſis;ita eſt differentia crurum ad baſim. 88

Lemma. Si baſis triãguli fuerit crure maiori minor,& differentia ſegmentorũ baſis minor quoque, quàm dupla differentia crurum. Exceſſus quo dupla differentia crurum ſuperat differentiã ſegmẽtorum baſis,ad exceſſum quo differentia crurũ ſuperat duplam differentiam cruris maioris, & baſis, minorem rationem habebit, quàm differentia crurum, ad differentiam ſegmentorum baſis. ibid.

Lemma. Si differentia ſegmentorum baſis fuerit dupla differentiæ crurum. Crus maius excedet baſim, exceſſu dimidiæ differentię crurum æquali. 90

Problema VIII. Data baſe trianguli,angulum rectum ſubtendente, & differentia crurum, inuenire triangulum. 92

Poriſma. Duplum quadratum baſis ſubtẽdentis angulum rectum trianguli, minus quadrato differentiæ crurum æquale eſt quadrato aggregati crurum. 92

Probl. IX. Data baſe trianguli angulum rectum ſubtendente, & aggregato crurum,inuenire triangulum. 93

Poriſma. Duplum quadratum baſis ſubtẽdentis angulum rectum trianguli,minus quadrato aggregati crurum, æquale eſt quadrato differentiæ crurum. 93

Lemma. Recta cuius quadratum æquale eſt duplo quadrato baſis ſubtendentis angulum rectum trianguli, non eſt minor aggregato crurum. 94

LIBRI TERTII.

De ęquationibus quadratorum affectorum explicandis. 97

De explicanda ęquatione, in qua quadratum afficitur adiunctione plani ſub latere,& data coefficiente longitudine. ibid.

De explicanda ęquatione,in qua quadratũ afficitur multa plani ſub latere, & data coefficiente longitudine. 97

De explicanda ęquatione, in qua planum ſub latere, & data coefficiente longitudine afficitur multa quadrati. 98

Canon explicandi ęquationem, in qua quadratum afficitur affirmatè. 99

Canon explicãdi ęquationem, in qua quadratum efficitur negatè. 100

Canon explicãdi ęquationem, in qua quadratum negatur de afficiente homogeneo. ibid.

Probl. I. Dato vno ex cruribus trianguli angulum rectum ambientibus, dataque differentia ſegmentorum baſis, inuenire triangulum. 101

Poriſma Recta,cuius quadratum ęquale eſt duplo quadrato cruris maioris trianguli rectanguli,vnà cum quadrato dimidię differentiæ ſegmentorum baſis, contracta eadem dimidia differentia ęqualis eſt baſe trianguli. ibid.

Poriſma. Recta cuius quadratum ęquale eſt duplo quadrato cruris minoris triãguli rectanguli, vnà cum quadrato dimidię differentię ſegmentorum baſis, protracta longitudine eiuſdem dimidię differentię, ęqualis eſt baſi triãguli. 103

Probl.II. Dato vno ex crurib. triãguli,angulũ rectũ ambientibus, datoq. alterno baſis ſegmento,inuenire triangulũ. 106

Poriſma. Recta,cuius quadratũ ęquale eſt quadrato vnius crurũ trianguli angulũ re-

rectum ambientium, vna cum quadrato dimidij alterni ſegmenti baſis, contracta dimidio eiuſdem ſegmenti, æqualis eſt alteri ſegmento. 106

Probl. III. Data differentia crurum triãguli angulum rectum ambiẽtium, dataq. perpendiculari, inuenire triãgulum. 109

Poriſma Recta, cuius quadratũ ęquale eſt quadratis differentię, videlicet crurum trianguli circa angulum rectum, & perpendicularis, aucta ipſa perpendiculari, æqualis eſt baſi trianguli. 109

Probl. IV. Dato aggregato crurũ triãguli angulum rectum ambientium, dataq. perpendiculari, inuenire triangulum. 110

Poriſma. Recta cuius quadratũ ęquale eſt quadratis aggregati videlicet crurum, angulum rectum ambiẽtium, perpendicularis, contracta ipſa perpendiculari, æqualis eſt baſi trianguli. 111

Lemma. Tripla perpendicularis trianguli rectanguli ab angulo recto in baſim cadens, non eſt maior, quàm recta, cuius quadratum æquale eſt quadratis aggregati crurum, & perpendicularis. ibid.

Probl. V. Datã rectam lineã ſecare, vt rectangulum ſub tota, & altera parte æquale ſit quadrato partis reliquæ. 113

Poriſma. Recta cuius quadratum æquale eſt quadratis totius datæ, & dimidiæ eiuſdem contracta eadem dimidia, æqualis eſt parti maiori. 114

Probl. VI. In dato circulo aptare rectam lineam magnitudine datam, quæ ad datum punctum pertingat. ibid.

Poriſma. Recta, cuius quadratum æquale eſt quadrato tangentis circulũ, & quadrato dimidię aptatę in circulo, contracta eadem dimidia ęqualis eſt continuationi aptatę, quę dato puncto, & aptata terminatur. 115

Poriſma. Dimidia aptata in circulo, protracta longitudine rectę, cuius quadratũ æquale eſt exceſſui, quo quadratum dimidię aptatę ſuperat quadratum perpẽdicularis, æqualis eſt parti maiori aptatæ, quę dato puncto diuiditur, contracta vero æqualis eſt parti minori. 117

Probl. VII. Dato ſemicirculo, & recta linea ſit ipſius baſi perpendicularis. Inter ipſã perpendicularem, & circumferẽtiam ſemicirculi ponere rectam lineam magnitudine datam, quæ ad ſemicirculi angulum pertingat. 118

Poriſma. Recta, cuius quadratum æquale eſt quadrato dimidiæ F I, & rectangulo C E H, contracta dimidia F I æqualis eſt rectę E F. 119

Poriſma. Dimidia f i, protracta longitudine rectę, cuius quadratũ eſt exceſſui, quo quadratum dimidiæ f i ſuperat rectãgulum c e h ęqualis eſt rectę e h contracta verò ęqualis rectę e f. 121

Poriſma. Dimidia f i protracta longitudine rectę, cuius quadratum ęquale eſt exceſſui, quo quadratum dimidię f i ſuperat rectangulum h e c, ęqualis eſt maiori partium e f, e i, contracta verò, minori. 123

Poriſma. Recta, cuius quadratum ęquale eſt quadrato dimidię I F, & rectangulo H E C contracta eadem dimidia I F ęqualis eſt rectę E L. 126

Poriſma. Recta, cuius quadratum æquale eſt quadrato dimidię F I, & rectangulo H E C, contracta eadẽ dimidia F I ęqualis eſt rectę E F. 128

Poriſma. Recta, cuius quadratũ ęquale eſt quadratis E C, & dimidię F I, contracta eadẽ dimidia F I, ęqualis eſt rectę, e f. 129

LIBRI QVARTI.

Theor. I. Si quatuor magnitudinũ proportionalium vna extremarũ, aut mediarũ fuerit maxima, altera minima erit. 130

Theor. II. Si cõpoſita ex extremis quatuor magnitudinũ proportionalũ fuerit maior, quã cõpoſita ex medijs, vel differẽtia extremarũ maior, quã differẽtia mediarum, altera extremarũ maxima erit, altera minima, ſin minor altera mediarũ maxima, altera minima erit. 131

Theor. III. Si compoſita ex extremis quatuor magnitudinum proportionaliũ fuerit ęqualis cõpoſitę ex medijs, vel differentia extremarum ęqualis differentię mediarum, maior extrema maiori medię minor minori ęqualis erit. 132

Probl. I. Dato quadrato aliud quadratum in data ratione inuenire. 133

Lemma I. Si à medio & extremitatibus vnius rectę lineę ducantur tres rectę parallelę, alteram rectam lineam ſecantes. Segmenta ſectę inter paralleles interiecta ęqualia erunt. 134

Lem-

Digitized by Google

Lemma II. Si in diametro circuli,etiã producta ſumantur duo puncta à centro ęquè diſtantia,& ab ijs ducantur ad rectã lineam cadentem in circulum duæ rectę perpendiculares ſegmenta cadẽtis inter circumferentiam,& perpendiculares interiecta æqualia erunt. 134

Reliquorum Lemmatum ſeries vſq; ad 32. cõſultò hic in indice omittitur cum ſint iuxtà figuras in eis poſitas, & non habeant textum ab eis ſeparatum.

LIBRI QVINTI.

De Problematibus quæ conſtructione operaria non egent,ſed ſolum poſtulant vt quæſitum numero explicetur. 298

Probl. primũ. Quomodo Archimedes portionem argenti aureæ coronæ permixtam inuenerit. 299

Reſolutio. Coronæ,quæ conſtat ex auro, & argento ſit pondus P, pondus autẽ argenti quod eſt in ea eſto A. ergo P - A erit pondus auri. 299

Theor. Si triũ corporũ æque põderãtium primum,& tertium fuerint generis diuerſi, ſecundi autẽ portio ſit eiuſdẽ generis cum corpore primo, reliqua vero eiuſdẽ generis cum corpore tertio. erit vt differentia inter moles primi,& tertij ad differentiã inter moles primi,& ſecundi,ita pondus vnius corporum,ad pondus portionis corporis ſecundi, quæ eſt eiuſdem generis cum corpore tertio. 302

Poriſma. Vt differentia molis maſſæ argẽteæ,& molis maſſæ aureæ ad differentiã molis coronæ, & molis maſſæ aureæ, ita eſt pondus coronæ ad pondus argenti quod eſt in corona. 305

Poriſma. Vt differentia molium maſſę argenteæ, & maſſę aureę, ad differentiam molium maſſę argenteę,& coronę; ita eſt pondus coronę ad pondus auri,quod eſt in corona. 306

Theor. Si trium corporum æque põderantium primum, & tertium fuerit diuerſi generis,ſecundi autẽ portio ſit eiuſdẽ generis cum corpore primo; reliqua vero eiuſdẽ generis cum corpore tertio;erit vt differentia molium primi,& tertij ad differentiam molium primi,& ſecundi, ita pondus vnius corporum ad pondus portionis corporis ſecundi, quæ eſt eiuſdem generis cum corpore tertio. ibid.

Lemma I. Si fuerint lineæ quodcumq; ęqualiter ſeſe excedentes.Cõpoſita ex extremis ęqualis erit vnicuiq; compoſitarum è duabus ęque diſtantibus ab extremis, & ſi fuerit numerus lineatum impar;medię duplę ęqualis erit. 307

Lemma II. Si fuerint lineę quotcumq; ęqualiter ſeſe excedentes. dupla cõpoſita ex omnibus,multiplex eſt compoſitę ex extremis per numerum linearum. 308

Lemma III. Si fuerit lineę quotcumq; ęqualiter ſeſe excedẽtes Differentia extremarum cõtinuata exceſſu, multiplex ęſt ipſius exceſſus per numerũ linearũ. 308

Lemma IV. Si fuerint lineę quotcunq; ęqualiter ſeſe excedentes. Eſt vt dupla cõpoſita ex omnibus, ad compoſitã ex extremis, ita differentia extremarum continuata exceſſu ad exceſſum. 309

Probl.II. Data minima,& maxima linearũ ęqualiter ſeſe excedentium, & cõpoſita ex omnibus;inuenire ſingulas. Oportet autem duplam cõpoſitam ex omnibus multiplicem eſſe compoſitę ex extremis per numerum binario maiorem. ibid.

Theor. Si fuerint lineę quotcumq; ęqualiter ſeſe excedentes,eſt,vt differentia duplę compoſitę ex oĩbus, & cõpoſitę ex extremis,ad cõpoſitã ex extremis,ita differentia extremarum ad exceſſum. 310

Probl.III. Data ſecunda linearum ęqualiter ſeſe excedẽtium,& compoſita ex extremis,itemq. compoſita ex omnibus inuenire ſingulas. Oportet autem duplam cõpoſitam ex omnibus multiplicem eſſe cõpoſitę ex extremis, per numerum binario maiorem. 312

Theor. Si numerus linearum ęqualiter ſeſe excedẽtium fuerit ternario maior, erit vt differentię duplę compoſitę ex omnibus, & triplę compoſitę ex extremis ad compoſitam ex extremis;ita differentia compoſitę ex extremis, & duplę ſecundę ad exceſſum. ibid.

Quomodo Problemata impoſsibilia cognoſcantur. 314

Probl. I. Datam rectam lineam ſecare, vt rectangulum ſub partibus vna cum quadrato differẽtię partium ęquale ſit quadratis partium. 315

Probl. II. Datum rectam lineam ſecare, vt triplum rectangulum. ſub partibus, vna

cum

cum quadrato differētiæ partium æquale ſit quadrato totius rectæ. 316
Probl.III. Datā rectam lineā ſecare, vt rectāgulū ſub tota, & differētia partiū vna cū quadrato partis minoris çquale ſit rectāgulo ſub tota, & parte maiore. 317
Probl.IV. Datā rectam lineā ſecare; vt rectangulū ſub tota, & differentia partium çquale ſit quadrato partis maioris. 318
Probl.V. Datam rectam lineam ſecare, vt rectangulum ſub tota & dupla parte maiore æquale ſit quadratis, quæ fiunt à tota, & à parte maiore. 319
Probl.VI. Super data baſe triangulum conſtituere, in quo differentia ſegmentorum baſis ſit dupla differentiæ crurum, atque differētia crurum ſit dupla exceſſus, quo crus maiùs ſuperatur à baſe. ibid.
Probl.VII. Datā rectam lineā ſecare, vt rectangulū ſub tota & dimidia differentia partium, vna cum rectangulo ſub partib. æquale ſit partium quadratis. 320
Probl.VIII. Datam rectā lineam ſecare, vt duplum rectangulū ſub tota, & parte maiore; æquale ſit quadrato totius, & duplo quadrato partis maioris. 322
Probl.IX. Datam rectā lineā ſecare, vt rectangulum triplum ſub partibus æquale ſit totius lineæ quadrato. ibid.
Quomodo Problemata vana, ſeu nugatoria cognoſcantur. 323
Probl.I. Datam rectam lineā ſecare, vt rectangulū ſub tota, & differentia partiū, vnà cum quadrato partis minoris, çquale ſit quadrato partis maioris. 324
Probl.II. Datam rectam lineam ſecare, vt quadrata partium æqualia ſint quadrato differentiæ partium vna cum duplo ſub partibus rectangulo. ibid.
Probl.III. Datam rectam lineam ſecare, vt rectangulum ſub partibus vna cum quadrato dimidiæ differentiæ partiū, æquale ſit quadrato ſemiſſis datæ. 326
Probl.IV. Super data baſe triangulum conſtituere, quod habeat differentiam crurum dimidiæ baſi æqualem. ibid.
Probl.V. Super data baſe triangulum conſtituere, in quo differentia ſegmentorum baſis ſit dupla differentia crurū, ipſaque differentia crurū ſit dupla exceſſus, quo crus maius ſuperat baſim. ibid.
De Reſolut. & Compoſitione Problematū, quæ ſub Algebram non cadunt. 330
Probl.I. Rombo dato, & vno latere producto aptare ſub angulo exteriori magnitudine datam rectam lineam, quę ad oppoſitum angulum pertingat. 330
Probl.II. Rombo dato, & productis duobus lateribus angulū rombi continentib. inter ipſa latera aptare magnitudine datā rectam lineam, & quæ per oppoſitū angulū tranſeat. Oportet autem ipſam magnitudine datam non eſſe minorē ea recta linea, quæ per extremitatē diametri rombi ad rectos angulos ducta, inter producta latera interijcitur. 333
Probl.III. Data baſe triāg. differētia laterū & angulo verticis inuenire triāgulū. 336
Lēma. Si angulus triāguli fuerit centrū circuli, baſis vero ſemidiameter, & ducatur linea recta; nō ex cētro circuli, ſed ab altera extremitate aggregati laterū, conſtituens cum eo angulū æqualem dimidio, qui eſt ad verticem trianguli, angulo, illa recta linea in circulum incidet. 337
Probl.IV. Data baſe trianguli, aggregato laterū, & angulo verticis, inuenire triāg.
Lemma. Si duo anguli in ratione dupla eidem circumferentiæ circuli inſiſterint, duplus autem fuerit ad centrum, alter ad circumferentiam erit. 338
Probl V Data differentia ſegmentorum baſis trianguli aggregato laterū, & angulo verticis inuenire triangulum. 339
Lemma I. Si angulus trianguli fuerit centrum circuli, differentia vero laterū ſemidiameter, & ducatur recta linea non ex centro circuli, ſed ab altera extremitate differentię ſegmentorum baſis conſtituēs cum ea angulum æqualem dimidio; qui eſt ad verticem trianguli angulo, ilia recta linea circulum ſecabit. 340
Lemma II. Secet circulus ſub A centro recta linea B H L in punctis H L, & per punctus H quod ſit propius ad B ducatur altera recta A H I. Dico angulum I H B minorem eſſe recto. ibid.
Probl.VI. Data differentia ſegmētorum baſis trianguli differentiā laterum, & angulo verticis inuenire triangulum. 341
Pr.VII. Dato vno ex laterib. triāg. datū verticis ang. ambiētib. & differētia inter reliquū latus, & baſim, inuenire triāg. 341
Pr.VIII. Dato vno ex laterib. triāg. datū verticis angulū ambiētib. datoq. aggregato reliqui lateris, & baſis, inuenire triāg. 343

F I N I S.

MARINI GHETALDI DE RESOLVTIONE, & Compoſitione Mathematica.

LIBER PRIMVS.

A OMNES Mathematicæ probationes vel à conceſſis ad quæſita, vel à quæſitis ad conceſſa progrediuntur. Quæ à conceſſis progrediuntur ad quæſita, compoſitiones appellantur. Compoſitio enim eſt aſſumptio conceſſi per conſequentia ad quæſiti finem, & compræhenſionem. quæ vero à quæſitis progrediuntur ad conceſſa duplices ſunt; vel enim conceſſa ponunt, vel deſtruunt: quæ ponunt conceſſa, reſolutiones vocantur: Eſt enim Reſolutio aſſumptio quæſiti tanquam conceſſi per conſequentia ad verum conceſſum. Nam in reſolutione id quod quæritur, vt iam exi-
B ſtens, & vt verum ponentes, per ea, quæ deinceps conſequuntur, procedimus ad aliquod conceſſum: quo opere quæſitam concluſionem, in proprias cauſas, per quas demonſtratur reducimus: atque his reſolutionibus compoſitiones opponuntur. fieri enim poteſt, vt à conceſſo illo, per eadem reſolutionis veſtigia ad quæſitum reuertamur. Quæ vero deſtruunt conceſſa, deductiones ad impoſſibile nuncupamus. Deductio enim ad impoſſibile eſt aſſumptio eius quod quæſito contradicit tanquam conceſſi per conſequẽtia, ad id, quod vero conceſſo opponitur: nam in deductione ad impoſſibile ſumimus id quod quæſito contradicit, idq; ſupponentes progredimur, donec in aliquod abſurdum incidamus, per quod ſuppoſitione deſtructa confirmetur id, quod à prin-
C cipio quærebatur. Ex quibus patet Reſolutionem à Deductione ad impoſſibile ratiocinatione tantum differre; nam vtraque ab incognito ad cognitum eodem progreſſionis ordine procedit: ſed Reſolutio deſinens in verum, concludit verum eſſe & quod ſupponitur: Deductio vero ad impoſſibile, deſinens in falſum, falſum eſſe & quod ſupponitur arguit, & conſequenter quæſitum verum eſſe.

Duplex autem eſt reſolutionis genus alterum quidem ad Theoremata pertinet, eiusq; finis in ſola veritatis inueſtigatione conſiſtit. alterum vero ad Problemata,

blemata, cuius ſcopus eſt rationem conſtructionis, atque demonſtrationis in- A
ueſtigare: propoſita enim Problemata conſtruere docet, viamq; ad conſtructionis demonſtrationem oſtendit. ſed omnia ferè Theoremata, & Problemata, quæ ſub Algebram cadunt facillimè reſoluuntur, ac per reſolutionis veſtigia componuntur: non quidem vulgaris Algebræ beneficio; quæ reſolutionis veſtigia omnino confundit; ſed illius, cuius auctor eſt Franciſcus Vieta, vir certè de rebus Mathematicis optimè meritus: cui non ſolum noſtra, ſed etiã ſuperior ætas haud ſcio an vllum huius ſcientiæ laude parem, nedum ſuperiorem inuenerit. etenim Reſolutio procedens per ſpecies immutabiles, non autem per numeros mutationi, quacunque operatione tractentur, obnoxios; ſua veſtigia clara relinquit, per quæ non eſt difficilis ad compoſitionem reditus: compoſitio enim in Problematibus, ſiue per Algebram, ſiue Antiquorũ B
methodo reſolutis, à fine reſolutionis, ad principium per reſolutionis veſtigia regreditur: in Theorematibus vero quorum veritas per Algebram exploratur, eodem ordine quo inuenta eſt Theorematis veritas, demonſtratio procedit. At Theoremata vel Problemata, quæ ſub Algebram non cadunt qualia ſunt ea, quæ per comparationem angulorum demonſtrantur, reſoluuntur, & componuntur methodo ab antiquis tradita, cuius exempla extant in libris Archimedis, Apollonij, & Pappi, aliorumq; veterum ac recentium. Et quamuis ea methodo omnia Theoremata, & Problemata reſolui, & componi poſſint; tamen ea, quæ ſub Algebram cadunt, plerumque faciliùs ac expeditiùs per Algebram reſoluuntur, ac deinde per reſolutionis veſtigia componuntur. Hæc omnia exemplis, atque etiam præceptis vbi locus exiget perſpicua fient. Pri- C
mum igitur proponam. Exempla ad inuentionem Theorematum, eorumq; demonſtrationem pertinentia; deinde ad reſolutionem, & compoſitionem Problematum: primis enim quatuor Theorematibus in Problematum reſolutionibus & compoſitionibus ſæpe vtemur.

Propoſitio Prima.

Si recta linea ſecetur vtcumque; rectangulum ſub tota, & differentia partium cui plano ad ipſas partes relato æquale ſit inueſtigare.

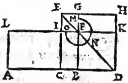
Secetur recta linea in duas partes, quarum A ſit maior, B, minor. Oportet inueſtigare cui plano ad D


ipſas partes relato æquale ſit rectangulum ſub A + B, & A—B. Ducatur A + B in A—B, fit A Q — B Q. huic igitur plano æquale eſt rectangulum ſub tota & differentia partium; quare inuentum eſt quod quærebatur. Hinc formatur

Theorema I.

Si recta linea ſecetur vtcumque, rectangulum ſub tota, & differentia partium, æquale eſt differentiæ quadratorum partium.

Sece-



A SEcetur recta linea A B vtcunque in C, & produ-
catur in D, vt ſit C D æqualis A C, ergo diffe-
rentia partium A C, C B erit B D. Dico rectan-
gulum A B D æquale eſſe differentiæ quadratorum
A C, C B. Deſcribatur enim ſuper C D quadratum
C H, & ducatur diameter D E, quam B G parallela
rectæ C E ſecet in F: deinde per F ducatur ipſi A B
parallela K F L. Similiter ducatur & ipſi B K parallela A L. Quoniam igi-
tur rectangulum A I, æquale eſt rectangulo B H, ſunt enim A C, D H æqua-
les, & æquales C I, B D. Addito igitur communi rectangulo B I, rectangulũ
A F æquale erit rectangulis B H, B I, hoc eſt gnomoni M N O per quem dif-
B ferunt quadrata C H, I G. Rectangulum igitur A F æquale eſt differentiæ
quadratorum C H, I G quod erat oſtendendum.

Idem Theorema poſſet quoque ita enunciari.

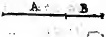
Si recta linea ſecetur vtcumque, rectangulum ſub tota, & differentia partium vnà cum quadrato partis minoris, æquale eſt quadrato partis maioris.

OStenſum eſt enim rectangulum A F æquari gnomoni M N O, addito communi quadrato I G, rectangulum A F, vnà cum quadrato I G æquabitur toti quadrato C H.

C Itaque Theorema hoc idem eſt, quod Theorema quintum, vel ſextum libri ſecundi elementorum. Nam in quinto Theoremate dimidia illa recta intelligatur pars maior, intermedia vero ſectionum, pars minor, reliqua autem differentia partium. In ſexto autem Theoremate dimidia illa recta intelligatur pars minor, altera vero dimidia cum adiecta, pars maior, ipſa autem adiecta, differentia partium. His ita acceptis manifeſtum eſt vnum, eundemq; ſenſum contineri in hac noſtra propoſitione, atque in illis duabus Euclidis.

Propoſitio II.

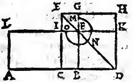
Si recta linea ſecetur vtcumque, quadratum differentiæ partium quibus
D *planis ad ipſas partes relatis æquale ſit inueſtigare.*



SIt recta linea ſecta in duas partes A, B quarum A ſit maior; ergo earum differentia erit A—D. oportet inueſtigare quibus planis ad ipſas partes relatis æquale ſit quadratum ex A—B. Ducatur A—B in ſe: productum erit A Q + B Q—B in A 2. Atque hæc ſunt ea plana quibus æquale eſt quadratum differentiæ partium. quare inuentum eſt quod quærebatur. Hinc formatur.

Theorema II. A

Si recta linea ſecetur vtcumque, quadratum differentiæ partium, æquale eſt quadratis partium minus duplo ſub partibus rectangulo.



SEcetur recta A B vtcumque in C, eaq; producatur in D, vt ſit C D æqualis A C: differentia igitur partium A C, C B, erit B D. Dico quadratum B D æquale eſſe quadratis A C, C B, minus rectangulo A C B bis. Deſcribatur enim ſuper C D quadratum C H, in quo agatur diameter D E, quā recta B G, parallela ipſi C E, vel D H, ſecet in puncto F, per quod agatur ipſi C D parallela I F K. ſunt igitur B K, I G quadrata rectarum B D, C B, & quadratum B K vnà cum rectangulis C H, I H, æquale eſt quadratis C H, I G, demptis vtrimque rectangulis C G, I H, reliquum quadratum B K æquale erit quadratis C H, I G, minus rectangulis C G, I H. hoc eſt æquale erit quadratis rectarum A C, C B, minus rectangulo A C B bis: quod erat oſtendendum. B

Theorema hoc, quemadmodum & præcedens, demonſtrantur ex ipſa conſtructione, quoniam vnico tantum actu reſoluuntur, nullo reſolutionis progreſſu; in primo enim Theoremate ex ductu A ✠ B in A—B, in ſecundo autem ex ductu A--B in ſe, veritas innotuit.

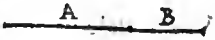
Idem Theorema poteſt quoque ita proponi. C

Si recta linea ſecetur vtcumque, quadrata partium ſimul æqualia ſunt quadrato differentiæ partium, vnà cum duplo ſub partibus rectangulo.

Itaque Theorema hoc eſt vnum, idemq; cum Theoremate ſeptimo libri ſecundi Elementorum; nam in eo Theoremate tota illa recta intelligatur pars maior, alterum autem ſegmentorum, pars minor, reliquum vero, differentia partium: quibus ſic acceptis, manifeſtum eſt vnum, idemq; propoſitum eſſe vtriuſque Theorematis.

Propoſitio III.

Si recta linea ſecetur vtcumque, quadratum totius minus quadrato differentiæ partium, cui plano ad ipſas partes relato æquale ſit inueſtigare. D



SIt recta linea ſecta in duas partes A, B, quarum A ſit maior, ergo differentia earum erit A—B. Oportet inueſtigare. cui plano æquale ſit quadratum ex A ✠ B minus quadrato ex A—B. Fiat quadratum ex A ✠ B id, erit

A Q ✠ B Q ✠ B in A 2.

ab eoq; auferatur quadratum ex A—B quod eſt

A Q ✠ B Q—B in A 2.

Rema-

A Remanebit B in A 4. Huic igitur plano æquale eſt quadratum totius rectæ, minus quadrato differentiæ partium: Quare inuentum eſt quod quærebatur. Hinc

Theorema III.

Si recta linea ſecetur vtcumque, quadratum totius minus quadrato differentiæ partium æquale eſt quadruplo ſub partibus rectangulo.

SIt recta A D ſecta vtcumque in B, & rectæ D B, quæ ſit minor pars, fiat æqualis B C; ergo differentia partium A B, B D, erit A C. Dico qua-



B dratum A D, minus quadrato A C, æquale eſſe quadruplo rectanguli A B D. Quoniam enim quadratum A D æquale eſt quadratis A B, B D vnà cum rectangulo A B D bis; quadratum autem A C æquale eſt eiſdem quadratis A B, B D, minus rectangulo A B D bis, ſi igitur à quadratis A B, B D, & rectangulo A B D bis auferantur quadrata A B, B D, minus rectangulo A B D bis, remanebit rectangulum A B D quater. Quadratum igitur totius rectæ, minus quadrato differentiæ partium, æquale eſt quadruplo rectangulo ſub partibus, quod erat oſtendendum.

Idem Theorema potuit quoque ita enunciari.

Si recta linea ſecetur vtcumque, quadruplum rectangulum ſub partibus
C *vna cum quadrato differentiæ partium æquale eſt totius lineæ quadrato.*

CVm enim oſtenſum ſit quadratum totius, minus quadrato differentiæ partium, æquari quadruplo rectangulo ſub partibus, ſi vtrobique addatur quadratum differentiæ partium, quadratum totius æquale erit quadruplo rectangulo ſub partibus, vnà cum quadrato differentiæ partium.

Itaque Theorema hoc idem eſt quod Theorema octauum libri 2. Euclidis in eo enim Theoremate tota illa recta intelligatur pars maior, alterum autem ſegmentorum, pars minor, reliquum vero, differentia partium. quibus ſic acceptis, manifeſtum eſt vnum, idemq; propoſitum eſſe vtriuſque Theorematis

D

Propoſitio IIII.

Si recta linea ſecetur vtcumque, quadratum totius vnà cum quadrato differentiæ partium, quibus planis ad ipſas partes relatis, æquale ſit inuenire.

SEcetur recta linea in duas partes A, B, quarum A ſit maior, ergo differentia partiũ erit A—B: Oportet inueſtigare, quibus planis æquale ſit quadratum ex A + B, vnà cum quadrato ex A—B. Fiat quadratum ex A + B id erit



AQ + BQ + B in A 2

 Simi-

Similiter fiat quadratum ex A—B id erit A

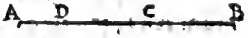
A Q ✠ B Q—B in A 2

Horum quadratorum aggregatum eſt A Q 2 ✠ B Q 2. Atque his planis æqualia ſunt quadrata, totius videlicet, & differentiæ partium. quare inuentum eſt quod quærebatur. Hinc

Theorema IV.

Si recta linea ſecetur vtcumque, quadratum totius vnà cum quadrato differentiæ partium, dupla ſunt quadratorum partium.

Secetur recta A B vtcumque in C, & à maiori parte, quæ ſit A C, auferatur C D æqualis C B: ergo differentia partium A C, C B erit A D. Dico quadrata A B, A D dupla eſſe quadratorum A C, C B. Quoniam enim quadratum A B æquale eſt* quadratis A C, C B, vnà cum rectangulo A C B bis; quadratum autem A D æquale quadratis A C, C B, minus rectangulo A C B bis, ideo quadrata A B, A D æqualia ſunt quadratis A C, C B bis: hoc eſt dupla ſunt quadratorum A C, C B. quod erat oſtendendum. In hoc Theoremate idem oſtenditur, quod in Theorematibus nono, & decimo libri ſecundi Elementorum licet in alia forma ſit propoſitum. Nam in nono Theoremate, dimidia illa recta, intelligatur pars maior, intermedia verò ſectionum, pars minor, reliqua autem, differentia partium. B



* ſecūdi Theor. 2

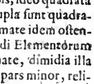
In decimo autem Theoremate dimidia illa recta, intelligatur pars minor, altera vero dimidia cum adiuncta, pars maior, ipſa autem adiuncta, differentia partium. quibus ſic acceptis, manifeſtum eſt huius noſtri Theorematis idē eſſe propoſitum, atque dictorum Theorematum noni & decimi. C

Quatuor præcedentia Theoremata ea ratione, qua propoſita ſunt, nō paruo vſui erunt in reſolutionibus, & compoſitionibus; nam vt in reſolutionibus plana (quibus æquatur quadratum differentiæ partium vel rectangulum ſub differentia partium, & aggregato) cum alijs planis ſæpe comparantur; ſic rurſus in compoſitionibus, quæ per filium reſolutionis progrediuntur, aut regrediuntur; eadem plana pro quadrato differentiæ partium, ſeu rectangulo ſub differentia partiū, & aggregato, cum iiſdem alijs planis, cōparentur neceſſe eſt. D

Propoſitio V.

In obtuſiangulis triangulis, quadratum lateris angulum obtuſum ſubtendentis, quanto maius ſit quadratis reliquorum laterum inuenire.

Sit triangulum cuius latera A B D & latus A ſubtendat angulum obtuſum. Oportet inuenire quanto ſit maius quadratum lateris A quadratis laterum B & D. Ab angulo verticis cadat in D. baſim continuatam perpendicularis G, ſitq; continuatio E: quadratum igitur lateris A æquale



A æquale*erit quadratis à perpendiculari, & à baſe producta vſque ad perpendicularem, hoc eſt 47 primi

A Q æquale erit G Q + D Q + E Q + D in E 2. ſed

G Q + E Q æquale* eſt B Q. ergo 47 primi

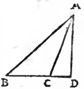
A Q æquabitur B Q + D Q + D in E 2

Quadratum igitur lateris A maius eſt, quàm quadrata laterum B, & D rectãgulo D in E 2. Quare inuentum eſt quod quærebatur. Hinc formatur.

Theorema V.

B *In obtuſiangulis triangulis, quadratum lateris angulum obtuſum ſubtendentis, maius eſt, quàm quadrata reliquorum laterum, rectangulo cõprehenſo bis ab vno reliquorum laterum, in quod ſcilicet protractum perpendicularis cadit, & à linea, quæ inter perpendicularem, & angulum obtuſum interycitur.*

Sit obtuſiangulum triangulum A B C, obtuſum angulum habens A C B, & ducatur à puncto A ad B C productam, perpendicularis A D. Dico quadratum A B, maius eſſe, quàm quadrata A C, C B rectangulo B C D bis; quoniam enim quadratum A B æquale * eſt quadratis A D, D B; quadratum autem D B æquale*quadratis D C, C B, vnà cum rectangulo B C D bis; erit quadratum A B æquale quadratis A D, D C, C B vnà cum rectangulo B C D bis. ſed quadrata A D, D C æqualia*ſunt quadrato A C, ergo quadratum A B, æquale erit quadratis A C, C B vnà cum rectangulo B C D bis; itaque quadratum A B maius eſt, quàm quadratum A C, C B, rectangulo B C D bis. quod erat oſtendendum.

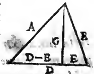


47 primi
4 ſecũdi
C
47 primi

Propoſitio VI.

In acutiangulis triangulis, quadratum lateris angulum acutum ſubtendentis, quanto minus ſit quadratis reliquorum laterum, inuenire.

D Sit triangulum cuius latera A B D & latus A ſubtendat angulum acutum. Oportet inuenire quanto minus ſit quadratum lateris A quadratis laterum B & D. Cadat ab angulo verticis in baſim D, perpendicularis G; ſecans ipſam baſim in duas partes, quarum illa, quæ eſt inter perpendicularem, & angulum acutũ ſit E; ergo altera pars erit D—E.



Et quoniam A Q æquale*eſt quadratis ex G & D—E, ideo 47 primi

A Q æquabitur G Q + D Q + E Q—D in E 2.

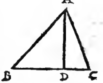
Et addito vtrique parti D in E 2

AQ

A Q + D in E 2, æquabitur G Q + D Q + E Q, ſed A
47 primi G Q + E Q æquale* eſt B Q, ergo
A Q + D in E 2 æquabitur D Q + B Q.
Quadratum igitur lateris A, minus eſt, quàm quadrata laterum D, & B rectangulo D in E 2. Hinc

Theorema VI.

In acutiangulis triangulis, quadratum lateris angulum rectum ſubtendentis, minus eſt, quàm quadrata reliquorum laterum, rectangulo cõprahenſo bis, ab vno reliquorum laterum, in quod perpendicularis cadit, & à portione ipſius lateris, quæ inter perpendicularem, & angulum acutum interijcitur. B



SIt acuti angulum triangulum A B C, acutum habens angulum A C B, & ducatur à puncto A ad B C, perpendicularis A D. Dico quadratum A B, minus eſſe, quam quadrata A C, C B rectangulo B C D
47 primi bis. Quoniam enim quadratum A B æquale* eſt qua-
Theor. 2 dratis A D, D B, quadratum autem D B æquale* eſt quadratis B C, C D, minus rectangulo B C D bis; recta enim B D, eſt differentia inter B C, C D: ergo quadratum A B æquale erit quadratis A D, B C, D C, minus rectangulo B C D bis. addatur vtrobique C
rectangulum B C D bis, ergo quadratum A B vnà cum rectangulo B C D bis,
47 prim æquale erit quadratis A D, B C, D C. ſed quadrata A D, D C æqualia* ſunt quadrato A C, ergo quadratum A B vnà cum rectangulo B C D bis, æquale erit quadratis B C, C A. Itaque quadratum A B minus, eſt quam quadrata B C, C A rectangulo B C D bis. quod erat oſtendendum.

In principio libri tertij decimi Elementorum extant in ſcholijs nonnulla exempla ad Reſolutionem, & Compoſitionem Theorematum pertinentia; ibi enim quinque Theoremata reſoluuntur, & componuntur. Ego quoque eorundem Theorematum veritatem alia methodo inquiram; peritus autem Geometra in inquirendo huiuſmodi Theorematum veritate, poterit ea methodo vti quæ facilior videatur. D

Propoſitio VII.

Si recta linea extrema, ac media ratione ſecetur; quadratum maioris portionis aſſumentis dimidium totius, quanto maius ſit quadrato dimidiæ totius inueſtigare.



SIt recta linea B 2 extrema, ac media, ratione ſecta, cuius portio maior ſit D ergo portio minor

C, A

Digitized by Google

A minor erit B 2--D; dimidia autem totius eſt B, itaque compoſita ex maiore portione, & dimidia totius, erit D + B, Oportet inueſtigare, quanto maius ſit quadratum ex D + B, quadrato ex B; poſuimus eam ſectam extrema, ac media ratione, eſſe B 2 non autẽ B ſimplicem; ſic enim fractiones vitabũtur.

Quoniam igitur ſecta eſt B 2 extrema, ac media ratione, rectangulum ſub tota, & portione minori, æquale erit quadrato portionis maioris. hoc eſt

B Q 4—B in D 2 æquabitur D Q.

Quadratum autem ex D + B, eſt D Q + B Q + D in B 2. ſi igitur dematur D Q, & in locum eius ſubrogetur B Q 4—B in D 2, cui oſtenſum eſt æquari D Q, prodibit B Q. 5, idq; æquabitur quadrato ex D + B; atque adeo quadratum ex D + B quintuplum erit quadrati ex B. Quare inuentum eſt
B quod quærebatur. Hinc ordinatur.

Theorema VII.

Si recta linea extrema, ac media ratione ſecetur, quadratum maioris portionis aſſumentis dimidiam totius, quintuplum eſt quadrati dimidiæ totius.



SEcetur A B extrema, ac media ratione in C, ſitq; maior portio A C, eaq; producatur in D, vt ſit A D æqualis dimidiæ A B. Dicó quadratum ex D C quintuplum eſſe quadrati ex D A. Quoniam enim ſecta eſt A B extrema, ac media ratione
C in C, quadratum A C æquale erit rectangulo A B C, hoc eſt quadrato A B, minus rectangulo B A C; ſeu quod idem eſt, quadrato D A, quater minus rectangulo D A C bis, eſt enim A B dupla ipſius A D. Et quoniam quadratum D C æquale*eſt quadratis D A, A C vnà cum rectangulo D A C bis: ſi 4. ſecũdi dematur quadratum A C, & in locum eius ſubrogetur, ipſi æquale quadratũ D A, quater minus rectangulo D A C bis, itidem manebit æqualitas, hoc eſt quadratum D C æquale erit quadrato D A quinquies. Itaque quadratum D C quintuplum eſt quadrati D A, quod erat oſtendendum.

Propoſitio VIII.

D *Si recta linea partis ipſius quintuplum poſſit, dupla dictæ partis, extrema ac media ratione ſecta. quæritur an maior portio ſectæ ſit reliqua pars eius quæ à principio rectæ lineæ.*



REcta linea conſtans ex partibus B D quintuplum poſſit partis B, cuius dupla eſt B 2; ipſa igitur B 2 ſecetur extrema, ac media ratione. Oportet inueſtigare an maior portio ſectæ ſit D, reliqua videlicet pars eius, quæ à principio rectæ lineæ. Quoniam igitur vna pars ipſius B 2, eſt D reliqua pars erit B 2—D, demonſtrabimus aũt infra ipſam B 2, maiorem eſſe, quam D. Et cum quadratũ ex B + D ponatur quintuplũ quadrati ex B.

B Q

B Q + D Q + B in D 2, æquabitur B Q S. A

Auferatur vtrinque B Q, ergo

D Q + in D 2 æquabitur B Q 4.

Auferatur quoque B in D 2, vt D Q ſolum remaneat, cum recta D comparanda ſit cũ portione maiori ipſius B 2 ſectæ, extrema ac media ratione, ergo

D Q æquabitur B Q 4—B in D 2

Seu quod idem eſt

D Q æquabitur B 2—D in B 2.

Et æqualitate ad proportionem reuocata, proportionales erunt

B 2—D   D   B 2.

Itaque B 2 ſecta eſt extrema, ac media ratione, & maior portio eſt D; cum ſit ipſa D media proportionalis inter portionem B 2—D, & totam B 2. quare inuentum eſt quod quærebatur. Hinc B

Theorema VIII.

Si recta linea partis ipſius quintuplum poſſit. Dupla dicta partis extrema ac media ratione ſecta, maior portio, reliqua pars eſt eius quæ à principio recta linea.



SIt quadratum rectæ A B quintuplum quadrati partis B C, & ipſius B C dupla ſit C D; poſt autem oſtendemus B C duplam maiorem eſſe reliqua parte C A. Dico ſi C D extrema ac media ratione ſecetur, C A eſſe portionem maiorem. C

4 ſecũdi Quoniam enim quadratum A B, quod* conſtat quadratis A C, C B, & rectangulo A C B bis, ponitur quintuplum quadrati B C, quadrata A C, C B vnà cum rectangulo A C B bis, æqualia erunt quadrato B C quinquies; dempto vtrinque quadrato B C, relinquetur quadratum A C, vnà cum rectangulo A C B bis æquale quadrato B C quater, hoc eſt relinquetur quadratum A C vnà cum rectangulo D C A æquale quadrato C D; ponitur enim C D dupla ipſius B C: auferatur quoque vtrinque rectangulum D C A, ergo quadratum A C, æquale erit quadrato C D, minus rectangulo D C A; hoc eſt æquale

16 ſexti erit rectangulo C D A; quare* vt D A ad A C ita erit A C ad C D. Secta eſt igitur recta C D extrema, ac media ratione, & maior portio eſt C A, quod erat oſtendendum. D

At vero B C duplam maiorem eſſe, quam C A ſic demonſtrabitur.

Sit enim ſi fieri poteſt B C dupla non maior quàm C A, ergo quadratum A C non erit minus quadruplo quadrati C B, & conſequenter quadrata A C, C B non erunt minora quintuplo quadrati C B, ſed ponitur quadratum A B quintuplum quadrati C B, ergo quadrata A C, C B, non erunt minora qua-

4 ſecũdi drato A B: quod eſt abſurdum; quadratum enim A B æquale* eſt quadratis A C, C B vnà cum rectangulo A C B bis. Dupla igitur B C maior eſt, quàm C A quod erat oſtendendum.

Propo-

A

Propoſitio IX.

Si recta linea ſecetur extrema, ac media ratione, quadratum minoris portionis aſſumentis dimidiam maioris portionis. quanto maius ſit quadrato dimidiæ maioris portionis, inueſtigare.



Secetur recta extrema, ac media ratione cuius portio maior ſit B 2, portio minor D. Quæritur quanto maius ſit quadratum ex D + B quadrato ex B. Quoniam igitur ex natura huiuſmodi ſectionis rectangulum ſub tota, & portione minore æquale eſt quadrato portionis maioris. ideo

B D in B 2 + D Q æquabitur B Q 4

Quadratum autem ex D + B conſtat ex

D Q + B Q + D in B 2

cui quadrato ſi dematur D in B 2, & D Q. & in locum eorum ſubrogetur æquus valor, nempe B Q 4; fit B Q 5 pro valore eiuſdem quadrati ex D + B. Itaque quadratum ex D + B quintuplum erit quadrati ex B. Quare inuentum eſt quod quærebatur. Hinc.

Theorema IX.

Si recta linea ſecetur extrema, ac media ratione, portio minor aſſumens
C *dimidiam maioris portionis, quintuplum poteſt eius, quod à dimidia maioris portionis deſcribitur quadrati.*

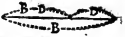


Secetur A B extrema, ac media ratione: in C cuius portio maior A C, ſecetur bifariam in D. Dico quadratum B D quintuplum eſſe quadrati D C. Quoniam enim ex huiuſmodi ſectione rectangulum A B C, æquale eſt quadrato A C ipſi autem rectangulo A B C, æquale eſt quadratum C B vna cum rectangulo A C B, hoc eſt vna cum rectangulo D C B bis, & quadratum A C quadruplum eſt quadrati D C, ergo quadratum C B vnà cum rectangulo D C B bis, æqualia erunt quadrato D C quater. Et quoniã quadratum D B æquale eſt quadratis D C, C B vnà cum rectangulo D C B bis. 4 ſecũdi
D demptis quadrato C B, & rectangulo D C B bis, & in locum eorum ſubrogato quadrato D C quater, cui ea æqualia ſunt, rurſus manebit æqualitas, nẽpe quadratum D B, æquale erit quadrato D C quinquies. Itaque quadratum A B quintuplum erit quadrati D C. Quare conſtat propoſitum.

Propoſitio X.

Si recta linea ſecetur extrema, ac media ratione: quadrata totius & portionis minoris ſimul, quanto ſint maiora quadrato portionis maioris, inueſtigare.

Secetur



Secetur recta B extrema, ac media, ratione, ſitq; minor portio D ergo maior erit B—D. Quæritur quanto maiora ſint quadrata ex B & D, quadrato ex B—D. Quoniam igitur ratione ſectionis, quadratum portionis maioris æquale eſt rectangulo ſub tota & portione minori A

BQ ✠ DQ—B in D 2 æquabitur B in D.

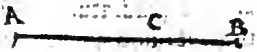
Addatur vtrobique B in D 2 vt BQ & DQ vna ex parte exiſtant, cum ſint comparanda cum quadrato portionis maioris, ergo

BQ ✠ DQ æquabitur B in D 3.

Quadrata igitur ex B & D ſimul, tripla ſunt quadrati portionis maioris. Quare inuentum eſt quod quærebatur. Hinc

Theorema X. B

Si recta linea ſecetur extrema, ac media ratione; quadrata totius, & portionis minoris ſimul, tripla ſunt quadrati portionis maioris.

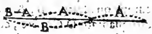


Secetur recta A B in C extrema, ac media ratione, ſitq portio maior A C, & portio minor C B. Dico quadrata A B, B C ſimul, tripla eſſe quadrati A C. Quoniam enim ex vi ſectionis quadratum A C æquale eſt re-

Theor. 1 ctangulo A B C, & æquale quoque quadratis A B, B C, minus duplo rectanguli A B C, recta enim A C differentia eſt rectarum A B, B C, ergo quadrata A B, B C, minus duplo rectanguli A B C, æqualia erunt rectangulo A B C; C addatur vtrique parti duplum rectangulum A B C, ergo quadrata A B, B C æqualia erunt triplo rectangulo A B C hoc eſt triplo quadrati A C quod erat oſtendendum.

Propoſitio XI.

Si recta linea extrema, ac mediæ ratione ſecetur, adijciaturq ipſi æqualis maiori portioni. Quæritur an tota linea ſit extrema, ac media ratione ſecta, ita vt maior portio ſit ea quæ à principio poſita eſt recta linea.



Sit recta linea B ſecta extrema, ac media ratione, ſitq; maior portio A, ergo portio minor erit B—A: ipſi autem B adijciatur D recta æqualis maiori portioni, ea erit A. Oportet inueſtigare an tota B ✠ A ſit ſecta extrema, ac media, ratione, ita vt maior portio ſit B. Quoniam igitur ex natura ſectionis eſt

vt B ad A ita A ad B—A.

Erit conuertendo vt A ad B ita B—A ad A

Et componendo vt A ✠ B ad B ita B ad A.

Secta eſt igitur B A extrema, ac media ratione, & portio maior eſt B, quæ à principio poſita eſt. Itaque inuentum eſt quod quærebatur. Hinc

Theo-

A

Theorema XI.

Si recta linea extrema, ac media ratione ſecetur, adijciaturq; ipſi æqualis maiori portioni, erit tota linea extrema, ac media, ratione, ſecta, et maior portio erit ea, quæ à principio poſita eſt recta linea.

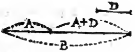


SIt recta linea A B, quæ ſecetur extrema, ac media, ratione, in C & ſit portio maior C B, cui æqualis ponatur B D. Dico rectam lineam A D extrema, ac media, ratione, ſecari in puncto B, & maiorem portionem eſſe A B, quæ à principio poſita eſt. Quoniam enim ratione ſe-
B ctionis eſt, vt A B ad B C, ita B C ad C A, erit conuertendo, vt B C, hoc eſt B D, ad B A, ita A C ad C B; & componendo, vt D A ad A B, ita A B ad B C; hoc eſt ad B D. Secta eſt igitur A D extrema, ac media, ratione, in B, & maior portio eſt A B. quod erat oſtendendum.

Problema Primum.

Datam rectam lineam ſecare, ita vt maior pars minorem dato exceſſu ſuperet. Oportet autem datum exceſſum minorem eſſe data ſecanda.

Reſolutio.



C SIt data recta linea B ſecanda in duas partes, quarum maior ſuperet minorē exceſſu æquali datæ rectæ lineæ D.

Factum iam ſit & pars minor eſto A, maior igitur erit A ✣ D, vnde tota erit A 2 ✣ D ſed eadem data eſt B, ergo

B æquabitur A 2 ✣ D

auferatur vtrinque D, vt magnitudines datæ ex vna parte exiſtant; ea vero de qua quæritur ex altera, ergo

B — D æquabitur A 2

Vnde

Poriſma.

D Recta data minus exceſſu dato, æqualis eſt duplo partis minoris.

Datur ergo minor pars quæſita.

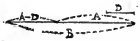
Compoſitio.



SIt dacta recta linea A B, quam oportet ſecare vt pars maior ſuperet minorem exceſſu æquali datæ rectæ lineæ D, à recta A B auferatur B C æqualis ipſi D, reliqua vero C A ſecetur bifariam in E, erit igitur A E minor pars, E B maior; hæc enim ſuperat illam exceſſu C B, æquali ipſi D, quare factum eſt quod oportebat.

Alia Reſolutio. A

Pars maior eſtò A, minor igitur erit A — D, tota ideo erit A 2 — D, ſed eadem data eſt B ergo



B æquabitur A 2 — D

Addatur vtrobique D, vt quæſita magnitudo à datis ſeparetur. ergo

B + D æquabitur A 2.

Hinc

Poriſma.

Recta data plus exceſſu dato æqualis eſt, duplo partis maioris. B
Datur ergo maior pars quæſita.

Compoſitio.

Sit data recta linea ſecunda vt petitur A B, datus autem exceſſus D. Producatur A B in C, vt B C ſit æqualis D, & tota A C ſecetur bifariam in E; erit A E pars maior, E B pars minor, recta enim E C, hoc eſt A E, ſuperat E B, exceſſu B C æquali ipſi D. Factum eſt igitur quod oportebat.



Corollarium I. C

Ex demonſtratis manifeſtum eſt, rectam lineam, quæ in duas partes diuiditur, auctam exceſſu partium, æqualem eſſe parti maiori duplæ, diminutam vero, duplæ minori.

In poſteriori enim demonſtratione rectæ A B ſectæ in E adiecta eſt B C differentia partium A E E B, & fit A C dupla partis maioris A E.

In priori vero demonſtratione rectæ A B, quæ ſecta eſt in E, ablata eſt C B differentia partium A E E B, & relinquitur A C dupla partis minoris A E.

Corollarium II.

Per conſequens hoc etiam verum eſt, dimidia lineæ rectæ in duas partes diuiſæ, aucta dimidio exceſſu partium, æqualis eſt parti maiori, diminuta minori. D

Poſui corollaria hæc, quoniam frequens eſt eorum vſus in reſolutionibus, præſertim in conſtituendis partibus ex aggregato partium, & differentia.

Problema II.

Data recta linea, alteram rectam adiungere, vt data cum adiuncta, ad adiunctam, datam teneat rationem. Oportet autem datam rationem eſſe maioris ad minus.

Reſo-

A

Reſolutio.



SIt data recta linea B, cui oportet alteram rectam adiungere, vt data cum adiuncta, ad adiunctam, ſit vt R ad S, quarum R ſit maior.

Factum iam ſit & adiuncta de qua quæritur eſto A, ergo data cum adiuncta erit B ✢ A, & erit

vt R ad S ita B ✢ A ad A.

In hac propoſitione duo tantum dantur termini, primus nempe, & ſecundus, vt neceſſe eſt dari quoque tertium, nam niſi ſint cogniti tres propoſitionis termini, quartus, hoc eſt quæſita magnitudo, non innoteſcet. igitur vt
B tertius quoque detur terminus, qui conſtat ex B & A magnitudinibus, data ſcilicet, & quæſita, liberandus eſt à quæſita, ita tamen vt quatuor illi termini proportionales exiſtant. liberabitur autem in hoc caſu, auferendo conſequẽtes ab antecedentibus, hoc eſt per diuiſionem rationis argumentando, nam cum ſit

vt R ad S ita B ✢ A ad A

erit diuidendo vt R — S ad S, ita B ad A.

Dantur ergo tres proportionalium termini, itaque dabitur, & quartus, hoc eſt adiuncta, de qua quæritur.

Poriſma.

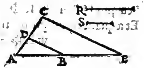
C Vt differentia terminorum rationis datæ ad terminum minorem, ita eſt data ad adiunctam.

Scholium.

Sæpe autem contingit, non vnum tantùm, ſed plures proportionis terminos conſtare ex datis magnitudinibus & ea de qua quæritur, vel eius gradu, nec rationem apparere, qua datæ magnitudines à quæſita ſeparari poſſint, ſeruata proportione quacunque, ideo eo caſu reſoluenda eſt ad æqualitatem proportio & procedendum æqualibus æqualia addendo, vel ſubducendo vel æqualia per æqualia multiplicando, aut diuidendo, donec facta omnino
D ſub magnitudinibus datis ex vna æquationis parte exiſtant, cætera vero ex altera. Hæc autem exemplis ſuo loco fient illuſtriora.

Compoſitio.

SIt data recta linea A B cui oportet alteram rectam adiungere, vt data cum adiuncta ad adiunctam ſit, vt R ad S maior ad minorem. Ponatur A C æqualis R, ita vt cum A B conſtituat angulum quemcunque, & ab A C abſcindatur C D æqualis S, & iungatur D B, eiq; paral-



Digitized by Google

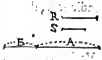
ª ſexti lela agatur C E ſecans A B productam in E. Erit* igitur vt A D ad D C differentia videlicet terminorum R & S ad terminum minorem, ita A B ad B E, data nempe ad adiunctam. Itaque continuata eſt A B in E, quemadmodum ad riſma iubet, hoc eſt datis tribus rectis lineis A D D C A B, inuenta eſt quarta proportionalis B E. Nunc autem oſtendendum eſt, vt R ad S ita eſſe A E ad B E. Quoniam igitur eſt vt A D ad D C, ita A B ad B E, erit componendo vt A C ad D C, hoc eſt vt R ad S, ita A E ad B E cum enim in Reſolutione per diuiſionem rationis argumentatus fueris, in compoſitione per compoſitionem rationis argumentaberis & è contra. Continuata eſt igitur A B in E, vt A E ad B E rationem habeat vt R ad S quod erat faciendum. A

Problema III. B

Data recta linea, alteram rectam adiungere, vt differentia data & adiuncta ad aggregatum earundem rationem habeat datam. Oportet autem datam rtaionem eſſe minoris ad maius.

Hoc Problema duos caſus habet; aut enim data ſuperabit adiunctam, aut adiuncta datam. primum data ſuperet adiunctam.

Reſolutio primi caſus.



Sit data recta linea B, cui oportet alteram rectam adiungere vt exceſſus quo data ſuperat adiunctam ad aggregatum earundem, rationem habeat, vt R ad S, quæ ratio ſit minoris ad maius. C

Sit iam factum & adiuncta de qua quæritur eſto A, ergo exceſſus quo data ſuperat adiunctam, erit B — A, aggregatum verò earundem B + A & erit

vt R ad S, ita B — A ad B + A.

Quoniam igitur in hac proportione plures termini, non vnus tantum conſtant, ex datis magnitudinibus, & ea de qua quæritur neque inpromptu eſt quomodo datæ magnitudines à quæſita ſeparari poſſint, ſeruata proportione quacunque; idcirco reſoluenda eſt proportio ad æqualitatem, vt factum ſub extremis proportionalium terminis, æquale ſit facto ſub medijs ea igitur reſoluta.

R in B + R in A æquabitur S in B — S in A D

Addito vtrique parti S in A

R in B + R in A + S in A æquabitur S in B

Et ablato vtrinque R in B.

R in A + S in A æquabitur S in B — R in B,

Seu quod idem eſt R + S in A æquabitur S — R in B

Et æqualitate ad proportionem reuocata. erit

vt R + S ad S — R ita B ad A

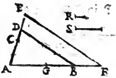
Hinc

A Hinc

Poriſma.

Vt aggregatum terminorum rationis datæ ad differentiam eorundem, ita eſt data ad adiunctam. Datur ergo adiuncta de qua quæritur.

Compoſitio primi caſus.



Sit data recta linea A B, data autem ratio R ad S minoris ad maius. Oportet ipſi A B alteram rectam adiungere, vt exceſſus quo data ſuperat adiunctam, ad aggregatum earundem ſit, vt R ad S. Ponatur A C æqualis S conſtituens cum A B angulum quemcunque eaq; duplicetur in E, & ſumatur C D æqualis R. itaq; differentia ipſarum A C, C D, erit D E, aggregatum vero A D. iungatur autem D B, eiq; parallela agatur E F occurrens continuatæ A B in F, erit* igitur vt A D ad D E ita A B ad B F, hoc eſt, vt aggregatum terminorum rationis datæ ad differentiam eorundem, ita data ad adiunctam, atque adeo factum erit quemadmodum Poriſma docet. Nunc autem demonſtrandum eſt vt R ad S, ita eſſe differentiam rectarum A B, B F ad A F, idq; per repetitionem veſtigiorum reſolutionis ducendo initium à fine, ita fit manifeſtum. Sumatur B G æqualis B F, ergo differentia rectarum A B, B F erit A G. Et quoniam eſt vt A D ad D E ita A B ad B F, reſoluta ad æqualitatẽ proportione, rectangulum ſub extremis A D, B F æquale erit rectangulo ſub medijs D E, A B. nam cum in fine reſolutionis æqualitas ad proportionem ſit reuocata; in principio demonſtrationis proportio ad æqualitatem, reſoluenda eſt, quod enim poſtremum eſt in reſolutione, id in compoſitione primum eſſe debet. Cum igitur rectangulum A D, B F quod conſtat rectangulis A C, B F C D, B F, æquale ſit rectangulo D E, A B, cui æquatur rectangulum C E, A B minus rectangulo C D, A B, erit rectangulum A C, B F vnà cum rectangulo C D, B F æquale rectangulo C E, A B, minus rectangulo C D, A B. addatur vtrique parti rectangulum C D, A B, quia in reſolutione detractum fuit, ergo rectangulum A C, B F vnà cum rectangulis C D B F, C D, A B, æquale erit rectangulo C E, A B; hoc eſt rectangulo C A B, ſunt enim æquales A C, C E. auferatur vtrinque rectangulum A C, B F, additum enim fuit in reſolutione; ergo rectangulum C D, B F vnà cum rectangulo C D, A B, hoc eſt rectangulum C D, A F, æquabitur rectangulo C A B, minus rectangulo A C, B F, hoc eſt æquabitur rectangulo C A G, & reuocata ad proportionem æqualitate, cum in reſolutione proportio ad æqualitatem ſit reſoluta, erit vt D C ad C A, hoc eſt vt R ad S, ita A G ad A F. Datæ igitur A B adiecta eſt B F, quarum differentia ad aggregatum rationem habet vt R ad S. quod erat faciendum.

Margin: B (beside "iunctam"); * ſexti (beside "erit igitur"); C (beside "A G."); D (beside "B F, C D").

Conſpectus Reſolutionis & Compoſitionis. A

Principium Reſolutionis	*Finis Compoſitionis*	
R S B—A B+A	hoc eſt R S AG AF DC CA	
ad æqualitatem	ad proportionem	
R in B + R in A S in B — S in A	hoc eſt VCDAF + VCDAB VCDBF	hoc eſt VCAG — VACBF VCAB
Addatur S in A	auferatur VACBF	B
R in B + R in A + S in A | S in B	+ VCDAB + VCDBF VACBF	hoc eſt VCAB VCEAB
auferatur R in B	addatur VCDAB	
R in A + S in A S in B—R in B ſeu R + S in A 1 S—R in B.	+ VCDBF hoc eſt VACBF VADBF	— VCDAB hoc eſt VCEAB VDEAB
ad proportionem	ad æqualitatem	
R + S S—R B A	AD DE AB BF	C
Finis Reſolutionis	*Principium Compoſitionis*	

Scholium.

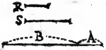
Satis eſt per repetitionem veſtigiorum Reſolutionis inueniſſe demonſtrationem, neque ad eam explicandam neceſſe eſt omnino Reſolutionis veſtigia ſequi; poteſt enim ipſa demonſtratio, cognitis iam medijs alia quoque via aliquando clariore, atque adeo elegantiore perfici; ſed cum de Reſolutione, & Compoſitione mihi agendum ſit, vt propoſui à greſſibus Reſolutionis in Compoſitionibus ſeu demonſtrationibus non recedam; licet ipſas demonſtrationes rudes, & incultas prout ex Reſolutionibus naſcentur expoſuero, ſic enim apertius patebit quomodo demonſtratio per filium Reſolutionis procedat. D

Idem autem caſus alia quoque via breuiori, ac faciliori poterit, & reſolui, & componi ſine vllo à proportione ad æqualitatem tranſitu; quamuis non appareat quomodo magnitudines datæ à quæſita ſeparari poſſint, ſeruata proportione quacunque; nam ſatis eſt, vt tres proportionis termini conſtent ex datis magnitudinibus, quod in Caſibus ſimilibus commodè fieri poteſt; quartus autem terminus etiam ſi conſtet ex dato & quæſito, nihil refert.

Altera

A

Altera Reſolutio eiuſdem caſus.



Sit data recta linea B, & oportet facere quod imperatum eſt. Factū iam ſit, & adiuncta de qua quæritur eſtò A. Exceſſus igitur quo data ſuperat adiunctam erit B—A aggregatum vero earundem B + A & erit

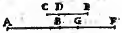
vt R ad S ita B—A ad B + A

Et componendo erit vt R + S ad S ita B 2 ad B + A.

Poriſma.

B Vt aggregatum terminorum rationis datæ, ad terminum ſecundum; ita eſt data dupla ad compoſitam ex data, & adiuncta.

Altera Compoſitio eiuſdem caſus.



Sit data recta linea A B, cui oporteat alteram rectam adiungere, vt exceſſus quo data ſuperat adiunctam, ad compoſitam ex data, & adiuncta ſit, vt C D ad D E, quarum C D ſit minor. Duplicetur A B in F, & ponantur in directum C D, D E, & fiat vt C E ad E D, ita A F ad aliam, quæ ſit A G, ea maior erit, quam A B dimidia videlicet ipſius A F, quoniam & E D maior eſt, quàm dimidia C E, ponitur enim C D minor, quàm D E. Itaque factum

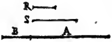
C eſt vt docet Poriſma. Rectam autem B G problema efficere, ſic demonſtrabimus. Quoniam enim vt C E ad E D, ita eſt A F ad A G, erit diuidendo, vt C D ad D E, ita F G ad G A, cum enim in reſolutione factus ſit tranſitus per compoſitionem rationis, in demonſtratione fieri debet per diuiſionem rationis, vt dictum eſt in antecedenti problemate, ſed F G eſt exceſſus, quo B F, vel A B ſuperat ipſam B G, ergo vt C D ad D E, ita erit exceſſus, quo A B ſuperat B G, ad compoſitam ex A B, B G, data videlicet, & adiuncta. Quare factum eſt quod oportebat.

Conſpectus Reſolutionis, & Compoſitionis.

D *Initium Reſolutionis* — *Finis Compoſitionis*

R S B—A B + A	diuidendo CD DE FG GA
componendo R + S S B 2 B + A	CE ED AF AG
Finis Reſolutionis	*Initium Compoſitionis*

Reſolutio ſecundi caſus.



Sit data recta linea B, ratio autem, vt R ad S minoris ad maius. Oportet ipſi B alteram rectam adiungere, vt exceſſus quo adiuncta ſuperat

perat datam, ad aggregatum earundem ſit, vt R ad S. A

Sit factum, & adiuncta eſto A, exceſſus igitur, quo adiuncta ſuperat datam, erit A—B, aggregatum vero earundem A ✠ B, & erit

vt R ad S ita A—B ad A ✠ B.

Et reſoluta ad æqualitatem proportione

R in A ✠ R in B æquabitur S in A—S in B.

addito vtrique parti S in B

R in A ✠ R in B ✠ S in B æquabitur S in A.

Et detracto R in A

R in B ✠ S in B æquabitur S in A—R in A.

Seu quod idem eſt R ✠ S in B æquabitur S—R in A.

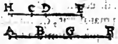
Et æqualitate ad proportionem reuocata, erit B

vt S—R ad R ✠ S ita B ad A.

Poriſma.

Vt differentia terminorum rationis datæ, ad aggregatum eorundem, ita eſt data, ad adiunctam. Datur ergo adiuncta de qua quæritur.

Compoſitio ſecundi caſus.



SIt data recta linea A B, cui oporteat alteram rectam apiungere, vt exceſſus quo adiuncta ſuperat datam ad aggregatum earundem ſit, vt C D ad D E, minor nempe ad maiorem. Duplicetur E D C in H, & fiat vt H C ad C E, ita A B ad aliam, quæ ſit B F, hoc eſt, vt differentia terminorum rationis datæ, ad aggregatum eorundem, ita data ad adiunctã, ſic enim Poriſma fieri docet. Nunc autem oſtendendum eſt, rectum B F problema efficere. Sumatur B G æqualis B A, igitur B F ſuperat ipſam A B exceſſu G F. Et quoniam eſt vt H C ad C E, ita A B ad B F, rectangulum ſub medijs C E, A B, hoc eſt duo rectangula C D A B, D E A B æqualia erunt rectangulo ſub extremis H C, B F, hoc eſt rectangulo H D, B F, minus rectangulo C D, B F, addito vtrique parti rectangulo C D, B F: demptum enim fuit in Reſolutione, ergo rectangula C D B F, C D A B, D E A B, æqualia erunt rectangulo H D B F, hoc eſt D E B F, & ablato vtrinque rectangulo D E A B, ſeu D E B G, fuit enim additum in reſolutione, rectangula C D B F, C D A B, hoc eſt rectangulum C D A F, æquabitur rectan- D gulo D E B F, minus rectangulo D E B G. hoc eſt æquabitur rectangulo D E G F, & æqualitate ad proportionem reuocata, fuit enim in reſolutione proportio ad æqualitatem reſoluta, erit vt C D ad D E, ita G F ad F A, hoc eſt ita exceſſus quo B F adiuncta ſuperat A B datam, ad aggregatum earundem. Datæ igitur A B adiuncta eſt B F vt faciendum erat.

A

Conſpectus Reſolutionis & Compoſitionis.

Initium Reſolutionis		*Finis Compoſitionis*	
R S A—B A ✣ B		CD DE GF FA	
ad æqualitatem		ad proportionem	
R in A ✣ R in B	S in A — S in B	hoc eſt V CD AF ✣ V CD AB V CD BF	hoc eſt V DE GF — V DE BG V BE BF
Addatur S in B		auferatur V DE AB ſeu V DE BG	
R in A ✣ R in B ✣ S in B	S in A	✣ V DE AB ✣ V CD AB V CD BF	hoc eſt V DE BF V HD BF
auferatur R in A		addatur V CD BF	
R in B ✣ S in B ſeu quod idem eſt R ✣ S in B	S in A — R in A S — R in A	✣ V DE AB hoc eſt V CD AB V CE AB	— V CD BF hoc eſt V HD BF V HC BF
ad proportionem		ad æqualitatem	
S—R R ✣ S B A		HC CE AB BF	
Finis Reſolutionis		*Initium Compoſitionis*	

B (margin)

C (margin)

Et hic Caſus poterit reſolui, & componi, etiam ſi nullus à proportione ad æqualitatem fieret tranſitus, hac ratione.

Altera Reſolutio ſecundi caſus.



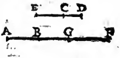
Iſdem datis quæratur adiuncta, vt in antecedenti reſolutione. erit
vt R ad S ita A—B ad A ✣ B
D Et conuertendo vt S ad R ita A ✣ B ad A—B
Et diuidendo vt S—R ad R ita B 2 ad A—B

Poriſma.

Vt differentia terminorum rationis datæ ad terminum priorem, ita eſt data duplá ad exceſſum, quo adiuncta ſuperat datam.

Datur ergo adiuncta de qua quæritur.

Altera Compoſitio ſecundi caſus. A



SIt datæ rectæ A B addenda altera recta, vt exceſſus adiectæ ſupra datam, ad aggregatum earundem ſit, vt C D ad D E. Duplicetur A B in G, & fiat, vt E C ad C D, differentia videlicet terminorum rationis datæ, ad terminum priorem, ita A G ad aliam, quæ ſit G F, ſic enim Poriſma docet. Dico B F Problema efficere. Quoniam enim, vt E C ad C D, ita eſt A G ad G F, erit componẽdo, vt E D ad D C, ita A F ad F G, & conuertendo, vt C D ad D E, ita G F ad F A. Datæ igitur A B adiecta eſt B F, cuius exceſſus G F ſupra datam A B ſe habet ad A F, compoſitam ex data, & adiecta, vt C D ad D E; quod facere oportebat. B

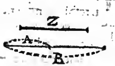
Conſpectus Reſolutionis, & Compoſitionis.

Initium Reſolutionis	*Finis Compoſitionis*
R S A — B A + B	C D D E G F F A
conuertendo	conuertendo
S R A + B A — B	E D D C A F F G
diuidendo	componendo.
S — R R B 2 A — B	E C C D A G G F C
Finis Reſolutionis	*Initium Compoſitionis*

Problema IV.

Datam rectam lineam in duas partes diuidere, vt partium quadrata, dato quadrato differant. Oportet autem latus quadrati dati minus eſſe data ſecunda.

Reſolutio.



SIt data recta linea B ſecanda in duas partes, vt quadratum partis maioris ſuperet quadratum minoris partis quadrato datæ Z. D
Ponatur factum eſſe, & differentia partium eſto A
Corol. 1. Probl. 1. ergo B + A erit maior pars dupla, & B — A dupla minor, vnde ſimpla pars maior erit B ½ + A ½, ſimpla minor B ½ — A ½. Quadratum autem partis maioris eſt B Q ¼ + A Q ¼ + B in A ½, quadratum vero partis minoris eſt B Q ¼ + A Q ¼ — B in A ½: ablato igitur quadrato partis minoris à quadrato partis maioris, reſiduum erit B in A, idq; æquale eſt Z Q, differunt enim partium quadrata per quadratum Z datæ. ergo æqualitate ad proportionem reuocata, proportionales erunt B Z A.

Poriſ-

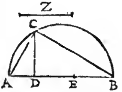
A

Poriſma.

Latus quadrati dati medium proportionale eſt inter datam rectam, quæ ſecanda proponitur, & differentiam partium eiuſdem.

Datur ergo differentia partium quæſita.

Compoſitio.



SIt data recta linea A B ſecanda in duas partes, vt quadratum partis maioris ſuperet quadratũ partis, minoris quadrato datæ Z, quæ minor ſit ipſa A B. Deſcribatur in A B ſemicirculus, in quo
B accomodetur A C æqualis Z, & à puncto C demittatur in A B perpendicularis G D & ſecetur D B bifariam in E; differentia igitur partium A E E B erit A D, & ducta C B, angulus A C B in ſemicirculo rectus erit; quare A C cui æqualis eſt Z erit*media linea proportionalis inter B A A D, itaque ſecta eſt A B in E, prout Poriſma docet. Nunc oſtendendum eſt differentiam quadratorum A E E B, æquari quadrato Z. Quoniam igitur proportionales ſunt B A A C A D, quadratum mediæ A C æquale erit rectangulo B A D, ſed rectangulum B A D comprehenſum ſub tota B A, & A D differentia partium A E E B, æquale*eſt differentiæ quadratorum A E E B, ergo & quadratum A C æquale erit eidem differentiæ quadratorum A E E B. Secta eſt igitur
C A B in E vt Problema poſtulat quod faciendum erat.

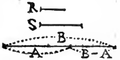
Coroll. prop. 8. ſexti

Theor. I

Problema V.

Datam rectam lineam ſecare, vt rectangulum ſub partibus ad quadratum vnius partium rationem habeat datam.

Reſolutio.



SIt data recta linea B ſecanda in duas partes, vt rectangulum ſub partibus ad quadratum vnius partium ſit vt R ad S.
D Sit iam ſecta, & pars ad cuius quadratum datam rationem habet rectangulum ſub partibus eſto A, ergo pars altera erit B—A, atque erit

vt R ad S, ita B in A — A Q. ad A Q. hoc eſt ita rectangulum ſub partibus ad quadratum vnius partium.

Quare reſoluta ad æqualitatem analogia

R in A Q æquabitur S in B in A — S in A Q

Applicentur omnia ad A vt aliqua magnitudo ſit omnino data, cui magnitudines incertæ comparabuntur, ergo

R in A æquabitur S in B—S in A

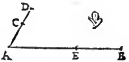
Addito

Addito vtrique parti S in A, vt cognita ab incognitis ſeparentur. A
R in A + S in A æquabitur S in B.
Seu quod idem eſt R + S in A æquabitur S in B,
Et reuocata ad proportionem æqualitate, proportionales erunt
R + S   S   B   A

Poriſma.

Vt aggregatum terminorum rationis datæ ad terminum ſecundum, ita eſt data recta ad partem, ad cuius quadratum debet habere rationem datam rectangulum ſub partibus. Datur ergo pars quæſita.

Compoſitio. B



SIt data recta linea A B, quam oportet ſecare vt rectangulum ſub partibus ad quadratum vnius partium rationẽ habeat vt D C ad C A. Ponantur in directum D C C A, & fiat vt A D ad A C, ita A B ad aliam quæ ſit A E. ſic fieri Poriſma iubet, ergo rectangulum D A E ſub extremis, hoc eſt duo rectangula D C A E, & C A E, æqualia erunt rectangulo C A B ſub medijs. auferatur vtrinque rectangulum C A E, ergo rectangulum D C A E æquale erit rectangulo C A B, minus rectangulo C A E, hoc eſt æquale erit rectangulo C A E B. Ducantur omnia plana in A E vt fiant ſolida, in reſolutione enim omnia ſolida depreſſa ſunt ad plana applicatione eidem A E, ergo ſolidum ſub D C & C
quadratum A E æquale erit ſolido ſub C A A E E B, & reuocata ad proportionem æqualitate, erit vt D C ad C A, ita rectangulum A E B ad quadratum A E. Secta eſt igitur A B in E, vt rectangulum A E B ad quadratum A E rationem habeat, vt D C ad C A. quod erat faciendum.

Scholium.

Plures viæ ſunt quibus Problemata reſoluuntur; aliæ quidem faciles, quæ ſua quaſi ſponte occurrunt; aliæ vero cum aliqua difficultate inueniuntur. Ex facilioribus autem nonnunquam oriuntur demonſtrationes, etſi veriſſimæ, ſubobſcuræ tamen, ac parùm vſitatæ, qualis eſt ſuperior demonſtratio per æqualitatem etiam ſolidorum procedens, quibus in planorum Problematũ de- D
monſtrationibus non eſt vtendum; initium enim quodammodo videtur ad planorum Problematum demonſtrationes perficiendas ſolida cõtrahere, hoc eſt ea per improprium genus demonſtrare. Ne igitur in demonſtratione plani problematis, ſolidis vtar, idem Problema aliter reſoluam & componam.

Altera Reſolutio eiuſdem Problematis.

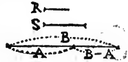
SIt data recta linea B, quam oportet ſecare, vt rectangulum ſub partibus ad quadratum alterius partis rationem habeat vt R ad S.

Secta iam ſit & pars ad cuius quadratum datam rationẽ habet rectangulum

A gulum ſub partibus eſto A, quemadmodum poſitum eſt in antecedenti reſolutione, ergo altera pars erit B—A. Quoniam igitur eſt vt R ad S, ita rectangulum ſub partibus ad quadratum alterius partis, erit

vt R ad S ita B in A — A Q ad A Q

& componendo erit, vt R ✢ S ad S, ita B in A ad A Q: Sed B in A ad A Q eſt vt B ad A, ſunt enim eiuſdem altitudinis rectangulum B in A & A quadratum, cùm ſit vtriuſque altitudo A; ergo erit



vt R ✢ S ad S, ita B ad A

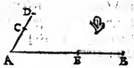
B

Poriſma.

Vt aggregatum terminorum rationis datæ ad terminum ſecundum, ita eſt recta data, ad partem ad, cuius quadratum debet habere rationem datam rectangulum ſub partibus.

Illud ipſum eſt, quod per antecedentem reſolutionem inueniebatur. Datur ergo pars quæſita.

Altera Compoſitio eiuſdem Problematis.



Sit data recta linea A B, quam oportet ſecare, vt rectangulum ſub partibus ad quadratum alterius partis rationem habeat, vt D C

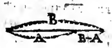
C ad C A. Ponantur in directum A C C D, & fiat, vt A D ad A C, ita A B ad aliam, quæ ſit A E, ſic fieri Poriſma docet, ergo diuidendo erit, vt D C ad C A, ita B E ad E A, ita eſt rectangulum B E A ad quadratum E A, cùm ſint eiuſdem altitudinis E A, ergo vt D C ad C A, ita erit rectangulum B E A ad quadratum E A. Secta eſt igitur A B in E, vt Problema poſtulat. quod erat faciendũ.

Problema VI.

Datam rectam lineam ſecare, vt rectangulum ſub tota, & parte minore æquale ſit rectangulo ſub differentia partium, & parte maiore.

D

Reſolutio.



Sit B data recta ſecanda, vt petitur. Ponatur iam factum. & pars maior, de qua quæratur eſto A, ergo B— A erit pars minor, harum partium differentia erit A 2 — B; ſi enim ab A auferatur B —A, remanebit A 2—B. Quoniam igitur rectangulum ſub tota, & parte minori æquale eſt rectangulo ſub differentia partium, & parte maiori.

B Q—B in A æquabitur A Q 2 — B in A

Addatur vtrobique B in A, ergo

B Q æquabitur A Q 2

Poriſma. A

Quadratum totius rectæ ſecandæ duplum eſt quadrati à maiore parte deſcripti. Datur ergo maior pars quæſita.

Compoſitio.



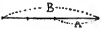
SIt data recta linea A B, quam oporteat ſecare, vt rectangulum ſub tota, & parte minori æquale ſit rectangulo ſub differentia partiū, & parte maiori. Deſcribatur in A B ſemicirculus, cuius circumferentia ſecetur bifariam in D, & connectantur A D, D B. quadrata igitur æqualium A D, D B * æqualia erunt quadrato A B, angulus enim A D B in ſemicirculo rectus eſt, vnde quadratum A B duplum erit quadrati A D. Fiat ergo A C æqualis A D, & factū erit quemadmodum Poriſma docet: ſecta eſt enim A B in C, vt quadratum ipſius A B duplum ſit quadrati A C. Nunc oſtendendum eſt eam ſectionem Problema efficere. Producatur enim C B in E, vt ſit C E æqualis C A, itaque differentia partium A C, C B erit B E. Et quoniam quadratum A B duplum eſt quadrati A C; hoc eſt æquale rectangulo E A C; ſi auferatur commune rectangulum B A C; reliquum rectangulum A B C, reliquo rectangulo E B, A C, æquale erit, hoc eſt rectangulum ſub tota, & parte minori æquale rectangulo ſub differentia partium, & parte maiori. Secta eſt igitur A B in C, & quod faciendum erat. C

(47. primi)

Problema VII.

Datam rectam lineam ſecare, vt rectangulum ſub partibus comprehenſum æquale ſit ei, quod à differentia partium, ſit quadrato.

Reſolutio.



SIt data recta linea B ſecanda vt petitur. Ponatur iam ſecta, & differentia partium eſto A ergo B ✠ A* erit pars maior dupla, & B — A pars minor dupla. Et quoniam rectangulum ſub partibus æquale eſt quadrato differentiæ partium, rectangulum ſub partibus duplis æquale erit quadrato differentiæ partium duplæ, hoc eſt D

(Corol. 1. Probl. 1.)

B Q. — A Q æquabitur A Q 4

Addito vtrique parti A Q, vt quæſitum à dato ſeparetur

B Q æquabitur A Q. 5

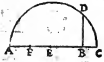
Poriſma.

Quadratum totius ſecandæ quintuplum eſt quadrati differentiæ partium. Datur ergo differentia partium quæſita.

Com-

A

Compoſitio.



SIt data recta linea A B, quã oportet ſecare, vt rectangulum ſub pedibus æquale ſit quadrato differẽtiæ partium. Producatur A B in C, vt B C ſit æqualis quintæ parti ipſius A B, & in A C deſcribatur ſemicirculus A D C, & ex B erigatur ad A C perpendicularis B D, cui æqualis fiat B E, & reliqua E A ſecetur bifariam in F: differẽtia igitur partium A F, F B erit E B, & cũ ſit A B quintupla ipſius B C, quadratum A B quintuplum erit rectanguli A B C, hoc eſt quadrati B D, vel B E. Secta eſt igitur A B in F, prout Poriſma docet. Rectangulũ autẽ A F B ſub partibus æquale

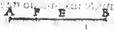
B eſſe quadrato E B differentiæ partium vt Problema requirit, ſic demonſtrabo. Quoniam enim quadratum A B quintuplum eſt quadrati B E, ſeu æquale eſt quintuplo quadrati B E, ablato vtrinq; quadrato B E, quadratũ A B minus quadrato B E, *æquale eſt quadruplo rectangulo A F B; cùm ſit B E differẽtia ipſarum A F, F B, ergo quadruplum rectangulum A F B æquabitur quadruplo quadrato B E, & conſequenter ſimplum ſimplo. Secta eſt igitur A B in F, vt rectangulum A F B ſub partibus æquale ſit quadrato E B differentiæ partium; quod faciendum erat. Theor. 3.

Si quis voluerit peracta Problematis reſolutione Poriſma, quod ex ipſa reſolutione deducitur, in formam Theorematis proponere, ac demonſtrare; demonſtratio fiet per repetitionem veſtigiorũ reſolutionis, directo ordine non retro-

C grado. Plurimis autem Problematibus poteſt ſatisfieri demonſtratione Poriſmatis tantum, præcipuè quando Problema numero explicandum eſt; exemplũ ſubijciam quo ſit res dilucidior. Itaque Poriſma proximè præcedens proponetur in formam Theorematis, & demonſtrabitur hac ratione.

Theorema.

Si recta linea ſecetur, ita vt rectangulum ſub partibus comprehenſum æquale ſit ei, quod à differentia partium fit quadrato, quadratum totius rectæ quintuplum erit quadrati differentiæ partium.



D SEcta ſit recta A B in F, ita vt rectangulum A F B æquale ſit quadrato differẽtiæ partium A F, F B.

Dico quadratum A B quintuplum eſſe quadrati differẽtiæ ipſarum partium A F, F B: à maiori enim parte, quæ ſit F B auferatur F E æqualis F A, reliqua E B erit differentia partium A F, F B. Et quoniam rectangulum A F B ponitur æquale quadrato E B, quadruplum rectãgulum A F B quadruplo quadrato E B æquale erit, ſed quadruplum rectangulum A F B *æquale eſt quadrato A B, minus quadrato E B, ergo quadratũ A B, minus quadrato E B, æquale erit quadruplo quadrato E B, addito vtriq; parti quadrato E B, quadratum A B æquale erit quintuplo quadrato E B, hoc eſt quadratũ A B, quintuplum erit quadrati E B. quod erat oſtendendum. Theor. 3.

MARINI GHETALDI DE RESOLVTIONE, & Compoſitione Mathematica.

LIBER SECVNDVS.

INTERDVM accidit fractionem magnitudini integræ æquari, eamq. oportere in ſua membra reſolui; ita vt ęqualitas in proportionem tranſmutetur: id enim plerumq; fieri expedit, ne plena in progreſſu reſolutionis ad ſolida, vel etiam ad plano-plana aſcendant. A Nam ſi fractio plana reducenda eſſet ad denominationem integram; manente inter partes ęqualitate, oporteret omnia plana tùm fractionem, tùm quibus ęquatur ipſa fractio ducere in denominatorem fractionis; quo onere, ęqualitas quidem non immutaretur; ſed plana ad ſolida, vel ad plano-plana aſcenderent, quibus in planorum Problematum reſolutionibus, & compoſitionibus non eſt vtendum ob rationes in ſcholio quinti Problematis libri primi allatas. B Scire autem oportet, non omnem fractionem poſſe in ſua membra reſolui, niſi eam cuius numerator reſolubilis eſt in duas magnitudines, quæ ductu ſuo efficiunt ipſum numeratorem. Dicendum igitur eſt quomodo fractio magnitudini integræ æqualis numeratorem habens reſolubilem in duas magnitudines, ductu ſuo ipſum numeratorem efficientes, reſoluatur in ſua membra, vt æqualitas in proportionem tranſmutetur.

Reſoluitur dicta fractio in ſua membra hac ratione. Denominator fractionis, & magnitudo integra, cui æquatur ipſa fractio, ponantur pro extremis quatuor proportionalium terminis; magnitudines verò, quę ductu ſuo efficiũt numeratorem, ponantur pro medijs, vel contra magnitudines numeratorem efficientes, ponantur pro extremis; denominator verò & magnitudo integra pro medijs, C ſeruata hac conditione, vt primus terminus & ſecundus ſint eiuſdem generis, quia magnitudines diuerſi generis non poſſunt inter ſe comparari. Conſtitui quatuor proportionales terminos quoniam & ſi tres etiam poſſunt conſtitui, medium pro duobus intelligo, is enim bis ſumitur. quæ igitur, vt fiãt euidentiora. Proponatur $\frac{B\ D}{Q}$ æquari A, & oporteat fractionem $\frac{B\ D}{Q}$ in ſua membra reſoluere, vt æqualitas in proportionem tranſmutetur. Fiant extremi termini D & A, medius vero B, eos autem proportionales eſſe

ma-

A manifeſtum eſt. nam cum ſit vt D ad B, ita B ad $\frac{BQ}{D}$, fractio autem $\frac{BQ}{D}$ æqualis A, erit, vt D ad B, ita B ad A. factum eſt igitur, quod imperabatur. Rurſus $\frac{BC}{A}$ æquetur D Q, & oporteat iuſſum facere. Fiant extremi termini A & D Q, medij vero B, & B Q, eos autem proportionales eſſe manifeſtum eſt, nam cum ſit vt A ad B, ita B Q ad $\frac{BC}{A}$, & $\frac{BC}{A}$ æqualis D Q, erit vt A ad B, ita B Q ad D Q. factum eſt igitur, quod oportebat.

Deinde $\frac{B \text{ in } D}{A}$ æquetur G, & ſit reſoluenda fractio, vt dictum eſt. Fiant extremi termini A & G, medij vero B & D. Quoniam igitur eſt, vt A ad B, ita D ad $\frac{B \text{ in } D}{A}$, & fractio $\frac{B \text{ in } D}{A}$ æqualis G, erit vt A ad B, ita D ad G.

Vel contra fiant extremi termini B & D, medij vero A & G. Quoniam
B igitur $\frac{B \text{ in } D}{A}$ ponitur æquari G, ductis omnibus in A, B in D æquabitur G in A, & æqualitate ad proportionem reuocata, erit vt B ad G, ita A ad D. fractio igitur $\frac{B \text{ in } D}{A}$, cui æquabatur G, reſoluta eſt in ſua membra, & æqualitas tranſmutata in proportionem, quod faciendum erat. Item $\frac{B \text{ in } D}{A + G}$ æquetur F, & oporteat iuſſum facere. Fiant extremi termini A + G & F, medij verò B & D, vel contra fiant extremi B & D, medij vero A + G & F, eos proportionales eſſe demonſtrabimus eadem ratione qua ſupra.

Amplius $\frac{B \text{ in } D \text{ in } G}{A}$ æquetur F Q, & oporteat iuſſum facere. Fiant extremi termini A, & F Q, medij vero B, & D in G, vel G, & B in D, vel etiam D & B in G. Quoniam igitur eſt, vt A ad B, ita D in G ad $\frac{B \text{ in } D \text{ in } G}{A}$ ipſaque fractio æqualis F Q, erit vt A ad B, ita D in G ad F Q, & reliqua demon-
C ſtrabuntur, vt ſupra. Similiter ſi medij termini ponantur pro extremis, extremi vero pro medijs, iidem proportionales erunt.

Item $\frac{B \text{ in } D + G \text{ in } D}{A}$ æquetur F, & oporteat iuſſum facere. Fiant extremi termini A, & F, medij vero B + G & D, vel contra. Quoniam igitur eſt, vt A ad B + G, ita D ad $\frac{B \text{ in } D + G \text{ in } D}{A}$ eaque fractio æqualis eſt F erit vt A ad B + G ita D ad F. Quare factum eſt quod imperabatur.

Sed $\frac{BQ - DQ}{G}$ æquetur A, & oporteat iuſſum facere. Ponantur pro extremis terminis G & A; pro medijs vero B + D & B — D, vel contra. Quoniam igitur eſt, vt G ad B + D, ita B — D ad $\frac{BQ - DQ}{G}$, ipſaque fractio æqualis eſt A; erit vt G ad B + D, ita B — D ad A. Quare factum eſt quod oportuit.

Vel $\frac{BQ + DQ + B \text{ in } D\ 2}{A}$ æquetur F, & oporteat facere, quod imperatum eſt:
D Fiant extremi termini A & F, medius verò B + D, eos autem proportionales eſſe manifeſtum eſt, nam cum ſit, vt A ad B + D, ita B + D ad $\frac{BQ + DQ + B \text{ in } D\ 2}{A}$, ipſaque fractio æqualis ſit F, erit vt A ad B + D, ita B + D ad F. Factum eſt igitur quod oportebat.

Denique $\frac{BQ \text{ in } DQ}{GQ}$ æquetur A Q, & oporteat facere, quod imperatum eſt; Fiant extremi termini G Q, & A Q medius vero B in D. Quoniam igitur eſt, vt G Q ad B in D, ita B in D ad $\frac{BQ \text{ in } DQ}{GQ}$, ipſaque fractio æqualis eſt A Q, erit vt G Q ad B in D, ita B in D, ad A Q. factum eſt igitur quod imperabatur.

Vel fiant extremi termini, vt prius G Q, & A Q, medij verò B Q, & D Q. Eadem ratione oſtendetur, vt G Q ad B Q, ita eſſe D Q ad A Q. factum eſt igitur quod oportebat. A

Item $\frac{D \text{ in } G Q}{D - G}$ æquetur B Q, & oporteat iuſſum facere. Fiant extremi termini D — G, & B Q, medij verò D, & G Q. eadem ratione qua ſupra oſtendetur, vt D — G ad D, ita eſſe G Q ad B Q.

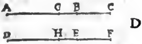
Vel fiant medij termini G, & D in G. Quoniam igitur eſt, vt D — G ad G, ita D in G ad $\frac{D \text{ in } G Q}{D - G}$ ipſaque fractio æqualis eſt B Q; erit vt D — G ad G, ita D in G ad B Q. factum eſt igitur quod oportebat.

Eadem ratione omnes aliæ fractiones, quæ magnitudini integræ æquantur, numeratoremq. habent reſolubilem in duas magnitudines, quæ ductu ſuo efficiunt ipſum numeratorem; poterunt in ſua membra reſolui, vt æqualitas in proportionem tranſmutetur. Atque hæc quidem de tranſmutatione æqualitatis in proportionem per reſolutionem fractionis ſufficiant. B

Fractiones autem quarum numerator non eſt reſolubilis, vt dictum eſt, non poſſunt in ſua membra reſolui; poterit tamen æqualitas in proportione tranſmutari hac ratione. Denominator fractionis, & magnitudo integra, cui ipſa fractio æquatur, ponantur pro extremis trium proportionalium terminis; latus vero vniuerſale numeratoris, ponatur pro medio. Exempli gratia proponatur $\frac{B \text{ in } D + F \text{ in } G}{H}$ æquari A, & oporteat æqualitatem in proportionem tranſmutare. Ponantur pro extremis terminis H & A; pro medio vero ponatur L. V. B in D + F in G. Eos autem proportionales eſſe manifeſtum eſt; nam cum ſit vt H ad L. V. B in D + F in G, ita idem L. V. B in D + F in G ad $\frac{B \text{ in } D + F \text{ in } G}{H}$ ipſaque fractio æqualis ſit A, erit vt H ad L. V. B in D + F in G, ita idem L. V. B in D + F in G. ad A. factum eſt igitur quod oportebat. C

Theorema I.

Si ſecentur duæ rectæ lineæ æquales, ita vt rectangulum ſub partibus vnius æquale ſit rectangulo ſub partibus alterius; partes vnius partibus alterius æquales erunt, maior videlicet maiori, minor minori.



Secentur duæ rectæ A B, C D æquales in G H, ſitq. rectangulum A G B æquale rectangulo C H D. Dico partes A G, G B partibus C H H D æquales eſſe, maiorem videlicet maiori, minorem minori. Secetur enim vtraque A B, C D biſariam in punctis E F. Quoniam igitur ſectæ ſunt A B, C D in æqualia & non æqualia, rectangulum A G B vna cum quadrato E G* æquale eſt quadrato A E. Similiter & rectangulum C H D vna cum quadrato F H* æquale quadrato C F, quæ quidem quadrata A E, C F æqualia ſunt cum ſint æquales rectæ A E, C F, ergo rectangulum A G B vnà cum quadrato E G æquale erit rectangulo C H D vnà cum quadrato F H; auferantur æqualia rectangula A G B, C H D, ergo reliquum quadratum E G reli-

* 5 ſecundi.
* 5 ſecundi.

A reliquo quadrato F H æquale erit, vnde & recta E G æqualis rectæ F H, & per additionem, vel ſubductionem æqualium æqualibus, erit A G æqualis C H, & G B æqualis H D, quod erat oſtendendum.

Theorema I I.

Si duæ rectæ lineæ æquales ſectæ fuerint, atque quadrata partium vnius ſimul ſumpta, æqualia fuerint quadratis partium alterius ſimul ſumptis, partes vnius partibus alterius æquales erunt, maior maiori, minor minori.

DVæ rectæ A B, C D æquales ſecentur in punctis G H, & ſint quadrata A G, G B



B æqualia quadratis C H, H D. Dico partes A G, G B partibus C H, H D æquales eſſe maiorem maiori, minorem minori. Secetur enim vtraque A B, C D bifariam in E F. Quoniam igitur quadrata A G, G B * dupla ſunt quadratorum A E, 9 ſecundi.
E G, & quadrata C H, H D * dupla quadratorum C F, F H, erunt quadrata 9 ſecundi.
A E, E G quadratis C F, F H æqualia; ſed quadratum A E æquale eſt quadrato C F, ergo & reliquum quadratum E G reliquo quadrato F H æquale erit; vnde & recta E G æqualis rectæ F H; quare per additionem æqualium æqualibus, erit & A G æqualis C H, & reliqua G B æqualis reliquæ H D. Quare conſtat propoſitum.

C

Theorema I I I.

Si à duabus rectis lineis abſcindantur partes æquales, & rectangulum ſub tota, & parte reliqua vnius æquale ſit rectangulo ſub tota, & reliqua parte alterius; tota toti, & reliqua pars, reliquæ æqualis erit.

ARectis A B, C D abſcindantur partes æquales B E, D F, ſitq. rectangulũ B A E æquale rectãgulo D C F. Dico A B, C D æquales eſſe, & æquales A E, C F. Secentur enim E B,



F D bifariam in G H. Quoniã igitur rectangulum B A E ponitur æquale rectangulo D C F, & quadratum E G æquale eſt quadrato F H, rectan-
D gulum B A E vnà cum quadrato E G æquale erit rectangulo D C F vnà cum quadrato F H; ſed quoniam ſectæ ſunt E B, F D bifariam, & ipſis in rectum adiectæ ſunt E A, F C, rectangulum B A E vnà cum quadrato E G, * æquale eſt quadrato A G. ſimiliter, & rectangulum D C F vnà 6 ſecundi.
cum quadrato F H * æquale quadrato C H; quadratum igitur A G æqua- 6 ſecundi.
le erit quadrato C H vnde & recta A G æqualis rectæ C H, & additis æqualibus G B, H D tota A B æqualis erit toti C D, vel ablatis æqualibus E G, F H, reliqua E A, reliquæ F C æqualis erit. quod erat oſtendendum.

Theorema. IV. A

Si à duabus rectis lineis abſcindantur partes æquales, & ſit reliqua pars primæ ad reliquam ſecundæ, vt tota ſecunda ad totam primam; reliquæ quoque partes æqua'es erunt.



A Rectis A B, C D abſcindantur partes æquales B E, D F; ſitque A E ad C F, vt C D ad A B. Dico A E, C F æquales eſſe. Quoniam enim ponitur A E ad C F, vt C D ad A B; re-
16 ſexti ctangulum B A E ſub extremis* æquale erit rectangulo D C F ſub medijs; ponuntur autem & partes E B, F D æquales, ergo ex antecedente Theoremate reliqua pars A E, reliquæ C F æqualis erit. B

Theorema. V.

Si duo rectangula fuerint æqualia; fuerint autem & quadrata laterum primi æqualia quadratis laterum ſecundi. Latera primi lateribus ſecundi æqualia erunt, maius videlicet maiori, minus minori.

Theorema hoc demonſtraui in libro variorum hic quoque eamdem demonſtrationem t. anſferam.



Sint æqualia rectangula A B C, D E F, & æqualia quoque quadrata A B, B C ſimul ſumpta quadratis D E, E F ſimul ſumptis. Dico rectas A B, B C rectis D E, E F æquales eſſe, maiorem videlicet maiori, minorem minori. C

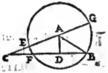
Quoniam enim ponuntur æqualia rectangula A B C, D E F, ea quoque dupla æqualia erunt, ſed & quadrata A B, B C ponuntur æqualia quadratis
4 ſecundi D E, E F, ergo quadrata A B, B C vna cum duplo rectangulo A B C, hoc* eſt quadratum A C æquale erit quadratis D E, E F vnà cum duplo rectangulo
4 ſecundi D E F, hoc eſt* æquale erit quadrato D F; quare, & recta A C æqualis erit, rectæ D F. Secentur autem ipſæ A C, D F bifariam in G, & H. erunt igi-
5 ſecundi tur A G, D H æquales, & æqualia eorum quadrata, ſed quadratum A G* æquale eſt rectangulo A B C vnà cum quadrato G B, & quadratum D H* æ- D quale rectangulo D E F vnà cum quadrato H E, ergo rectangulum A B C vna cum quadrato G B, æquale erit rectangulo D E F, vna cum quadrato H E, demptis æqualibus rectangulis A B C, D E F, reliquum quadratum G B, reliquo quadrato H E æquale erit, vnde & recta G B æqualis rectæ H E, & per additionem, & ſubductionem æqualium æqualibus erit A B æqualis D E, & B C æqualis E F, quod erat oſtendendum.

Theo-

A

Theorema VI.

Rectangulum ſub differentia crurum trianguli, & aggregato eorundem, æquale eſt rectangulo ſub differentia ſegmentorum baſis, & ipſa baſe.



SIt triangulum D B C, in quo perpendicularis A D ſecet baſim B C in duo ſegmenta B D, D C, & cētro A interuallo A B vnius crurum deſcribatur circulus ſecans alterum erit A C etiam productum hinc inde in punctis E G; baſim vero B C in F. crurum igitur A B, A C differentia erit C E; aggregatum verò
B G C, differentia autem ſegmentorum A D, D C erit C F, * ſunt enim B D, D F æquales. Dico rectangulum E C G æquale eſſe rectaugulo F C B, hoc manifeſtum eſt ex propol. 36. & 35. tertij elementorum.



Theorema VII.

Differentia crurum trianguli ſe habet ad differentiam ſegmentorum baſis; vt baſis ad aggregatum crurum.

REſumatur antecedentis Theorematis figura. Dico E C ad C F eſſe vt C B ad C G. Quoniam enim rectangulum E C G * equale eſt 36. & 35. tertij 36 tenti
C rectangulo F C B, proportionales erunt E C, C F, C B, C G. quare conſtat propoſitum.

Problema I.

Dato quadrato, æquale rectangulum inuenire, cuius latera datam teneant rationem.

SIt datum B quadratum, cui æquale oporteat rectangulum inuenire habens latera in ratione, vt R ad S. Sit iam inuentum rectangulum illud, eiusque latus primum eſto A; ergo latus ſecundum erit $\frac{S \text{ in } A}{R}$; eſt enim vt R ad S, ita A latus primum ad latus ſecundum. At rectangulum ſub late-
D ribus ponitur æquale B quadrato, ergo

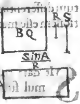
$$\frac{S \text{ in } AQ}{R} \text{ æquabitur } BQ$$

Reſoluatur fractio $\frac{S \text{ in } AQ}{R}$ in ſua membra, vt æqualitas in proportionem tráſmutetur, quemadmodum in principio huius libri docuimus, ergo proportionales erunt

R S AQ BQ

Et conuertendo proportionales erunt

S R BQ AQ



Poriſma.

Vt terminus ſecundus rationis datæ ad terminum primum, ita eſt quadratum datum ad quadratum lateris primi rectanguli de quo quæritur. Datur ergo latus primum rectanguli quæſiti.

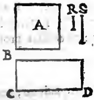
Alia eiuſdem Problematis Reſolutio.

Latus primum rectanguli eſto A. Quoniam igitur in omni rectangulo eſt, vt latus primum ad latus ſecundum, ita quadratum lateris primi ad ipſum rectangulum; ſunt enim eiuſdem altitudinis, cum ſit vtriuſq; altitudo latus primum, latus autem primum rectanguli quæſiti ad latus ſecundum ponitur vt R ad S; ergo vt R ad S ita erit A Q ad rectangulum quæſitum, hoc eſt ad B Q: huic enim ponitur æquale rectangulum illud, & conuertendo erit

vt S ad R ita BQ ad A Q.

Datur ergo latus primum rectanguli quæſiti, idq. in eadem ratione atque in antecedenti Reſolutione.

Compoſitio.



Sit dato quadrato A, æquale rectangulum inueniendũ, cuius latera ſint, vt R ad S. Fiat vt S ad R, ita quadratum A ad aliud quadratum, cuius latus ſit B C, deinde vt R ad S, ita fiat B C ad aliam, quæ ſit C D, & ex B C, C D fiat rectangulum B D. Sic fieri docet vtraque reſolutio. Demonſtratio autem fiet per earum regreſſum; idem enim eſt vtriuſque reſolutionis progreſſus. Quoniam igitur eſt vt S ad R, ita quadratum A ad quadratum B C, ex conſtructione, erit conuertendo, vt R ad S, hoc eſt vt B C ad C D, ita quadratum B C ad quadratum A; ſed vt B C ad C D, ita eſt quadratum B C ad rectangulum B D, cum ſint eiuſdem altitudinis B C; ergo rectangulum B D quadrato A æquale erit, atque eſt B C ad C D, vt R ad S, ex conſtructione. Inuentum eſt igitur rectangulum B D, æquale inueniendum proponebatur.

Problema II.

Datam rectam lineam ſecare, vt partium quadrata ſimul ſumpta, ad quadratum differentiæ partium, rationem habeant datam. Oportet autem datam rationem eſſe maioris ad minus.

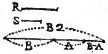
Reſolutio.

Sit data recta linea B 2 ſecanda in duas partes, quarum quadrata ſimul ſumpta, ad quadratum differentiæ partium, rationem habeant

vt

A vt R ad S, maioris nempe ad minus.

Sit iam ſecta, vt petitur, & dimidia differentia partium eſto A, ergo B + A erit pars maior, & B — A pars minor, harum partium quadrata ſimul ſumpta ad quadratum differentiæ partium, rationem habent, vt R ad S, ſed quadratum ex B + A eſt B Q + A Q + B in A 2, quadratum verò ex B — A eſt B Q + A Q — B in A 2. eorum ſumma eſt B Q 2 + A Q 2. Quadratum autem totius differentiæ partium eſt A Q 4, dimidia enim differentia ponitur A; itaque tota differentia eſt A 2, eius quadratum A Q 4, ergo erit



Corol. 2. Probl. 1. lib. 2.

vt R ad S ita B Q 2 + A Q 2, ad A Q 4

B Et duplatis antecedentibus, erit vt R 2, ad S, ita B Q 4 + A Q 4, ad A Q 4, & ita B Q + A Q ad A Q.

Eſt enim eadem ratio ſimpli ad ſimplum, quæ quadrupli ad quadruplum. denique diuidendo erit

vt R 2 — S ad S ita B Q ad A Q.

Poriſma.

Vt exceſſus quo primus rationis datæ terminus duplus ſuperat ſecundum, ad ipſum ſecundum, ita eſt quadratum dimidiæ datæ, ad quadratum dimidiæ differentiæ partium.

C Datur ergo dimidia differentia partium, de qua quæritur.

Compoſitio.

Sit data recta linea A B ſecanda in duas partes, quarum quadrata ſimul ſumpta, ad quadratum differentiæ partium ſint, vt E F ad F C, quarum E F ſit maior. Dupliceturf F E in H, & in F H deſcribatur ſemicirculus, in quo erigatur ex G perpendicularis G K, vſque ad circumferentiam: deinde ſecetur A B bifariam in C, & fiat vt H G ad G K, ita A C ad aliam, quæ ſit C D. Secta eſt igitur A B ſicuti Poriſma docet. Nam cum ſit H G ad G K, vt A C ad C D, erit



D & quadratum H G ad quadratum G K, ſicut quadratum A C ad quadratum C D. Sed quadratum H G ad quadratum G K eſt vt H G ad G F, ergo vt H G ad G F, ita erit quadratum A C ad quadratum C D; quod Poriſma requirit. Nunc oſtendendum eſt, quadrata partium A D, D B ad quadratum differentiæ earumdem, rationem habere, vt E F ad F G. id autem ex reſolutionis regreſſu, ita fit manifeſtum.

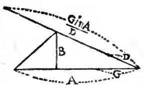
Ponatur ipſi C D æqualis C I, & cùm ſint æquales C B, C A fiunt æquales, & reliquæ B D, A I, vnde differentia partium A D, D B erit I D. Et quoniam oſtenſum eſt, vt H G ad G F, ita eſſe quadratum A C ad quadratum A D, erit componendo, vt H F ad F G, ita quadrata A C, C D ad quadratum

tum C D, & ita quadruplum quadratorum A C, C D ad quadruplum quadrati C D; eſt enim eadem ratio quadrupli ad quadruplum, quæ ſimpli ad ſimplum, & ſub duplatis antecedentibus erit, vt E F ad F G, ita duplum quadratorum A C, C D ad quadruplum quadrati C D, hoc eſt ad quadratum I D; ſed cum A B ſecta ſit in æqualia in C, & non æqualia in D, qua- A
9. ſecundi drata A D, D B, * dupla ſunt quadratorum A C, C D, ergo vt E F ad F G, ita erunt quadrata A D, D B ad quadratum I D. Secta eſt igitur A B data in D, vt problema poſtulat, quod erat faciendum.

Problema III.

Data perpendiculari, differentia crurum trianguli, & differentia ſegmentorum baſis, inuenire triangulum. B

Reſolutio.



Sit data perpendicularis trianguli B, differentia crurum D, & differentia ſegmentorum baſis G. Oportet inuenire triangulum.

Ponatur inuentum eſſe & baſis ipſius trianguli eſto A. Quoniam igitur eſt, vt D ad G, ita A ad $\frac{G \text{ in } A}{D}$ erit $\frac{G \text{ in } A}{D}$ aggregatum cru-
Theor. 7. eius rum, eſt * enim, vt differentia crurum ad differentiam ſegmentorum baſis, ita baſis ad aggregatum crurum. C

Et quoniam quadratum aggregati crurum vnà cum quadrato differentiæ
Theor. 4. primi eorumdem * dupla ſunt quadratorum è cruribus, ergo

$\frac{G Q \text{ in } A Q}{D Q} + D Q$ æquabuntur quadratis crurum bis.

Quadrata autem crurum bis * æqualia ſunt quadratis ſegmentorum bis,
47. primi plus quadrato perpendicularis quater, ergo

$\frac{G Q \text{ in } A Q}{D Q} + D Q$ æquabuntur quadratis ſegmentorum bis plus $B Q\, 4$

Theor. 4. primi Sed quadrata ſegmentorum bis * æqualia ſunt quadrato baſis vnà cum quadrato differentiæ ſegmentorum baſis, ergo

$\frac{G Q \text{ in } A Q}{D Q} + D Q$ æquabuntur $A Q + G Q + B Q\, 4$.

Auferantur vtrinque A Q, & D Q, vt cognita ab incognitis ſeparentur, D
ergo

$\frac{G Q \text{ in } A Q}{D Q} - A Q$ æquabitur $B Q\, 4 + G Q - D Q$

Hoc eſt $\frac{G Q \text{ in } A Q - D Q \text{ in } A Q}{D Q}$ æquabitur $B Q\, 4 + G Q - D Q$, eſt enim $\frac{D Q \text{ in } A Q}{D Q}$ idem quod A Q; nam A Q ductum in D Q, eidemque D Q applicatum nullam excipit alterationem, quoniam quod ſuperefficit ductio, idem reſoluit applicatio.

Seu quod idem eſt $\frac{G Q - D Q \text{ in } A Q}{D Q}$ æquabitur $B Q\, 4 + G Q - D Q$

Reſoluatur fractio $\frac{G Q - D Q \text{ in } A Q}{D Q}$ in ſua membra, ita vt æqualitas in pro-

por-

A portionem tranſmutetur, vt in principio huius libri docuimus, quo facto proportionalia erunt plana.

GQ—DQ BQ4 + GQ—DQ DQ AQ

Atque eorum radices proportionales erunt.

L. V. GQ — DQ, L. V. BQ4. + GQ — DQ, D, A

Poriſma.

Vt recta, cuius quadratum æquale eſt exceſſui, quo quadratum differentiæ ſegmentorum baſis trianguli ſuperat quadratum differentiæ crurum, ad rectam cuius quadratum æquale eſt quadrato perpendicularis duplæ, vnà cum prædicto quadratorum exceſſu, ita eſt differentia crurum, ad baſim.

B Datur ergo quæſita trianguli baſis.

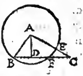
Ex Poriſmate apparet, differentiam ſegmentorum baſis maiorem eſſe differentia crurum, eo quod quadratum differentiæ ſegmentorum maius eſt quadrato differentiæ crurum.

Similiter apparet, priorem rectam in Poriſmate nominatam ad poſteriorem, minorem rationem habere quàm differentiam crurũ ad differentiã ſegmentorũ baſis; Poriſma enim indicat, priorem rectam ad poſteriorẽ, ſe habere vt differentia crurum, ad baſim. Hæc omnia demonſtranda ſunt, atq; Problemati præfigendæ determinationes; ne data fortuitò, vel etiam de induſtria exponantur, ex quibus Problema conſtrui non poſſet.

C
Lemma I.

Differentia ſegmentorum baſis trianguli maior eſt quàm differentia crurum.

IN triangulo ABC perpendicularis AD, ſecet baſim in duo ſegmenta BD, DC, & centro A interuallo AB vnius crurũ deſcribatur circulus ſecans crus AC, etiam ſi opus fuerit productũ in E, baſim verò BC etiã productam in F; crurum igitur AB, AC differentia erit EC, differentia vero ſegmentorum BD, DC erit FC, ſunt enim BD, DF * æquales. Dico FC maiorem eſſe quàm EC; nã cùm recta AC tranſeat per centrũ, baſis verò BC ſecus, recta FC D * maior eſt quàm CE, quod erat oſtendendum.



3 tertij

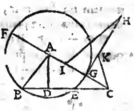


8 tertij & 7 tertij

Lemma II.

IN omni triangulo recta, cuius quadratum æquale eſt exceſſui, quo quadratum differentiæ ſegmentorũ baſis ſuperat quadratum differentiæ crurũ, ad rectam cuius quadratum æquale eſt quadrato perpendicularis duplæ, vnà cum eodẽ quadratorum exceſſu, minorem rationẽ habet, quàm differentia crurum ad differentiã ſegmentorum baſis. Eſto triangulum ABC, in quo perpendicularis AD: & centro A, interuallo AB cruris minoris, deſcribatur circulus ſecans baſim trianguli in E, crus ma-

ius in G, differentia igitur ſegmentorum B D, DC erit E C; differentia vero crurum BA, AC erit GC. Deinde ex G erigatur perpendicularis G H, in qua ponatur C K æqualis C E, & ſumatur G I æqualis G K, & fiat G H dupla ipſius A D, & iungatur I H. Quadratum igitur C K hoc eſt CE ſuperat quadratum G C quadrato G K, vel G I, & quadratum I H æquale eſt quadratis G H, G I: hoc eſt quadrato perpendicularis duplæ, & exceſſui quadratorum E C, G C. Dico igitur G I ad I H minorem rationẽ habere quam G C ad C E. Producatur enim C A vſq; A



Theor. 4 primi ad circumferentiã circuli in F. Quoniam igitur quadrata F C, C G* æqualia ſunt duplo quadratorum F A, A C, duplum autem quadratorum F A, A C B

47 primi duplum autem quadratorum F A, A C hoc eſt B A, A C* æquale eſt duplo quadratorum B D, D C vnà cum quadruplo quadrati A D; ideo quadrata F C, C G, æqualia erunt duplo quadratorum B D, D C vnà cum quadruplo quadrati A D, hoc eſt vna cum quadrato H G, ſed duplum quadratorum BD, DC

Theor. 4 primi * æquale eſt quadratis B C, C E, ergo quadrata F C, C G æqualia erunt quadratis B C, C E, H G, auferantur vtrinque quadrata B C, C G, ergo quadratũ F C minus quadrato B C æquale erit quadratis H G, C E, minus quadrato C G, ſed quadratum C E minus quadrato C G, hoc eſt quadratum C K, minus quadrato C G. idem valet, quod quadratum G K, vel G I; ergo quadratum F C, minus quadrato C B, æquabitur quadratis H G, G I hoc eſt quadrato H I.

Et quoniã eſt E C, vel C K ad C G, vt C F ad C B, erit & quadratum C K ad quadratum C G, vt quadr. C F ad quadratũ C B; & diuidendo, vt quadratũ C K, minus quadrato C G, hoc eſt, vt quadratũ G K, vel G I ad quadratum C G, ita erit quadratum F C, minus quadrato C B, ad quadratũ C B; ſed quadratũ F C, minus quadrato C B, oſtenſum eſt æquale quadrato H I, ergo vt quadratũ G I ad quadratũ G C, ita erit quadratũ H I ad quadratũ C B, & permutando, vt quadratũ G I ad quadratũ I H, ita erit quadratũ G C ad quadratũ C B, & conſequenter, vt G I ad I H, ita G C ad C B, ſed G C ad C B minorẽ rationẽ habet, quàm eadẽ G C ad C E, ergo & G I ad I H minorẽ rationem habebit, quàm G C ad C E, quod erat oſtendendum. C

Hæc demonſtratio procedit per reſolutionis filum, directo tamen ordine, non retrogrado; hic enim non oſtenditur conſtructio Problematis, ſed propoſito Theoremate, concluſio eius demonſtratur; Poriſmata enim, quæ ex reſolutionibus Problematum deducuntur in formam Theorematis propoſita, eodem demonſtrantur ordine, quo ipſa Problemata reſoluuntur; vt memorauimus in Scholio Theorematis, quod Problema ſeptimum primi libri ſubſequitur. D

Demonſtratis igitur quæ ad determinationem Problematis pertinent, Problema ita determinandum erit.

A

Determinatio I.

Oportebit, differentiam ſegmentorum baſis maiorem eſſe differentia crurum.

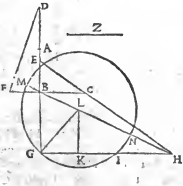
Determinatio II.

Oportebit quoque, rectam, cuius quadratum æquale eſt exceſſui, quo quadratum differentiæ ſegmentorum baſis ſuperat quadratum differentiæ crurum, ad rectam cuius quadratum æquale eſt quadrato perpendicularis duplæ, vna cum eodem quadratorum exceſſu, minorem ra-
B tionem habere, quàm differentiam crurum ad differentiam ſegmentorum baſis. Sed in ſimpliciorem formam poteſt hæc ſecunda determinatio ita reduci.

Oportebit quoque, duplam perpendicularem maiorem rationem habere ad rectam, cuius quadratum æquale eſt prædicto quadratorum exceſſui, quàm eamdem rectam, ad differentiam crurum. Huius autem reductionis demonſtratio ita ſe habet.

Quoniam enim oſtenſum eſt, G I ad I H minorem rationem habere, quàm G C ad C E; conuertendo H I ad I G* maiorem rationem habebit, quàm E C ad C G, & conſequenter quadratum H I ad quadratum I G, maiorem rationem habebit, quàm quadratum E C ad quadratum C G & diuidendo qua-
C dratum H I, minus quadrato I G hoc eſt quadratum H G ad quadratum G I maioré rationem habebit, quàm quadratum E C, minus quadrato C G, hoc eſt, quàm quadratum C K, minus quadrato C G; ſeu quod idem eſt, quàm quadratum I G ad quadratum G C. vnde & recta H G ad rectam G I maiorem habebit rationem, quàm eadem G I ad G C. quare conſtat determinatio.

Compoſitio Problematis.



Sit data perpendicularis trianguli A B; differentia crurum B C, & differentia ſegmentorũ baſis Z. Oportet inuenire triangulũ. Inclinen-
D tur ad rectos angulos A B, BC, ipſaque BA duplicetur in D, & in eam etiam ſi opus fuerit productã ponatur C E æqualis Z. eſt aute Z maior, quàm B C ex determinatione prima; quadratũ igitur E C ſuperat quadratum B C quadrato E B; itaq; recta E B ponenda eſt pro prima quatuor proportionalium; Sic Iorifma iubet. Deinde, producta C B in F, vt ſit B F æqualis B E iungatur F D. quadratum igitur F E æqua-

le eſt quadratis B D, B F, hoc eſt, quadrato perpendicularis duplæ, & qua- A
drato B E, quod eſt exceſſus quadratorum E C, B C; itaque recta F D de-
bet fieri ſecunda quattuor proportionalium tertia B C, & quærenda eſt quarta,
ſic habetur ex Poriſmate. Producatur igitur E B in G, vt ſit E G æqualis
D F ipſi autem B C parallela agatur G H occurrens E C continuatæ in H. vt
igitur E B ad E G, ita erit B C ad G H; atque adeo inuenta eſt quarta pro-
portionalis G H; ea debet fieri baſis trianguli conſtruendi, ex præcepto Poriſ-
matis. ab ipſa igitur G H abſcindatur H I æqualis Z. eſt autem Z minor,
quàm G H; nam cum ſit E B ad E G ſicut B C ad G H, E B autem ad E G,
ex determinatione minorem rationem habet, quàm B C ad Z, ergo & B C
8 quinti ad G H minorem rationem habet quàm eadem B C ad Z, vnde Z* minor eſt,
quàm G H. Denique ſecetur I G bifariam, & ad rectos angulos in K à recta B
K L æquali ipſi B A, & iunctis G L, L H conſtitutum erit triangulum L G H,
quemadmodum Poriſma docet. eſt enim vt E B ad E G, ita B C ad G H,
hoc eſt vt recta, cuius quadratum æquale eſt exceſſui quadratorum E C, B C
ad rectam, cuius quadratum æquale eſt quadrato perpendicularis duplæ, vnà
cum eodem exceſſu quadratorum, ita eſt differentia crurum ad baſim. Nunc
oſtendendum eſt, in eo triangulo eſſe ea quæ requiruntur.

Primum perpendicularis L K æqualis eſt A B ex conſtructione. deinde I H
differentia ſegmentorum baſis G K, K H æqualis Z, pariter ex conſtructione;
ſupereſt igitur, vt differentia crurum L G, L H æquetur ipſi B C; id autem re-
petendo reſolutionis veſtigia, ita fiet manifeſtum.

Centro L interuallo L G deſcribatur circulus ſecans H L continuatam in C
punctis M N. differentia igitur crurum L G, L H erit H N, & circulus M G N
3 tertij tranſibit per I, ſunt enim G K, K I* æquales, & L K perpendicularis eſt ipſi
47. primi G I. Quoniam igitur quadratum E H, minus quadrato H G* æquale eſt qua-
drato E G, vel D F, hoc eſt* quadratis D B, B F, ſeu quod idem eſt quadrato L K
47 primi quater, & quadrato B E, hoc * eſt & quadrato E C minus quadrato B C. addi-
tis vtrobique quadratis G H, B C cùm ſint dempta in reſolutione; quadrata
E H, B C æqualia erunt quadrato L K quater vnà cum quadratis G H, & E C,
hoc eſt & I H, ſed quadrata G H, I H * æqualia ſunt quadratis G K, K H bis;
Theor. 4 primi ergo quadrata E H, B C æqualia erunt quadratis G K, K H bis vnà cum qua-
47 primi drato L K quater, ſed quadrata G K, K H bis vnà cum quadrato L K quater *
æqualia ſunt quadratis G L, L H bis, ſeu M L, L H bis; ergo quadrata E H, D
Theor. 4 primi B C æqualia erunt quadratis M L, L H bis, quadrata autem M L, L H bis, *
æqualia ſunt quadratis M H, N H, ergo quadrata E H, B C, quadratis M H, N H
æqualia erunt.

Et quoniam propter ſimilitudinem triangulorum E C B, E H G eſt vt B C
36 tertij ad C E, hoc eſt ad I H, ita G H ad H E, rectangulum ſub extremis B C, H E
æquale erit rectangulo I H G ſub medijs, hoc eſt* rectangulo M H N, ſed &
quadrata E H, B C oſtenſa ſunt æqualia quadratis M H, H N ergo M H ipſi
Theor. 5 huius E H * æqualis erit, & N H ipſi B C. quod erat oſtendendum. Conſtructum
eſt igitur triangulum L G H, &c. quod faciendum erat.

CON-

A

CONSPECTVS RESOLVTIONIS, ET COMPOSITIONIS.

Initium Reſolutionis.		Finis Compoſitionis.
	VBC, HB	hoc eſt VMHN / V I HG
D G A $\frac{G \text{ in } A}{D}$ B C	hoc eſt I H / C E	G H H E
B Et 9 m. quad. ex $\frac{G \text{ in } A}{D}$ plus quad. ex. D	† 9 B C / ergo 9 E H	† 9 N H / 9 M H
Theo. 4. pr. * dupla ſunt quadratorum à cruribus	† 9 L H 2 / ſed 9 L G 2	† 9 N H / 9 M H Theo. 4. pr.
Ergo $\frac{GQ \text{ in } AQ}{DQ}$ † DQ æqualia erunt quadratis crurum bis	† 9 B C / ergo 9 E H	† 9 L H 2 / 9 G L 2
47 pr. Sed quadrata crurũ bis* æqualia ſũt quadratis ſegmẽtorũ bis vnà cũ quadrato ꝑpẽdicularis quater	† 9 L K 4 / † 9 K H 2 / ſed 9 G K 2	† 9 L H 2 / 9 G L 2 47 primi
Ergo $\frac{GQ \text{ in } AQ}{DQ}$ † DQ æqu. quadratis ſegmẽtorũ bis plus BQ 4	† 9 B C / ergo 9 E H	† 9 L K 4 / † 9 KH 2 / 9 GK 2
C Sed quadrata ſegmẽtorũ bis æqualia ſũt quad. baſis plus quad. differentiæ ſegmentorum (Theo. 4. pr.)	† 9 I H / ſed 9 G H	† 9 K H 2 / 9 G K 2 Th. 4. pr.
Ergo $\frac{GQ \text{ in } AQ}{DQ}$ † DQ æqu. A. Q † GQ † BQ 4	† 9 B C / 9 E H	hoc eſt † 9 I H / † 9 E C / † 9 G H / 9 L K 4
auferatur vtrinque AQ, & DQ		addantur quadrata G H, & B C
Ergo $\frac{GQ \text{ in } AQ}{DQ}$ — AQ æqu. BQ 4 † GQ — DQ		hoc eſt — 9 B C / † 9 E C / † 9 E B
hoc ẽ $\frac{GQ \text{ in } AQ - DQ \text{ in } AQ}{DQ}$ æq. BQ 4 † GQ — DQ		ſeu 9 L K 4
D ſeu $\frac{GQ - DQ \text{ in } AQ}{DQ}$ æqu. BQ 4 † GQ — DQ	— 9 G H / 9 E H	† 9 B F / hoc eſt 9 D B 47 primi / vel 9 D F / — 9 E G 47 primi

Reſol. fract. GQ — DQ, BQ 4 † GQ — DQ, DQ AQ

L.V. GQ — DQ, L.V. BQ 4 † GQ — DQ, D A   **Initium Compoſitionis**

Finis Reſolutionis.

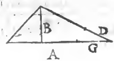
 A

Scholium.

Vltima fractio $\frac{GQ - DQ \text{ in } AQ}{DQ}$ reſpondet in compoſitione quadrato E G, nam cùm ſit, vt D Q ad G Q — D Q, ita A Q ad $\frac{GQ - DQ \text{ in } AQ}{DQ}$, quod quidem in compoſitione eſt, vt quadratum B C ad quadratum E C minus quadrato B C; ita quadratum G H ad quadratum E G; quadratum igitur E G idem eſt, quod fractio $\frac{GQ - DQ \text{ in } AQ}{DQ}$.

Similiter fractio $\frac{GQ \text{ in } AQ}{DQ}$ — A Q reſpondet in compoſitione quadrato E G; nam cùm ſit, vt D Q ad G Q, ita A Q ad $\frac{GQ \text{ in } AQ}{DQ}$, quod eſt in compoſitione, vt quadratum B C ad quadratum E C, ita quadratum G H ad quadratum E H, erit quadratum E H idem quod fractio $\frac{GQ \text{ in } AQ}{DQ}$, & conſequenter $\frac{GQ \text{ in } AQ}{DQ}$ — A Q reſpondebit in compoſitione quadrato E H, minus quadrato G H; hoc eſt reſpondebit quadrato E G, quemadmodum & vltima fractio $\frac{GQ - DQ \text{ in } AQ}{DQ}$. B

Demonſtratio autem ſumit initium ab æqualitate quæ eſt inter fractionem $\frac{GQ \text{ in } AQ}{DQ}$ — A Q, & B Q 4 ✠ G Q — D Q, non autem à proportione, in quam per reſolutionem fractionis tranſmutata fuit ipſa æqualitas, deſijtque reſolutio Problematis; nam cùm in ipſa æqualitate inſit, ex vi fractionis proportio, per quam ordinata eſt Problematis conſtructio, ſatis eſt ab ipſa æqualitate demonſtrationem inchoauiſſe. Alia eiuſdem Problematis Reſolutio, in qua progreſſus quidem ſimplicior eſt, breuiorq. operatio autem paulo operoſior ob multiplicationem fractionis, per magnitudinem integram. C



Sit igitur data perpendicularis trianguli B differentia crurum D, & differentia ſegmentorum baſis G. Oportet inuenire triangulum.

Factum iam ſit, & baſis ipſius trianguli eſto A, ergo A † G * erit duplum ſegmenti maioris. Et quoniam eſt, vt D ad G ita A ad $\frac{G \text{ in } A}{D}$; erit $\frac{G \text{ in } A}{D}$ aggregatum crurũ, & $\frac{G \text{ in } A}{D}$ ✠ D erit * duplum cruris maioris; ſed quadratum cruris maioris dupli æquale eſt quadrato dupli ſegmenti maioris vnà cum quadrato perpendicularis duplæ; ergo

Corol. 1. Pro bl. 1. lib. 1.

Corol. 1. Pro bl. 1. lib. 1.

$\frac{GQ \text{ in } AQ}{DQ}$ † D Q † G in A 2 æquabitur A Q † G — G in A B 4.

Auferantur vtrinq; G in A 2, & A Q, & D Q, vt cognita ab incognitis ſeparentur, ergo D

$\frac{GQ \text{ in } AQ}{DQ}$ — A æquabitur B Q 4 ✠ G Q — D Q

Hoc eſt $\frac{GQ \text{ in } AQ - DQ \text{ in } AQ}{DQ}$ æquabitur B Q 4 † C Q — D Q

Seu $\frac{GQ - DQ \text{ in } AQ}{DQ}$ æquabitur B Q 4 ✠ G — D Q.

Et æqualitate in proportionem tranſmutata per reſolutionem fractionis, proportionalia erunt plana

G Q — D Q, B Q 4 ✠ G Q — D Q, D Q, A Q.

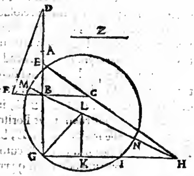
Atque eorum radices proportionales erunt

L. V. G Q — D Q, L. V. B Q 4 ✠ G Q, D Q, D A,

Et

A Ea ipſa proportio, quæ per antecedentem reſolutionem inueniebatur, vnde idem erit & Poriſma, eædemque ex eo determinationes deducentur.

Compoſitio.



SIt data perpendicularis trianguli A B, differentia crurum B C, & differentia ſegmentorum baſis Z. Oportet inuenire triangulum. Fiat eadem conſtructio, quæ in antecedenti compoſitione; trianguli igitur L G H perpēdicularis L K æqualis eſt
B A B, ex conſtructione; & I H differentia ſegmentorum baſis G K, K H æqualis Z, pariter ex conſtructione. Supereſt vt oſtendatur N H differentia crurum L G, L H æqualis ipſi B C; id autem per regreſſum reſolutionis fit hoc modo. Quadratum E H, minus quadrato H G, * æquale eſt quadrato 47. primi
E G vel D F; hoc eſt * quadratis D B, B F, ſeù quod idem eſt quadrato duplæ 47. primi
L K, & quadrato B E, hoc eſt & * quadrato E C, minus quadrato B C, ad- 47. primi
ditis vtrobiq; quadratis G H, B C, & rectangulo G H I bis: quadrata E H, B C, vnà cum rectangulo G H I bis, æqualia erunt quadrato duplæ L K, vnà,
C cum quadratis G H, & E C, vel & I H, & inſuper rectangulo G H I bis; ſed quadrata G H, I H vnà cum rectangulo G H I bis, * æqualia ſunt quadrato 4. ſecundi
compoſitæ ex G H, H I, hoc eſt * quadrato duplæ K H, ergo quadrata E H, Corol. 1. Pro bl. 1. lib. 2.
B C vnà cum rectangulo G H I bis, æqualia erunt quadratis duplarum L K, K H, hoc eſt quadrato duplæ L H, hoc eſt compoſitæ ex M H, H N; ſed rectangulum G H I æquale eſt rectangulo E H, B C; nam cùm ſint ſimilia triāgula E H G, E C B, eſt G H ad A E, vt B C ad C E; hoc eſt ad H I, ac proinde rectangulum G H I ſub extremis æquale rectangulo E H, B C ſub medijs; ergo ſi loco rectanguli G H I ponatur rectangu'um E H, B C; quadrata E H,
B C vnà cum rectangulo E H, B C, hoc eſt * quadratum compoſitæ ex E H; 4. ſecundi
B C, æquale erit quadrato compoſitæ, ex M H, H N, quare & illa compoſi-
D ta huic compoſitæ æqualis erit; ſed & rectangulum E H, B C, oſtenſum eſt æquale rectangulo G H I, hoc eſt * rectangulo M H N ergo E H * æqualis erit 36. tertij Theor. 1. huius
M H & B C æqualis N H, quod erat oſtendendum. Conſtructum eſt igitur triangulum L G H. &c. vt faciendum erat.

Scholium

CVm determinationis facta mentio ſit; res ipſa poſtulare videtur, vt ſubijciam quomodo determinatio Problematis determinati, cum ea ex ſe non patet; in Poriſmate, vel in conſtructione Problematis deprehendatur.

Pro-

Problematum igitur determinatorum alia ſunt, in quibus ſtatim vt propo- A
nuntur determinationes occurrunt, vt propoſitio 22. libri primi Euclidis, &
propoſitio prima libri 4. eiuſdem, nec non prima quattuor problemata præ-
cedentis libri, multaq; alia; eorum enim determinationes in ipſa Problema-
tis propoſitione manifeſtæ ſunt. Alia vero Problemata ſunt, in quibus latet
determinatio; verum peracta reſolutione Problematis, in Poriſmate detegi-
tur: interdum aperte, vt prima determinatio huius Problematis; interdum
non item, vt ſecunda, verum tamen ſumpto inditio ex aliqua impoſsibilità-
te vera, dubiaue, quæ in conſtruendo, iuxta rationem Poriſmatis, Problema-
te interponitur; quod Problema determinatione egeat, deinde Poriſmate at-
tentiùs perpenſo, deprehenditur determinatio; vt in hac conſtructione; vbi
datis tribus rectis E B, F D, B C, inuenta eſt quarta proportionalis G H pro B
baſe trianguli conſtruendi, vt Poriſma docet, ipſa G H, niſi vitium eſt in
datis, debet eſſe maior, quam Z, baſis enim trianguli maior eſt, quàm dif-
ferentia ſegmentorum baſis. & cum ab ipſa G H auferenda ſit recta æqualis
datæ Z pro conſtituendo quod quæritur triangulo, ſi ipſa G H non eſſet ma-
ior, ex recta auferri non poſſet; ſumpto igitur inditio ex hoc dubio impoſsi-
bilitatis, quod problema determinatione egeat; deinde reuerſus ad Poriſma,
inuenio rectam, cuius quadratum æquale eſt exceſſui, quo quadratum differen-
tiæ ſegmentorum baſis trianguli ſuperat quadratum differentiæ crurum, ad
rectam, cuius quadratum æquale eſt quadrato perpendicularis duplæ, vnà
cum eodem quadratorum exceſſu; eandem rationem habere, quàm differen-
tiam crurum ad baſim, ex quo infertur priorem rectam ad poſteriorem, mi- C
norem rationem habere, quàm differentiam crurum, ad differentiam ſeg-
mentorum baſis: quippe quæ minor eſt baſe. Itaque impoſita determinatio-
ne, vt ratio prioris rectæ ad poſteriorem minor ſit ratione differentiæ crurum,
ad differentiam ſegmentorum baſis, neceſſario G H maior erit, quàm Z; atq;
adeo inſtantia, quæ aduerſus conſtructionem Problematis ferebatur deſtructa
erit, quod quidem abſque determinatione non eueniret. Exempli gratia, ſi
quis imprudens, neglecta determinatione, expoſuerit data, ita vt ratio prio-
ris rectæ ad poſteriorem fuerit non minor ratione differentiæ crurum ad diffe-
rentiam ſegmentorum baſis, vt potè expoſuerit perpendicularem trianguli 1,
differentiam crurum 2, & differentiam ſegmentorum baſis 3, iuſſeritq; trian-
gulum conſtruere, fruſtrà ſe excruciabit, qui triangulum illud tentauerit in- D
uenire; quæreret enim id quod non eſt, ſi quidem nullum poteſt dari trian-
gulum in quo perpendicularis ſit 1, differentia crurum 2, & differentia ſeg-
mentorum baſis 3, quoniam ratio huiuſmodi datorum non continetur intra
limites à determinatione præſtitutos. Sic igitur determinatio, quæ prius in
Poriſmate latebat, per ea quæ conſtructioni aduerſabantur, in ipſo Poriſma-
te patefit. Alia autem Problemata ſunt, in quibus neque ſponte ſe ſe offert
determinatio, neque in Poriſmate vllo modo deprehenditur; ſed inſtantiæ
quæ aduerſus conſtructionem Problematis feruntur, ipſam ſuggerunt deter-
minationem; nam cum in conſtructione, quæ fit per rationem Poriſmatis
occur-

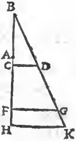
A occurrit ali;uod, quod fieri non poteſt, vel in dubium venit, an fieri poſsit, argumentum eſt, vitium eſſe in datis, vel certe poſſe eſſe, ex eoque oriri illud impoſsibilitatis, vel dubij impedimentum. Neque enim Poriſma iubet ea, quæ fieri non poſſunt, immo indicat quando Problema poſsibile eſt, & quando impoſsibile, vt ſuo loco dicetur. Cognitis igitur, quæ aduerſus conſtructionem inſtant; determinatio quoque cognita erit; nam determinatio nihil aliud eſt, quàm cautio quædam, ne quid aduerſus conſtructionem Problematis inſtet, exemplum ad huiuſmodi determinationem pertinens, ſubijciam in Scholio Problematis quinti.

In hoc Problemate, quod & in libro variorum conſtruxi, Clemens Cyriacus ſe non ſatis accuratam demonſtrationem aſſerit deprehendiſſe, quod
B non demonſtrauerim, quartam illam proportionalem G H maiorem eſſe quàm E C, cùm ab ipſa G H auferenda ſit recta æqualis E C: miraturq. vir alioqui doctiſsimus, id à me omiſſum, ac ſe ſuppleturum, quod omiſerim, pollicetur, vt ea me cura leuaret. Sed cùm ea quæ pollicetur non ſoluerit, non alienum putauerim planum facere, primum illam demonſtrationem, licèt in ea id quod Cyriacus notat omiſſum fuerit, non ideo potuiſſe dici, non accuratam, tum Cyriacum nihil omnino ſuppleuiſſe, quamuis ſupplendi munus ſibi ſuſceperit.

Et quidem. ſi demonſtratio mea ex huiuſmodi omiſsione non accuratè demonſtrationis vitio laboraret; idem Archimedi, idem Appollonio, idem pluribus alijs accuratiſsimis Mathematicis tribuendum eſſet, cùm in eorum
C demonſtrationibus quamquam veriſsimis, plura omiſſa fuerint, quæ Eutocius Aſcalonita, Federicus Comandinus, & plures alij comentatores viri eruditiſsimi in ſuis comentarijs ſuppleuerunt, quas quidem demonſtrationes cùm nemo non accuratas ſit auſus dicere, non video quid cauſæ fuerit, cur Cyriacus demonſtrationem meam non accuratam appellarit.

Verùm vt conceſſerim, potuiſſe me de non accurato opere accuſari, ſi quis caſus dari poſſet, in quo ipſa G H non ſit maior quàm E C, ita plane affirmauerim, audaciorem potius Cyriaci cenſuram, quàm non ſatis accuratam demonſtrationem extitiſſe, cùm certum ſit nullum huiuſmodi caſum dari poſſibilibus (ad Problema conſtruendum) datis exiſtentibus, vt in conſtructione Problematis demonſtraui.

D Sed conatur in ſua animaduerſione Cyriacus oſtendere, poſſe dari caſum, in quo recta G H non ſit maior, quàm E C, & ad id faciendum conſtituit duo triangula, rectangula ſimilia B C D, B F G, quorum maius habet baſim F G minorem latere maximo B D trianguli minoris, idq. ad ſimilitudinem conſtructionis duorum triangulorum E B C, E G H in conſtructione Problematis conſtitutorum; atque ex hoc arguit caſum ſupramemoratum dari poſſe. Verùm parum animaduertit, quod in triangulis B C D, B F G in ſua animaduerſione conſtitutis, ſuppoſuerit data ex quibus Proble-



ma

ma conſtrui non poteſt. quid igitur mirum ſi ex male ſuppoſitis male conclu- A
ſerit? hoc autem ita ſe habere ſic demonſtrabo.

Reſumatur Cyriacæ animaduerſionis figura, in qua oſtenduntur æquales B D, H K, & propterea F G minor quam D B, itaque ex F G non poſſe auferri rectam æqualem B D manifeſtum eſt.

Sed intelligatur A B data perpendicularis trianguli quæſiti, C D differentia crurum, & B D differentia ſegmentorum baſis, atque rectæ B F quadratum ſit æquale quadrato A B duplæ, & quadrato B C, quo nimirum differunt quadrata B D, D C, ſic enim diſponuntur data in conſtructione Problematis. Dico ex datis A B perpendiculari, C D differentia crurum, & B D differentia ſegmentorum baſis, nullum triangulum inueniri poſſe. Quoniam enim ob ſimilitudinem triangulorum B C D, B F G B
eſt, vt B C ad B F, ita C D ad F G, C D autem ad F G maiorem rationem habet, quàm eadem C D ad B D, cùm ſit B F G minor, quàm B D, ergo & B C ad B F, maiorem rationem habet, quàm C D ad B D; hoc eſt recta, cuius quadratum æquale eſt exceſſui, quo quadratum differentiæ ſegmentorum baſis ſuperat quadratum differentiæ crurum, ad rectam cuius quadratum æquale eſt, quadrato perpendicularis duplæ, vnà cum eodem quadratorum exceſſu, maiorem rationem habet, quàm differentia crurum ad differentiam ſegmentorum baſis, quod quidem in nullo triangulo poteſt eſſe. oſtenſum eſt enim lemmate ſecundo, in omni triangulo priorem rectam ad poſteriorem minorem rationem habere quam differentiam crurum, ad differentiam ſegmentorum baſis. Quare ex datis A B perpendiculari, C D differentia cru- C
rum, & B D differentia ſegmentorum baſis, triangulum inueniri non poteſt. quod erat oſtendendum.

Cùm igitur in triangulis B C D, B F G in animaduerſione Cyriaci conſtitutis, ſuppoſita ſint data, ex quibus Problema conſtrui non poteſt, male Cyriacus deducit ex eo, quod in ipſis triangulis recta F G minor ſit, quàm B D, etiam in triangulis E B C, E G H, in conſtructione Problematis conſtitutis, in quibus ponuntur data, ad conſtruendum Problema, poſsibilia, rectam G H minorem aliquando futuram quàm E C.

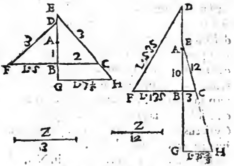
Iam vero oſtendendum eſt, Cyriacum id quod pollicitus eſt non ſuppleuiſſe.

Quoniam enim Problema, de quo agitur, ex determinatis eſt, quippe
quod conſtrui non poteſt, ex datis in quacumque ratione exiſtentibus, vt de- D
monſtraui, in eo nihil aliud deerat niſi determinatio pro cohibendis datis, ne ſuos fines egrediantur, nam adhibita congrua determinatione, nihil eſt amplius quod deſit, vt videre eſt in conſtructione Problematis ſupra allata. Sed cùm Cyriacus nihil de determinatione tetigerit, non video, quid Lemmate illo ſuo præcipuo (ſic enim appellat, propter eximiam, quam de eo concepiſſe videtur præſtantiam) ſuppleuerit; ſed vt manifeſtius id pateat, oſtendam Lemma illud omnino inutile eſſe, ſed exercitationis gratia exponam prius data ad conſtruendum Problema impoſsibilia, hoc eſt ex quibus triangulum conſtrui non poteſt; deinde oſtendam quomodo ex ea datorum impoſsibili-

tate

A tate oriatur inſtantia conſtructioni obſiſtens; quibus oſtenſis, perſpicuè apparebit, Cyriacum nec præcipuo ſuo Lemmate, nec approbata conſtructione, id quod omiſſum aſſerit ſuppleuiſſe.

Sit igitur data A B perpendicularis trianguli 1, B C, differentia crurum 2, & Z differentia ſegmentorum baſis 3, vel ſit A B 10, B C & Z 12, vt poſuit Regiomontanus, & oporteat inuenire triangulũ. Hoc manifeſtum eſt fieri non



B poſſe, cum nullum triangulum poſſit habere perpendicularem, & differentias crurum, & ſegmentorum quales hic exponũtur; nam in his datis, recta cuius quadratum æquale eſt exceſſui quo quadratum Z ſuperat quadratum B C, ad rectam cuius quadratum æquale eſt exceſſui quo quadratum Z ſuperat quadratum B C, ad rectam cuius quadratum æquale eſt quadrato A B duplæ, vnà cum eodem quadratorum exceſſu, maiorem rationem habet, quàm B C ad Z; prior enim recta in primis datis eſt L. 5, poſterior vero 3, & L. 5 ad 3 maiorem habet rationem, quàm 2 ad 3. In datis vero à Regiomontano expoſitis prior recta eſt L. 135, poſterior L. 535, & ratio

C L. 135 ad L. 535, maior eſt ratione 3 ad 12, quod in nullo triangulo poteſt eſſe: ſi quidem oſtenſum eſt, in omni triangulo priorem rectam ad poſteriorem minorem rationem habere, quam differentiam crurum, ad differentiam ſegmentorum baſis. Ex datis igitur quæ ſupra expoſita ſunt, Problema conſtrui non poteſt; quod animaduertiſſe operepretium fuit.

Nunc autem oſtendam, quomodo ex ea datorum impoſſibilitate oriatur inſtantia conſtructioni obſiſtens.

Expoſitis iiſdem datis, nempe impoſſibilibus, procedatur cum conſtructione, quemadmodum Poriſma docet, donec aliquod impedimentum occurrat, occurret autem; nam ex impoſſibilibus impoſſibilia ſequi neceſſe eſt.

Inclinentur igitur ad rectos angulos A B, B C, & in B A producta po-

D natur C E æqualis Z, & producatur C B in F, vt ſit B F æqualis B E: deinde duplicetur B A in D, & connectatur D F, cui æqualis fiat E G, & ducatur G H parallela rectæ B C, occurrens E C continuatæ in H. Hic ſubſiſtimus nec poſſumus alterius progredi; nam cum recta G H debeat eſſe baſis trianguli quæſiti, vt Poriſma indicat, ipſaq; G H minor ſit, quàm Z; (G H enim in prima figura eſt L. 7 $\frac{1}{5}$ Z 3. in ſecunda eſt L. 35 $\frac{3}{5}$, Z 12) non poteſt ab ipſa G H auferri recta æqualis Z. Hic itaque occurrit inſtantia quæ reliquam conſtructionis partem impedit; nec mirum quia ex datis impoſſibilibus, ſequitur quæſitum impoſſibile; impoſſibilia enim exponuntur data, & inuenitur quæſita baſis trianguli minor, quàm data differentia ſegmentorum baſis, quod eſt im-

impoſsibile, totum videlicet minus eſſe ſua parte. Hanc inſtantiam debebat diſſoluere Cyriacus, deinde verò conſtructionem ſuam dicere approbatam: A
nam expoſitis datis ad Problema conſtruendum, vel poſsibilibus, vel impoſſibilibus, quid commodi affert illud ipſius præcipuum Lemma, cùm ex eo nec ſciri poſsit, quæ ſint poſsibilia data, quæue impoſsibilia, nec ideo Problemati determinatio præfigi, vt ea inſtantia, quæ aduerſus conſtructionem fertur, deſtrui poſsit? quid ve illa ſua conſtructio approbata valet, cùm ea perfici non poſsit, niſi prius inſtantia, quæ conſtructionem impedit, determinatione deſtruatur? Non igitur omiſſa ſuppleuit Cyriacus, vt pollicebatur, cùm inſtantiam conſtructioni aduerſantem, non diſſoluerit, nam nihil aliud niſi determinatio contra inſtantiam à docto commentatore deſiderabatur, quippe quæ ſola omnia præſtitiſſet. ſed quamquam ea me ſupplendi cura non leuarit Cyriacus, magnas tamen ei ago gratias, habeoq. licet enim ei votum defuerit, ipſe tamen voto non defuit. B

Iacobus quoque Chriſtmanus in Nodo ſuo Gordio ait, ſe meum hoc Problema examinaſſe, eiuſque conſtructionem vacillantem deprehendiſſe, non tamen in quo vacillet exprimit. profectò aſſumpſerit, in ſuo examine Abacularis calculator demonſtrationum Geometricarũ planè innocens, numeros ad conſtructionem Problematis non idoneos, quippe ignorauit Problema determinatũ eſſe, nec ideo conſtrui poſſe ex quibuſuis datis; idcirco non miror ſi ſuo vacillanti per abaculos calculo deluſus, vacillantem meã conſtructionem ſibi viſus fuerit deprehendiſſe.

Idem vitiũ non accuratæ demonſtrationis notat Cyriacus in Problemate ſecundo Franciſci Vietæ in Apendicula prima ad Apolloniũ Gallum, atque determinationẽ à Vieta Problemati præpoſitã illegitimam eſſe cenſet, & ideo delendam. quam malè de vtroque iudicet, ingenioſiſſimè Alexander Anderſonus diſſeruit, vir ſanè eruditus in paucis, mihique percarus; cui multum debeant Mathematicæ diſciplinæ, quas præclaris monumentis illuſtrauit, cum quibus de me non ſemel perhonorificè meminerit, meique patrocinium ſuſceperit, multum ſane me ſibi ſua humanitate, ac prona in me voluntate deuinxit. Verùm cùm ipſe quoque moleſtè ferrem, quòd tanti viri laudes, non ſine aliqua temeritatis nota, vt leuiſsime dicam, Cyriacus auſus ſit imminuere, non poſſum non oſtendere, quàm longe abſit à vero in ſuis animaduerſionibus iudicium Cyriaci. Nempe hoc à me poſtulat ſingularis quidam meus in Vietam amor, atque obſeruantia, atque adeo arctiſsima amicitiæ, coniunctioniſque neceſsitudo, quæ mihi cum illo Pariſijs interceſsit, mutuis officijs confirmata. hùc accedit, quod cùm Cyriacus in vno, eodemque libello, & Vietam, & me de non accurata demonſtratione accuſauerit, inofficioſus eſſem, ſi omiſſa amici cauſa meam tantùm defenderem. Primum igitur reſoluam Problema illud, deinde Determinationem Problemati præpoſitam, non ſolum legitimam, verùm etiam neceſſariam eſſe demonſtrabo. Poſtremo compoſito Problemate, perſpicuum fiet, Cyriacum de delenda illa determinatione non rectè iudicaſſe.

C

D

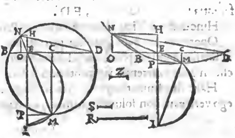
Pro-

A

Problema Vietæ.

Data baſe altitudine & ratione crurum trianguli. inuenire triangulum.

Reſolutio.



SIt data triãguli baſis B D, altitudo Z, & ratio crurum vt S ad R. Oportet inuenire triangulum.

B Factum iam ſit, & ſit illud triangulum N B D, cuius baſis ſit ipſa B D data, altitudo verò N O ſit æqualis Z, crura autem B N, N D ſe habeant, vt S ad R. Secetur angulus B N D bifariã à recta N E ſecante baſim B D in E; circulũ verò circa triangulũ B N D deſcriptũ, in M, erit igitur ratio B E ad E D data, cũ ſit B E ad E D, vt B N ad N D, hoc eſt vt S ad R, ergo* data erũt & ſegmẽta B E, E D: vnde dabitur & rectangulum B E D, ac etiam vt ei* æquale rectangulum N E M. Ducatur autem per punctum E recta E H parallela, & æqualis rectæ O N, eaque producatur donec occurrat rectæ M I perpendiculari ipſi N M in I, & iungatur N H ea parallela erit baſi B D; & ideo poſitione erit, atque poſitione erit, & H I, cùm ea perpendicularis ſit ipſi

7 datorum

35 tertij

C B D. Et quoniam ſimilia ſunt triangula E H N, E M I; anguli enim E H N, E M I recti ſunt, & ideo æquales, & æquales quoque anguli ad E; vt igitur E H ad E N, ita erit E M ad E I; quare rectangulum H E I ſub extremis, æquale erit rectangulo N E M, ſub medijs; ſed datur rectangulum N E M, vt demonſtrauimus; ergo dabitur & rectangulum H E I; data autem eſt recta H E, quippe quæ æqualis eſt N O, vel Z datæ, ergo dabitur & recta E I, magnitudine quoque; quare & ſemicirculus in ea deſcriptus. Denique ſecta B D bifariam in C. connectatur C M ea perpendicularis erit ipſi B D, cùm ſint æquales circumferentiæ B M, M D ratione æqualium angulorum B N M, M N D, ipſis circumferentijs inſiſtentium: quare ipſi C M poſitione data erit; ergo dabitur & punctum M, per quod nimirum

D tranſit ſemicirculus E M I, cùm ſit rectus angulus E M I, ex conſtructione; ſed datum eſt & punctum E, ergo dabitur recta M E poſitione, & magnitudine; vnde & recta E N poſitione erit; ſed poſitione eſt & N H; ergo dabitur & punctum N: quare & triangulum N B D.

Scholium.

HAc via exiſtimo Vietam ſuum Problema reſoluiſſe, ex qua quidem reſolutione apparet E I latitudinem, quam facit rectangulum B E D, ſub ſegmentis baſis ſectæ, pro ratione crurum, applicatum ad E H,

altitudinem trianguli, non eſſe minorem differentia ſegmentorum B E, E D. nam cùm ſemicirculus in diametro E I deſcriptus neceſſariò tranſeat per punctum M, quod commune eſt rectis E M, C M, eiusque ſemidiameter non ſit minor, quàm M P perpendicularis ad E I, hoc eſt quam E C; per conſequens neque tota diameter E I minor erit quàm dupla E C, id eſt quam differentia ſegmentorum B E, E D. A

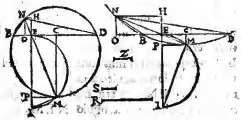
Hinc deduxit Vieta determinationem Problematis, nempè.

Oportere cum baſis ſecabitur pro ratione crurum, & rectangulum quod ſit ſub ſegmentis applicabitur ad altitudinem trianguli, quod inde orietur, non eſſe minus differentia ſegmentorum baſis.

Hanc determinationem Cyriacus illegitimam eſſe cenſet, & ideo delēdam, ego verò eam non ſolum legitimam, ſed etiam neceſſariam eſſe demonſtrabo. B

Lemma.

Si baſis trianguli ſecetur pro ratione crurum, & rectangulum ſub ſegmentis applicetur ad altitudinem trianguli, latitudo inde orta non erit minor differentia ſegmentorum.



Sit triangulum N B D, cuius angulus verticis ſecetur biſariam à recta N E ſecante baſim B D in E; itaque erit vt B N ad N D, ita B E ad E D. Ducatur autē per punctū E perpēdicularis H E I, & fiat H E æqualis N O, altitudini trianguli N B D. Deinde applicetur rectangulū B E D ad rectā H E, & faciat latitudinem E I. Dico ipſam E I non eſſe minorem differentia ſegmentorum B E, E D. Producatur enim N E donec ſecet circumferentiā circuli circa triangulū B N D deſcripti in M, & ſecetur B D biſariam in C, & iungantur M C, M I, N H. Quoniam igitur æquales ſunt anguli B N M, M N D, erunt æquales & circumferentiæ B M, M C, quibus ipſi anguli inſiſtunt; vnde M C perpendicularis erit ipſi B D, & ideo parallela rectæ E I. Et quoniam rectangulum H E I æquale eſt rectangulo B E D, ex conſtructione, hoc eſt rectangulo N E M; erit vt E I ad E M ita E N ad E H; ſunt autem anguli I E M, N E H ad verticem æquales, ergo *æquiangula erunt triangula E M I, E H N; quare angulus E M I æqualis erit angulo E H N, ſed rectus eſt E H N, ergo & E M I rectus erit; vnde ſemicirculus in diametro. E I deſcriptus tranſibit per M, ciuſq; ſemidiameter non erit minor quàm M P perpendicularis ad E I, hoc eſt quam E C, & per conſequens, nec tota diameter E I minor erit, quàm dupla E C; ſed ſegmenta B E, E D differunt perduplam E C, ergo ipſa E I non erit minor quam differentia ſegmentorum B E, E D quod erat oſtendendum. C D

* ſexti

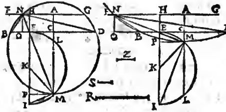
Corol.

A

Corollarium.

HOc igitur demonſtrato, conſtat, determinationem, quam Vieta Problemati præpoſuit, legitimam eſſe, atque neceſſariam.

Compoſitio Problematis ea ipſa, quam Vieta exhibuit.



SIt data trianguli baſis B D, altitudo Z, ratio crurũ vt S. ad R. Oportet inuenire triãgulum. Baſis B D ſecetur biſariã, & ad angulos rectos in C à recta
B A C, quæ ſit ipſi Z æqualis, & per A agatur F A G ipſi B D parallela. Eadem baſis B D ſecetur in E ratione crurum, vt ſit B E ad E D ſicut S ad R, & agatur H E ipſi A C æqualis, & parallela, & ita producatur in I, vt quod ſit ſub H E, E I, ſit æquale ei, quod ſit ſub B E, E D, & ſecetur E I biſariam in K, & centro K interuallo E K, vel K I deſcribatur circulus, quem A C continuata ſecet in punctis L M, aut demum contingat in M, ſecabit enim aut continget circulũ illũ A C, quoniam cadens in eam ex centro K perpendiculariter, erit æqualis ipſi E C, cui ex cautione adiecta Problemati præſtabit, aut demum erit æqualis E K ſemidiameter circuli. denique acta M E ſecet F G in N, & connectantur B N,
C N D. Triangulum igitur conſtructum eſt B N D, cuius baſis eſt data B D, in quam cadens perpendicularis N O ſit ipſi A C, ſeu Z datæ æqualis. Connectatur autem I M, ſunt igitur triangula ſimilia rectangula N H E, I M E, & eſt, vt N E ad I E, ita H E ad E M, quod ſit, itaque ſub N E, E M æquale eſt ei quod ſit ſub H E, E I, ideſt rectangulo ſub B E, E D. quare puncta N B, D M ſunt in circulo, in eo autem ſubtenſa B D ſecatur biſariã ad rectos angulos ab A C, quare ſectio eſt per centrum, & ſunt peripheriæ æquales B M, M D, angulus igitur B N E angulo E N D eſt æqualis, & ideo eſt B N ad N D, ſicut B E ad E D. Triangulum igitur B N D deſcriptum eſt ſub data baſe B D, cuius altitudo N O æqualis eſt imperatæ Z, ſeu A C, & B N ad N D ſe habet, vt B E ad E D, ſeu vt S ad R, quod faciendum erat.

D Animaduertit Cyriacus in Vietam, quod non demonſtrauerit circulum in diametro E I deſcriptum ſecari, aut tangi à recta C M, ſed cauerit ne recta E I minor ſit quàm differentia ſegmentorum B E, E D, ex eaque cautione deduxerit, ipſum circulum ſecari, aut tangi ab ipſa C M; quamobrem Cyriacus cautionem illam, ſeu determinationem è medio tollendam eſſe cenſet; præ ſe enim fert, inquit, quamdam exceptionis non legitimæ ſpeciem, vt habet latius in ſuo libello. Miror quomodo Cyriacus deceptus ſit, vt determinationem illam, quæ adeo neceſſaria eſt, vt demonſtraui, delendam eſſe cenſeat, cùm ſine ipſa Problema conſtrui non poſſit. ipſa ſane determinationis neceſſitas erat oſtendenda, ſed licèt hoc omiſerit Vieta,

non ideò demonſtratio illa poteſt dici non accurata, cùm ipſam neceſsitatem quilibet etiam mediocriter in Geometricis verſatus oſtendere poſsit. Sed video Cyriacum nihili determinationes Problematum æſtimare, cum determinationem illam, quæ adeo neceſſaria eſt, tamquam inutilem delendam cenſear; & tamen ſine determinationibus Problemata determinata ſunt impoſsibilia. Determinatio enim ſola cohibens data intra ſuos terminos, omnes inſtantias conſtructioni aduerſantes deſtruit, ex datis enim determinationi non ſubiacentibus inſtantiæ ipſæ oriuntur. Vt hìc, ſublata determinatione, vt vult Cyriacus, detur B D baſis trianguli 12, Z altitudo 5, & ratio crurum vt 1 ad 3, & oporteat inuenire triangulum. Facta conſtructione vt ſupra prodibit recta E I 5 $\frac{5}{7}$, itaque minor quàm 6 differentia, videlicet ſegmentorum B E, E D, quæ ſunt 3 & 9; quare ſemicirculus in E I deſcriptus, neque ſecabit rectam C M, neque tanget, nec ideo Problema perfici poterit. At præcedente determinatione, hæc inſtantia conſtructionem impediens diſſoluitur: ea enim, vt dictum eſt, procedit ex datis ad conſtruendum Problema non idoneis, nullum enim triangulum dari poteſt baſim habens, & altitudinem, & rationem crurum, quales hic præſcribuntur. A B

Illud autem quod in libello Vietæ in ipſa determinatione dictum eſt.

Oportere quod inde orietur maius eſſe differentia ſegmentorum baſis) cū dici debuiſſet (non eſſe minus) error eſt Typographi, nam Vietam intellexiſſe (oportere quod inde orietur non eſſe minus) clarè teſtantur verba illa in conſtructione Problematis expreſſa nempè (ſecabit enim, aut continget circulum E M I recta A C, quoniam cadens in eam ex centro K perpendiculariter, erit æqualis ipſi E C, cui ex cautione adiecta Problemati præſtabit, aut demum erit æqualis K E ſemidiameter circuli) quod ſi aliter ſenſiſſet, nempè (oportere quod inde orietur maius eſſe differentia ſegmentorum baſis) non addidiſſet (aut demum erit æqualis E K ſemidiameter circuli. C

His igitur ita ſe habentibus, melius quidem Cyriacus feciſſet, ſi commentatorem potius, quàm correctorem egiſſet, ſic enim ſuppleuiſſet id quod omiſſum fuerat à Vieta, oſtendens determinationem illam neceſſariam eſſe, non autem tamquam inutilem fuiſſe delendam cenſuiſſet.

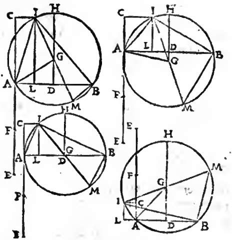
De Problemate primo Appendiculæ primæ ad Apollonium Gallum, quod licèt explicatione indigeat non leui, Cyriacus intactum præterijt. D

Problema Conſtructum à Vieta.

Data baſe trianguli, altitudine & rectangulo ſub cruribus; inuenire triangulū.

TRianguli, de quo quæritur, eſto data baſis A B, altitudo æqualis rectæ A C, rectangulum autem ſub cruribus detur æquale ei, quod fit ſub A C, A E. Oportet inuenire triangulum, cuius baſis A B altitudo ipſi A C æqualis, & rectangulum ſub cruribus æquale ei,

quod



A quod ſit ſub A C, A E. Inclinetur AC, AB ad angulos rectos, & ipſæ AF, AB ſecētur bifariā in F, D, & per D agatur D G ipſi G A E parallela, in qua ponatur A G ipſi A F æqualis, & cētro G interuallo G A, vel G B deſcribatur circulus. Deniq; per punctū C agatur C I ipſi A B parallela ſecās circulū in I, & connectātur A I, B I. In triāgulo igitur AIB cū ex vertice cadat
B in baſim A B perpēdicularis IL, ipſa erit altitudini AC. æqualis. Agatur autē diameter IGM; & connectatur M B, erit triangulum I B M rectangulum, & ſimile triangulo I A L; recti enim ſunt anguli I L A, I B M, & ſiue anguli IMB, ſiue anguli I A B, duplūm amplitudinem eadem peripheria I B definit. quare eſt vt I L ad A I, ita I B ad I M, ſed I M eſt dupla ipſius A G, & ideo æqualis toti A E. Itaque rectangulum ſub I M, I L conſtituitur rectangulo ſub C A, A E æquale, ergo eidem quoque æquatur rectangulum ſub A I, I B. Ad datam itaque baſim A B, & altitudinem I L, ſeu A C, ita conſtitutum eſt
C triangulum A I B, vt rectangulū ſub cruribus æquale ſit, rectangulo ſub A C, A E, quod erat faciendum.

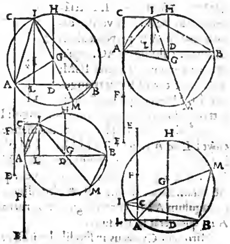
Miror cur Cyriacus in ſuo libello inſtantias quoque, quæ aduerſus conſtructionem huiuſce Problematis feruntur non adnotauerit, cum eæ ſint plures, maioresque quam in illo meo Problemate variorum, aut in Problemate ſecundo ſupradictæ Appendiculæ, in quo ſtudium omne adhibuit, vt corrigeret etiam quæ corrigenda non erant. Neque veriſimile eſt Cyriacum Problema primum non legiſſe, cum ſecundum illud tàm attentè perlegerit. Sed nec dubito quin ad explanationem huiuſmodi difficultatem ſufficeret, cum eruditum eum, ac varia litterarum ſuppellectile inſtructum, libellus ipſe oſtendat. fortaſſe iucundiora ſtudia, vel etiam quæſtuoſiora ſecutus, laborioſa
D hæc prætermiſit.

Duæ ſunt inſtantiæ, quæ conſtructionem huius Problematis impediunt. altera quidem quod non patet rectam æqualem A F poſſe à puncto A in perpendicularem D G duci, quoniam ſi A F maior eſſet, quàm A D, ea recta duci non poſſet. Altera vero inſtantia eſt, quòd nō apparet quare C I parallela baſi A B, debeat neceſſario ſecare circulum A B I; nam ſi A C maior eſſet, quàm recta D G producta vſque ad circumferentiam circuli, ipſa C I non ſecaret circulum, ſed ne tangeret quidem. Sumam igitur perſonam commentatoris, nec dedignabor tanti viri ſcripta preſſo, ac breui ſtylo tradita, & ob id fortaſſe ſubobſcura fuſiùs explicare. Oēs itaq; inſtātias cōſtructioni ad-

aduerſantes determinatione diſſoluam, eamque neceſſariam eſſe demonſtra- A
bo, nec inde mihi gloriam quæro, non enim mihi moris eſt paruam rem
attollere, quo plus præſtitiſſe videar. Problema igitur illud ſic explana-
tum exhibeo.

Problema.

Data baſe trianguli, altitudine, & rectangulo ſub cruribus, inuenire triangulum.



OPortebit autem, cum triãgulum ſub cruribus ap-
plicabitur altitudini, la- B
titudinem inde ortam non eſſe
minorem baſe; nec compoſi-
tam ex dimidia latitudine, & re-
cta, cuius quadratum æquale eſt
exceſſui, quo quadratum dimi-
diæ latitudinis ſuperat quadratũ
dimidiæ baſis, minorem eſſe al-
titudine.

Triãguli de quo quæritur eſto
data baſis A B, altitudo æqualis
rectæ A C, rectangulum autem
ſub cruribꝰ detur æquale ei quod C
fit ſub A C, A E, quarum A E
non ſit minor, quàm A B, nec compoſita ex dimidia A E, & recta, cuius
quadrato differt quadratum dimidiæ A E à quadrato dimidiæ A B, minor ſit
quàm A C. Oportet inuenire triangulum cuius baſis A B, altitudo ipſi A C
æqualis, & rectangulum ſub cruribus æquale ei, quod fit ſub A C, A E. In-
clinentur A C, A B ad angulos rectos, & rectæ A E, A B ſecentur bifariàm
in F D, & per D agatur D G ipſi A C parallela, in qua ponatur A G ipſi A F
æqualis, eſt enim A F non minor, quàm A D, cùm ex determinatione Pro-
blematis tota A E non ſit minor, quam tota A B. Deinde centro G interuallo
G A, vel G B deſcribatur circulus ſecans D G productam in H. erit D H ex de- D
terminatione Problematis non minor altitudine A C: componitur enim ipſa
D H ex rectis H G, G D, quarũ H G æqualis eſt G A vel A F, & quadratũ re-
ctæ G D exceſſus eſt, quo quadratum A G vel A F ſuperat quadratũ A D; itaq;
acta C I ipſi A B parallela, ſecabit circulum aut continget. ſecet ergo aut con-
tingat in I, & connectantur A I, I B. In triangulo igitur A I B, cùm ex verti-
ce cadat in baſim A B perpendicularis I L, ipſa erit altitudini A C æqualis.
Agatur autem diameter I G M, & connectatur M B, erit triangulum I B M
rectangulum & ſimile triangulo I A L; recti enim ſunt anguli I B M, I L A,
hic ex conſtructione ille ex vi ſemicirculi, & anguli I M B, I A L ſunt

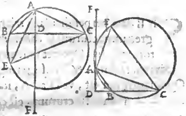
æqua-

A æquales; in primis enim tribus figuris eidem circumferentiæ I B inſiſtunt, in reliqua vero cùm anguli oppoſiti I M B, I A B quadrilateri I M, B A in circulo æquales ſint duobus rectis, & æquales quoque duobus rectis anguli I A L, I A B, erunt anguli I M B, I A B æquales angulis I A L, I A B, dempto communi angulo I A B, reliquus I M B reliquo I A L æqualis erit. Cùm igitur ſimilia ſint triangula I B M, I L A, erit vt I L ad I A, ita I B ad I M, vnde rectangulum L I M ſub extremis, æquale erit rectangulo A I B ſub medijs; ſed rectangulum L I M æquale eſt rectangulo C A E, quoniam æquales ſunt I L, C A, & æquales I M, A E, vtraque enim dupla eſt ipſius A G; ergo rectangulum A I B æquale erit rectangulo C A E. Ad datam itaque baſim A B, & altitudinem I L, ſeu A C, ita conſtitutum eſt triangulum A I B vt rectangu-
B lum ſub cruribus æquale ſit rectangulo C A E, quod erat faciendum.

Determinatum eſt, rectam D H compoſitam ex A G, G D, non eſſe minorem altitudine A C; ſed ſi differentia quoque ipſarum A G, G D fuerit non minor eadem altitudine A C, duobus modis Problema abſoluetur, nempe duo diuerſa triangula Problema efficient, in vno angulus verticis erit obtuſus, in altero acutus. Hoc apparet in duobus vltimis figuris.

At verò Determinationem, quam Problemati adiecimus, neceſſariam eſſe, ſequenti Lemmate oſtendetur.

Lemma.



C SI rectangulum ſub cruribus trianguli applicetur ad altitudinẽ eiuſdem trianguli, latitudo inde orta, non erit minor baſe, nec compoſita ex dimidia latitudine, & recta, cuius quadratum æquale eſt exceſſui, quo quadratum dimidiæ latitudinis ſuperat quadratum dimidiæ baſis, minor erit altitudine.

Sit triangulum A B C, cuius altitudo A D, ſitque rectangulum B A C, ſub cruribus, æquale rectangulo A D F. Dico primum, D F non eſſe minorem baſe B C. Deſcribatur enim circa triangulum circulus A B C, & in
D eo ducatur diameter C E, & iungatur A E: angulus igitur E A C in ſemicirculo rectus erit; & ideo æqualis recto A D B. ſunt autem, & anguli A E C, A B D æquales; in prima enim figura, eidem circumferentiæ A C inſiſtunt, in ſecunda verò quadrilateri E A, B C, in circulo anguli appoſiti A E C, A B C duobus rectis ſunt æquales; ſed & anguli A B D, A B C æquales ſunt duobus rectis, ergo anguli A E C, A B C æquales erunt angulis A B D, A B C, dempto communi angulo A B C, reliquus angulus A E C reliquo A B D æqualis erit; ſed & anguli E A C, A B D oſtenſi ſunt æquales, ergo ſimilia erunt triangula E A C, A D B: quare vt A D ad A B, ita erit A C ad C E, ac proinde rectangulum ſub extremis A D, C E æquale erit rectangulo B A C

ſub

ſub medijs, hoc eſt rectangulo A D F. vnde D F æqualis erit diametro C E, & conſequenter non minor quam B C quod eſt primum. A

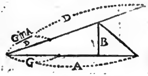
Deinde ſecetur B C bifariam, & ad rectos angulos in G à recta G I ſecante diametrum E C in H, circumferentiam verò in I; erit ergo H centrum circuli, & ſemidiameter H I vel H C, æqualis erit dimidiæ D F. Dico igitur rectam I G compoſitam ex I H, & H G hoc eſt ex dimidia D F, & recta cuius quadrato ſuperatur quadratum C G à quadrato C H, ſeu dimidiæ D F, nõ eſſe minorem altitudine A D. Hoc licet manifeſtum ſit, tamen ne dicat Cyriacus demonſtrationem non eſſe accuratam; iſtud quoque demonſtrabo.

Si punctum D idem ſit, quod G erit & D E eadem, quæ G I, ergo conſtat propoſitum. ſi vero punctum D non ſit idem quod G, cõnectatur G A, erit G I, cum ſit in ea centrum circuli maior, quàm G A; ſed ipſa G A maior eſt B quam D A, quadratum enim G A æquale eſt quadratis D A D G, ergo G I multo maior erit, quam D A; non autem minor quod ſecundo loco erat demonſtrandum. Quare manifeſta eſt determinatio Problematis. Longius quàm par erat incepto abij ad propoſitum redeo.

Problema IV.

Data perpendiculari, aggregato crurum trianguli, & differentia ſegmentorum baſis, inuenire triangulum.

Reſolutio.



C

SIt B data perpendicularis trianguli, D aggregatum crurum G differentia ſegmentorum baſis. Oportet inuenire triangulũ. Sit iam factum. & baſis trianguli eſto A. Quoniam igitur eſt, vt D ad A, ita G ad $\frac{G \text{ in } A}{D}$ erit $\frac{G \text{ in } A}{D}$ differentia crurum, eſt enim vt * aggregatum crurum ad baſim, ita differentia ſegmentorum baſis, ad differentiam crurum; ſed quadratum aggregati crurum, vnà cum quadrato differentiæ eorundem, * dupla ſunt. quadratorum a cruribus, ergo $D\,Q + \frac{G\,Q \text{ in } A\,Q}{D\,Q}$ æqualia erunt quadratis crurum bis: Quadrata autem crurum bis, * æqualia ſunt quadratis ſegmentorũ bis, vna cum quadrato perpendicularis quater, ergo. D

Theor. 7 huius

Theor. 4 primi

7 primi

$D\,Q + \frac{G\,Q \text{ in } A\,Q}{D\,Q}$ æquabuntur quadratis ſegmentorum bis $+ B\,Q\,4$

Sed quadrata ſegmentorum bis * æqualia ſunt quadrato baſis, vnà cum quadrato differentiæ ſegmentorum baſis, ergo

Theor. 4 primi

$$D\,Q + \frac{G\,Q \text{ in } A\,Q}{D\,Q} \text{ æquabitur } A\,Q + G\,Q + B\,Q\,4$$

Hic non poſſunt auferri ex vtraq; parte A Q, & D Q, vt cognita ab incognitis ſeparentur; quia ijs ablatis.

$$\frac{G\,Q \text{ in } A\,Q}{D\,Q} - A\,Q, \text{ æquaretur } B\,Q\,4 + G\,Q - D\,Q$$

Atque adeo ex vna æqualitatis parte exiſteret quadratum differentiæ crurum, minus quadrato baſis, quod eſſet abſurdum; nam non poteſt auferri

qua-

A quadratum baſis à quadrato differentiæ crurum, maius nempe à minore. auferatur ergo vtrinque $\frac{GQ \text{ in } AQ}{DQ}$, & GQ, & $BQ4$, vt cognita ab incognitis ſeparentur. ergo

$$DQ - GQ - BQ4 \text{ æquabitur } AQ - \frac{GQ \text{ in } AQ}{DQ}$$

Vel $DQ - GQ - BQ4$ æquabitur $\frac{DQ \text{ in } AQ - GQ \text{ in } AQ}{DQ}$

eſt enim $\frac{DQ \text{ in } AQ}{DQ}$ idem quod AQ.

Seu quod idem eſt $DQ - GQ - BQ4$ æquabitur $\frac{(DQ - GQ) \text{ in } AQ}{DQ}$.

Denique reſoluatur fractio $\frac{DQ - GQ \text{ in } AQ}{DQ}$ in ſua membra, vt æqualitas in proportionem tranſmutetur, vt in principio huius Libri docuimus, ergo proportionalia erunt plana.

B $DQ - GQ$, $DQ - GQ - BQ4$, DQ, AQ.

Atque eorum radices proportionales erunt

L. V. $DQ - GQ$, L. V. $DQ - GQ - BQ4$, D A

Poriſma.

VT recta, cuius quadratum æquale eſt exceſſui, quo quadratum aggregati crurum trianguli, ſuperat quadratum differentiæ ſegmentorum baſis, ad rectam cuius quadratum æquale eſt exceſſui, quo quadratum aggregati crurum ſuperat quadrata, quæ fiunt ex differentia ſegmentorum baſis, & perpendiculari dupla; ita eſt aggregatum crurum ad baſim.

Datur ergo baſis trianguli de qua quærebatur.

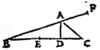
C Ex Poriſmate apparet, quadratum aggregati crurum maius eſſe quadratis, quæ fiunt à differentia ſegmentorum baſis, & à perpendiculari dupla.

Apparet quoque, priorem rectam in Poriſmate nominatam ad poſteriorẽ, minorem rationem habere, quàm aggregatum crurum ad differentiam ſegmentorum baſis; prior enim recta ad poſteriorem ſe habet, vt aggregatum crurum ad totam baſim. Sic Poriſma indicat.

Hæc omnia demonſtranda ſunt, & Problemati præponendæ Determinationes.

Lemma I.

D Quadratum aggregati crurum trianguli maius eſt quadratis, quæ fiunt ex differentia ſegmentorum baſis, & à perpendiculari dupla.



SIt triangulum A B C, in quo perpendicularis A D ſecet baſim B C in duo ſegmenta B D, D C, quorum differentia ſit B E, & continuetur B A in F, vt ſit B F æqualis compoſitæ ex B A, A C. Dico quadratum ex B F maius eſſe quadratis ex B E, & A D dupla. Quoniam enim quadratum B F * æquale eſt quadratis B A, A F, & duplo rectanguli B A F, qua- 4 ſecundi
drata autem B A, & A F; hoc eſt & A C, * æqualia ſunt quadratis B D, 47 primi
D C, & duplo quadrati A D, duplum verò rectangulum B A F maius eſt du-

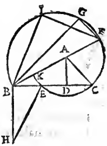
plo

Digitized by Google

plo quadrati A D, cùm vtraque ipſarum B A, A F maior ſit ipſa A D, ergo A quadratum A F maius erit quadratis B D, D C, & quadruplo quadrati A D, & conſequenter multo maius quadrato B E, & quadruplo quadrati A D, hoc eſt & quadrato A D duplæ. quod erat oſtendendum.

Lemma II.

Recta, cuius quadratum æquale eſt exceſſui, quo quadratum aggregati crurum trianguli ſuperat quadratum differentiæ ſegmentorum baſis, ad rectam cuius quadratum æquale eſt exceſſui, quo idem quadratum aggregati crurum ſuperat quadrata differentiæ ſegmentorum baſis, & perpendicularis duplæ, minorem rationem habet, quàm aggregatum crurum ad differentiam ſegmentorum baſis. B



Sit triangulum A B C, cuius baſim B C ſecet perpendicularis A D in duo ſegmenta B D, D C, quorum differentia ſit B E, & producatur B A in F, vt ſit A F æqualis A C, & in B F deſcribatur ſemicirculus, in quo accomodetur F G æqualis B E, & iungatur G B; deinde ex B demittatur B H perpendicularis ipſi B C, duplæ verò A D æqualis, & iungatur H E: ea minor erit, quàm B F, quia quadratum B F, ex antecedente Lemmate, maius eſt quadratis B E, B H; hoc eſt quadrato H E, ergo in ſemicirculo B G F aptetur F I æqualis H E, & iungatur I B. quadratum igitur B F ſuperat C quadratum B E hoc eſt F G, quadrato G B, idemque quadratum B F ſuperat quadrata B E, B H, hoc eſt quadratum E H; ſeu F I, quadrato I B.

Dico igitur B G ad B I, minorē rationē habere, quā B F ad B E. Deſcribatur enim ex A centro ad interuallum A C vel A F circulus, quem A B ſecet in k, is circulus tranſibit per E, cum ſint æquales E D, D C, & A D perpendi-

Theor. 4 primi cularis ad B C. Quoniam igitur quadrata B F, B k* æqualia ſunt duplo quadratorum B A, A F, hoc eſt B A, A C, duplum autem quadratorum B A,

47 primi A C* æquale eſt duplo quadratorum B D, D C, & quadruplo quadrati A D; ergo quadrata B F, B k æqualia erunt duplo quadratorum B D, D C, & quadruplo quadrati A D, hoc eſt & quadrato B H; eſt enim B H dupla ipſius A D; D

Theor. 4 primi ſed duplum quadratorum B D, D C,* æquale eſt quadratis B C, B E, ergo quadrata B F, B k æqualia erunt quadratis B C, B E, B H; auferantur vtrinq; quadrata B k, B E, B H, quadratum igitur B F, minus quadratis B E, B H, hoc eſt minus quadrato H E, æquale erit quadrato B C, minus quadrato B k; ſed quadratum B F, minus quadrato H E vel F I, idem valet, quod quadratum B I; ergo quadratum B I æquale erit quadrato B C, minus quadrato B k.

Et quoniam eſt B F ad B E, vel F G, ſicut B C ad B k, erit & quadratum B F ad quadratum F G, vt quadratum B C ad quadratum B k; & diuidendo

47 primi erit vt quadratum B F, minus quadrato F G, hoc* eſt, vt quadratum B G ad

qua-

A quadratum F G, ita quadratum B C, minus quadrato B k, ad quadratum B k; ſed quadratum B C, minus quadrato B k, oſtenſum eſt æquale quadrato B I, ergo vt quadratum B G ad quadratum F G, ita erit quadratum B I ad quadratum B k, & per conſequens vt B G ad F G, hoc eſt ad B E, ita erit B I ad B k, & permutando vt B G ad B I, ita B E ad B k, hoc * eſt, ita B F ad B C; ſed minor eſt ratio B F ad B C, quàm B F ad B E, ergo & ratio B G ad B I, minor erit quàm B F ad B E, quod erat oſtendendum. Theor. 7 huius

His demonſtratis, Problema ita determinandum erit.

Determinatio

B Oportet quadratum aggregati crurum, maius eſſe quadratis, quæ fiunt ex differentia ſegmentorum baſis, & à perpendiculari dupla.

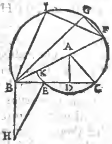
Determinatio I I.

Oportet quoque rectam, cuius quadratum æquale eſt exceſſui, quo quadratum aggregati crurum ſuperat quadratum differentiæ ſegmentorum baſis, ad rectam, cuius quadratum æquale eſt exceſſui, quo quadratum aggregati crurum ſuperat quadrata differentiæ ſegmẽtorum baſis, & perpendicularis duplæ, minorem rationem habere, quàm aggregatum crurum ad differentiam ſegmentorum baſis. Sed aliter quoque in ſimpliciorem formam poteſt hæc ſecunda determinatio ita reduci.

C Oportet quoque duplam perpendicularem minorem habere rationem, ad rectam, cuius quadratum æquale eſt exceſſui, quo quadratum aggregati crurum ſuperat quadratum differentiæ ſegmentorum baſis, quàm eadem recta ad aggregatum crurum.

Determinationem hanc demoſtrabimus hoc modo.

Quadratum B F ſuperat quadratum B G * quadrato F G hoc eſt B E, idem autem quadratum B F, ſuperat quadratum B I quadrato F I, hoc eſt quadrato H E, ſeu quadratis B E, B H, quadratum igitur B G ſuperabit quadratum B I quadrato B H. 47 primi

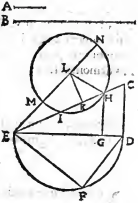


Et quoniam oſtenſum eſt B G ad B I minorem rationem habere, quàm B F ad B E, vel ad F G, habebit quoque & quadratum B G ad quadratum B I minorem rationem, quàm quadratum B F ad quadratum F G; quare per conuerſionem rationis, * quadratum B G ad quadratum B G, minus quadrato B I, hoc eſt ad quadratũ B H, maiorem habebit rationem, quàm quadratum B F ad quadratum B F, minus quadrato F G, hoc eſt ad quadratum B G; ergo * conuertendo minorem rationem habebit quadratum B H ad quadratum B G, quàm idem quadratum B G ad quadratum B F, & conſequenter B H ad B G minorem quoque rationem habebit quàm eadem B G ad B F. quare conſtat Determinatio. 30 quinti 26 quinti

D (margin letter beside "nem habere")

Com-

Compoſitio Problematis. A



SIt data perpendicularis trianguli A; aggregatum crurum B, & differentia ſegmentorum baſis C D. Oportet inuenire triangulum. à puncto D ipſi C D ducatur perpendicularis D E, in eaq; ponatur C E æqualis B; quadratum igitur E C ſuperat quadratum C D quadrato E D; itaq; recta E D, ex præcepto Poriſmatis, ponenda eſt pro prima quatuor proportionalium. Deinde in E D deſcribatur ſemicirculus, in quo accomodetur D F æqualis duplæ A, B
(eſt autem E D maior quàm A dupla, quoniam ex prima determinatione Problematis quadratum E C, cui æqualia ſunt quadrata C D, D E, maius eſt quadratis C D, & A duplæ, atq; adeo quadratum D E maius eſt quadrato duplæ A, vnde & recta D E maior quàm A dupla), & iungatur E F. Quoniam igitur quadratum E C ſuperat quadratum C D quadrato D E; quadratum autẽ D E ſuperat quadratum D F quadrato E F ipſum quadratũ E C ſuperabit quadrata C D, D F quadrato E F; ergo recta E F debet fieri ſecunda quatuor proportionaliũ, tertia E C, & quærenda eſt quarta; ſic Poriſma docet, rectæ igitur E F ponatur æqualis E G, & agatur G H parallela ipſi D C ſecans E C in C
H, erit igitur vt E D ad D G, ita E C ad E H: quare E H eſt quarta proportionalis quæſita. Atq; ea debet fieri baſis trianguli conſtruendi. ſic habetur ex Poriſmate. Ab ipſa igitur E H abſcindatur E I æqualis C D (eſt autem C D minor, quàm E H; nam cùm ſit vt E D ad E G, ita E C ad E H; ratio autem E D ad E G minor, quàm E C ad C D, ex ſecunda determinatione, erit ergo
8 quinti & ratio E C ad E H minor, quàm E C ad C D, quare * C D minor eſt, quàm E H), deinde reliqua I H ſecetur bifariam, & ad angulos rectos in K à recta L k æquali datæ A, & iungantur E L, L H. Itaq; triangulum L E H conſtitutum eſt, quemadmodum Poriſma docet; eſt enim vt E D ad E G, hoc eſt ad E F; ita E C ad E H, hoc eſt vt recta, cuius quadratum æquale eſt exceſſui, quo quadratum E C ſuperat quadratum C D, ad rectam cuius quadratum D
æquale eſt exceſſui, quo idem quadratum E C ſuperat quadrata C D, D F, ita eſt aggregatum crurum ad baſim. Nunc oſtendendum eſt, triangulum illud Problema efficere.

In triangulo L E H perpendicularis L K æqualis eſt A datæ, ex conſtructione; & E I differentia ſegmentorum baſis L k; K H æqualis C D, ſimiliter ex conſtructione, ſupereſt vt compoſita ex cruribus E L, L H oſtendatur æqualis datæ E. id fiet repetitis reſolutionis veſtigijs hac ratione.

Centro L interuallo L H deſcribatur circulus ſecans eius E L in M, productum vero in N, is circulus tranſibit per punctum I cùm ſint æquales I k,

KH,

Digitized by Google

A KH, & Lk perpendicularis ad EH. Quoniam igitur quadratum EH minus quadrato HG æquale * eſt quadrato EG, hoc eſt EF, ſeu quod idem * eſt quadrato ED, minus quadrato DF, quadratum autem ED * æquale eſt quadrato EC minus quadrato CD, ergo quadratum EH; minus quadrato HG æquale erit quadrato EC minus quadratis CD, DF. addantur vtrique parti quadrata HG, CD, DF; ea enim dempta ſunt in reſolutione, ergo quadrata EH, CD, DF, æqualia erunt quadratis EC, HG; ſed quadratum CD æquale eſt quadrato EI, & quadratum DF quadruplum eſt quadrati LK; cum ſit DF dupla ipſius Lk, ergo quadrata EH, EI, vnà cum quadruplo quadrati Lk æqualia erunt quadratis EC, HG; ſed quadrata EH, EI * æqualia ſunt duplo quadratorum EK, KH. ergo duplum quadratorum Ek, kH, vnà quadruplo quadrati Lk æquale erit quadratis EC, HG; ſed duplum quadratorum EK, kH, vnà cum quadruplo quadrati LK * æquale eſt duplo quadratorum EL, LH, ergo duplum quadratorum EL, LH æquabitur quadratis EC, HG, duplum autem quadratorum EL, LH, hoc eſt EL, LN * æquale eſt quadratis EN, EM, ergo quadrata EN, EM quadratis EC, HG æqualia erunt.

47 primi

47 primi

Theor. 4 primi

B

47 primi

Theor. 4 primi

Et quoniam propter ſimilitudinẽ triangulorũ EHG, ECD eſt, vt EH ad HG, ita EC ad CD hoc eſt ad EI, rectangulum IEH ſub extremis, hoc * eſt rectangulum MEN æquale erit rectangulo EC, HG ſub medijs, ſed & quadrata EN, EM oſtenſa ſunt æqualia quadratis EG, HG, ergo recta EM * æqualis erit rectæ HG, & EN æqualis EC, hoc eſt datæ B, quod erat oſtendendũ.

16 sexti

Theor. 5 huius

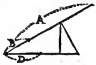
C Conſtructum eſt igitur triangulum LEH quale conſtruendũ proponebatur.

Problema V.

Data differentia ſegmentorum baſis ſubtendentis angulum rectum trianguli, & differentia crurum. Inuenire triangulum.

Reſolutio.

Sit data differentia ſegmẽtorum baſis D, differentia crurum B, & oporteat inuenire triangulum.



Corol. 1 Probl. 1 Lib. 1

Sit iam factum, & aggregatum crurum triãguli eſtò A, ergo $A + B$ erit * crus maius duplũ, $A - B$ * duplũ crus minus, & cõſequenter ſimplum crus maius, erit

D

$A\frac{1}{2} + B\frac{1}{2}$ crus minus $A\frac{1}{2} - B\frac{1}{2}$, ſed quadrata crurum æqualia ſunt quadrato baſis ſubtendẽtis angulum rectum trianguli, ergo

Quad. cruris maioris. $AQ\frac{1}{4} + BQ\frac{1}{4} + B \text{ in } A\frac{1}{2}$)
Quad. cruris minoris. $AQ\frac{1}{4} + BQ\frac{1}{4} - B \text{ in } A\frac{1}{2}$) æquabuntur quadrato baſis

Hoc eſt $AQ\frac{1}{2} + BQ\frac{1}{2}$ æquabitur quadrato baſis

Et cõſequẽter L.V. $AQ\frac{1}{2} + BQ\frac{1}{2}$ æquabitur ipſi baſi

Et quoniam eſt * vt differentia crurum ad differentiam ſegmentorum baſis, ita baſis ad aggregatum crurum, ideo proportionales erunt. Theor. 7 huius

B D L.V. $AQ\frac{1}{2} + BQ\frac{1}{2}$ A

F

Et

Et per conſequens earum quadrata proportionalia erunt. A

$$BQ \quad DQ \quad AQ\tfrac{1}{2} + BQ\tfrac{1}{2} \quad AQ$$

Et duplatis antecedẽtibus, vt poteſtas integra fiat, erunt quoq; proportionalia

$$BQ2 \quad DQ \quad AQ + DQ \quad AQ$$

Et diuidendo proportionalia erunt

$$BQ2 - DQ \quad DQ \quad BQ \quad AQ$$

Atque proportionalia erunt, & eorum latera

$$L.V.\ BQ2 - DQ \quad D \quad B \quad A$$

Poriſma.

Vt recta, cuius quadratum æquale eſt exceſſui, quo duplum quadratum differentiæ crurum ſuperat quadratum differentiæ ſegmentorum baſis ſubtendentis angulum rectum trianguli ad differentiam ſegmentorum baſis; ita eſt differentia crurum ad aggregatum eorundem. B

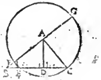
Datur ergo aggregatum crurum, de quo quærebatur.

Ex Poriſmate apparet differentiam ſegmentorum baſis ſubtendentis angulum rectum trianguli minorem eſſe recta, cuius quadratum duplum eſt quadrati differentiæ crurum, eo quod duplum quadratum differentiæ crurum maius eſt quadrato differentiæ ſegmentorum.

Id oſtendendum eſt atque Problemati præfigenda determinatio, ne differentia ſegmentorum baſis detur non minor, quàm recta, cuius quadratum duplum eſt quadrati differentiæ crurum. quamobrem ita propono.

Lemma. C

Differentia ſegmentorũ baſis ſubtendentis angulũ rectum trianguli, minor eſt, quàm recta cuius quadratũ æquale eſt duplo quadrati differentiæ crurum.



Sit triangulum A B C rectangulum in A, cuius baſim B C ſecet perpendicularis A D in duo ſegmenta B D, DC, & centro A interuallo A C cruris minoris deſcribatur circulus ſecans baſim B C in E, crus vero B A in F, productum autem in G. Differentia igitur ſegmentorum B D, DC erit B E; differentia vero crurum B F. Dico B E minorem eſſe recta, cuius quadratum æquale eſt duplo quadrati B F. Quoniam enim B G ſecta eſt vtrunq; D in A, quadratum totius B G vnà cum quadrato B F differentiæ partium * æquale erit duplo quadratorum B A, A G, hoc eſt B A, A C, ſeu quod idem eſt æquale erit duplo quadrati B C, & conſequenter quadratum B G minus erit duplo quadrati B C. Et quoniam eſt B C ad B G vt B F ad B E, erit & quadratum B C ad quadratum B G vt quadratum B F ad quadratum B E, & duplatis antecedentibus vt duplum quadrati B C ad quadratum B G, ita erit duplum quadrati B F ad quadratum B E; ſed quadratum B G oſtenſum eſt minus duplo quadrati B C, ergo & quadratum B E minus erit duplo quadrati B F, atque adeo & recta B E minor erit, quàm recta cuius quadratum

Theor. 4 primi

æqua-

A æquale eſt duplo quadrati B F, quod erat oſtendendum.

Hoc igitur demonſtrato, Problema ita determinandum erit.

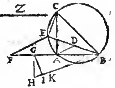
Determinatio.

Oportebit differentiam ſegmentorum baſis ſubtendentis angulum rectũ trianguli, minorem eſſe recta, cuius quadratum duplum eſt quadrati differentiæ crurum, maiorem vero differentia crurum.

Compoſitio Problematis.

Sit data differentia ſegmẽtorum baſis angulum rectum ſubtendentis Z. differentia crurum A B.

B Oportet inuenire triangulum. Ponatur ipſi A B æqualis, & ad angulos rectos A C, & cõnectatur C B. quadratum igitur C B æquale erit quadratis C A, A B, & ideo duplum erit quadrati A B. Itaque à quadrato C B debet auferri quadratum Z, ſic Poriſma iubet; eſt



autem Z minor, quàm C B ex prima determinationis parte; ergo in circulo circa diametrum C B deſcripto aptetur B E æqualis Z; ea maior erit, quã A B, ex ſecunda parte determinationis, & iuncta E C quadrata C E, E B æqualia erũt quadrato C B, rectus eſt enim angulus C E B in ſemicirculo, quare ſi à quadrato C B auferatur quadratum E B; hoc eſt Z remanebit quadratum C E, rectæ igitur C E quadratum æquale erit exceſſui, quo duplum quadrati A B ſu-

C perat quadratum Z, ergo ipſa C E ponenda eſt pro prima quatuor proportionalium, quarum ſecunda erit B E, tertia B A, & quærenda eſt quarta. ſic habetur ex Poriſmate. Itaque à recta E B abſcindatur B D æqualis E C, & connectatur D A, cui parallela agatur E F occurrens B A continuatæ in F. erit igitur vt B D ad B E, ita B A ad B F. inuenta eſt igitur quarta proportionalis B F; ea debet æquari compoſitæ ex cruribus trianguli conſtruendi, vt in Poriſmate, ſed eorundem crurum datur differentia A B, ergo ſecetur F A bifariàm in G à perpendiculari G H æquali ipſi G A, vel G F, & connectatur H B. compoſita igitur ex cruribus H G, G B trianguli H G B, (manente tamen eorundem differentia A B) æqualis erit ipſi B F. Itaque conſtitutum eſt triangulum H G B, quemadmodum Poriſma docet, eſt enim vt B D,

D hoc eſt E C ad B E, ſeu Z, ita B A ad B F, hoc eſt vt recta cuius quadratum æquale eſt ei, quo differt duplum quadrati differentiæ crurum, à quadrato differentiæ ſegmentorum baſis ad differentiam ſegmentorum, ita differentia crurum ad aggregatum eorundem. Nunc autem oſtendendum eſt triangulum G H B eſſe quale Problema requirit.

Primum igitur triangulum G H B rectangulũ eſt, quoniã angulus H G B rectus eſt, ex conſtructione. deinde crura eius H G, G B differunt per A B datam; ſunt enim æquales H G, G A, ex conſtructione; itaque ſupereſt, vt differentia ſegmentorum baſis æquetur Z datæ; id autem ita fit manifeſtum,

Ducatur enim G I baſi H B perpendicularis, & centro G interuallo G H, de-

Digitized by Google

ſcribatur circulus ſecans baſim H B in K, erunt æquales H I, I K, vnde differentia ſegmentorum H I, I B erit K B. Quoniam igitur ob parallelas D A, E F eſt, vt D B, hoc eſt E C ad B E, ita A B ad B F; erit & quadratum E C ad quadratum B E, vt quadratum A B ad quadratum B F, & componendo (nã in reſolutione per diuiſionem rationis argumentatus ſum) erit vt quadrata E C, B E, hoc eſt * vt quadratum C B, ſeu quod idem eſt, vt duplum quadrati A B ad quadratum B E, ita quadrata A B, B F hoc eſt ita * duplum quadratorum F G, G B, ſeu G H, G B ad quadratum B F, & ſubduplatis antecedẽtibus, (in reſolutione enim duplata ſunt antecedentia) erit vt quadratum A B ad quadratum E B, ita quadrata G H, G B, hoc eſt, ita quadratum B H ad quadratum B F, & conſequenter, vt A B ad B E, ita B H ad B F, ſed vt B H ad B F, ita eſt B A ad B k; ergo vt A B ad B E, ita erit A B ad B K; quare B k æqualis erit B E hoc eſt Z datæ, quod erat oſtendendum. Conſtructum eſt igitur triangulum G H B & Problemati. ſatisfit quod faciendum erat. A B

47 Primi. Theor. 4 primi.

Scholium.

Aduerſus conſtructionem huius Problematis duæ feruntur inſtantiæ quarum altera per primam Determinationis partem diſſoluitur; altera per ſecundam. Et prima quidem Determinationis pars in Poriſmate conſpicitur; ſcilicet differentiam ſegmentorum baſis minorem eſſe debere recta, cuius quadratum duplum eſt quadrati differentiæ crurum, eò quod quadratum differentiæ ſegmentorum minus eſt duplo quadrato differentiæ crurum, vt Poriſma indicat. C

Secunda verò pars Determinationis, nempe differentiam ſegmentorum baſis maiorem eſſe debere, differentia crurum, neque in propoſitione Problematis, neque in Poriſmate cernitur; ſed per inſtantiam quæ aduerſus conſtructionem fertur manifeſta fit. Nam cum in circulo C A B aptari debeat recta B E æqualis Z, differentiæ ſegmentorum baſis, vt Poriſma iubet; ea niſi eſſet maior quam A B differentia crurũ recta E C, non eſſet minor, quàm E B, nec ideo ab ipſa E B, poſſet abſcindi recta æqualis E C; itaque Problema conſtrui non poſſet. Sed cum inſtantia hæc conſtructioni aduerſans procedat ab eo; quod differentia ſegmentorum baſis poſſet exponi, non maior, quàm differentia crurum, adiecta Determinatione Problemati, vt ipſa differentia ſegmentorum maior ſit, quàm differentia crurum, ea inſtantia diſſoluitur. differentiam autem ſegmentorum maiorem eſſe, differentia crurum; demonſtrauimus Lemmate primo Problemate tertij huius libri. Atque hæc quidem de inuentione Determinationis in hoc, atque in ſcholio Problematis tertij huius libri dicta ſufficiant. D

Problema VI.

Data differentia ſegmentorum baſis ſubtendentis angulum rectum trianguli, & aggregato crurum, inuenire triangulum.

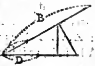
Reſo-

Digitized by Google

A Reſolutio.

Sit data differentia ſegmentorum baſis D; aggregatum crurum B; & oporteat inuenire triangulum.

Sit iam factum, & differentia crurum trianguli eſto A, ergo $B + A$ erit duplum cruris maioris, & $B - A$ duplum cruris minoris, vnde ſimplum crus maius erit $B\frac{1}{2} + A\frac{1}{2}$, ſimplum crus minus $B\frac{1}{2} - A\frac{1}{2}$.



At quadrata crurum* æqualia ſunt quadrato baſis ſubtendentis angulum rectum trianguli, ergo 47 primi

Quad. cruris maioris $BQ\frac{1}{4} + AQ\frac{1}{4} + B \text{ in } A\frac{1}{2}$)
Quad. cruris minoris $BQ\frac{1}{4} + AQ\frac{1}{4} - B \text{ in } A\frac{1}{2}$) æquabuntur quadrato baſis

B Hoc eſt $BQ\frac{1}{2} + AQ\frac{1}{2}$ æquabitur quadrato baſis

Et cōſequenter $L.V.BQ\frac{1}{2} + AQ\frac{1}{2}$ æquabitur ipſi baſi.

Et quoniam eſt* vt aggregatum crurum ad differentiam ſegmentorum baſis, ita baſis ad differentiam crurum; proportionales erunt. Theor. 7 huius

B, D, $L.V.BQ\frac{1}{2} + AQ\frac{1}{2}$, A

Atque eorum quadrata proportionalia erunt.

BQ DQ $BQ\frac{1}{2} + AQ\frac{1}{2}$ AQ

Et duplatis antecedentibus, vt poteſtas integra fiat, erunt proportionalia

$BQ\,2$ DQ $BQ + AQ$ AQ

Et diuidendo proportionalia erunt.

C $BQ\,2 - DQ$ DQ BQ AQ

Et conſequenter eorum latera proportionalia erunt.

$L.V.BQ\,2 - DQ$ D B A

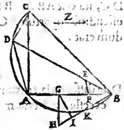
Poriſma.

Vt recta cuius quadratū æquale eſt ei, quo differt duplum quadratū aggregati crurum, à quadrato differentiæ ſegmentorum baſis ſubtendentis angulum rectum trianguli, ad differentiam ſegmentorum baſis; ita eſt aggregatum crurum ad differentiam eorundem.

Datur ergo differentia crurum, de qua quærebatur.

D Compoſitio Problematis.

Sit data differentia ſegmentorum baſis angulum rectum ſubtendentis Z, aggregatum crurum A B. Oportet inuenire triangulum. Ducatur ipſi A B perpendicularis, & æqualis A C, & iungatur C B; eius igitur quadratum æquale erit quadratis C A, A B, & ideo quadrati A B duplū, itaq; à quadato C B auferendū eſt quadratū Z. ſic Poriſma fieri iubet. ergo deſcribatur circulus circa diametrū C B, in eoq. aptetur C D æqualis Z, & iungatur D B.



Quadrata igitur C D, D B æqualia erunt quadrato C B, quoniam rectus eſt A
in ſemicirculo angulus C D B, quare ſi à quadrato C B auferatur quadratum
C D, hoc eſt Z, remanebit quadratum D B. Itaque rectæ D B quadratum æ-
quale erit ei, quo differt duplum quadrati A B à quadrato Z. Igitur ipſa D B
ponenda eſt pro prima quatuor proportionalium, quarum ſecunda erit Z,
tertia A B, & quærenda eſt quarta, id Poriſma præcipit. Sumatur ergo ip-
ſi Z, vel D C æqualis B E, & iungatur D A, cui parallela agatur E F ſecans
A B in F, vt igitur B D ad B E, ita erit B A ad B F; inuenta eſt igitur
quarta proportionalis B F. ea debet fieri differentia crurum trianguli quæſiti,
ſic Poriſma docet; ſed eorumdem crurum aggregatum datur A B, ergo ſecetur
F A biſariam in G à perpendiculari G H, æquali ipſi G A, vel G F, & con-
nectatur H B. Differentia igitur crurum H G, G B trianguli H G B, manen- B
te quidem eorumdem aggregato A B, erit B F. Itaque conſtitutum eſt trian-
gulum H G B, vt Poriſma docet. eſt enim vt B D ad B E, hoc eſt ad Z, ita
B A ad B F, ideſt, vt recta cuius quadratum æquale eſt ei, quo differt duplum
quadratum aggregati crurum, à quadrato differentiæ ſegmentorum baſis ad
differentiam ſegmentorum, ita aggregatum crurum ad differentiam eorum-
dem. Nunc oſtendendum eſt in triangulo G H B, eſſe ea, quæ requiruntur.

In triangulo igitur G H B angulus H G B rectus eſt, ex constructione,
compoſita verò ex cruribus H G, G B æqualis eſt A B datæ; reliquum autẽ,
nempe vt differentia ſegmentorum baſis æquetur datæ Z, id autem, repetendo
reſolutionis veſtigia, ita fit manifeſtum.

Ducatur G I perpendicularis ad baſim H B, & centro G interuallo G H, vel C
3 tertij D F, ſeu G A deſcribatur circulus ſecans baſim H B in K. erunt igitur * æ-
quales H I, I K, & ob id differentia ſegmentorum H I, I B, erit K B. Et
quoniam ob parallelas D A, E F, eſt, vt B D ad B E, hoc eſt D C, ita B A
ad B F; erit quoque & quadratum B D ad quadratum D C, ſicut quadratum
B A ad quadratum B F; & componendo erit, vt quadrata B D, D C, hoc
eſt, vt quadratum C B, ſeu quod idem valet, vt duplum quadrati A B ad
Thor. 4 primi. quadratum D C, ita quadrata B A, B F, hoc eſt, ita * duplum quadratorum
A G, G B, vel G H, G B ad quadratum B F, & ſubduplatis antecedentibus
erit, vt quadratum A B ad quadratum D C, ita quadrata G H, G B, hoc eſt,
ita quadratum B H ad quadratum B F, & conſequenter vt A B ad D C,
ita erit B H ad B F; ſed B H ad B F eſt, vt B A ad B k, ergo vt A B ad D
D C, ita erit A B ad B k; quare B k æqualis erit D C, hoc eſt Z datæ, quod
oſtendiſſe oportuit. Conſtructum eſt igitur triangulum G H B, vt facien-
dum erat.

Problema VII.

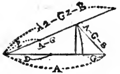
Data differentia crurum trianguli, & differentia ſegmentorum baſis, datoque exceſſu inter crus maius & baſim, inuenire triangulum.

Hoc

A HOc Problema quatuor caſus habet: aut enim exceſſus eſt penes baſim, aut penes crus maius; & ſi penes crus, aut differentia ſegmentorum baſis maior eſt, quàm dupla differentia crurum, aut minor, aut æqualis; quartus hic caſus vix inter Problemata annumerari poteſt, cùm in eo innumera triangula Problemati ſatisfaciant, vt ex eius reſolutione & compoſitione patebit. Primum igitur ſit exceſſus ille penes baſim.

Reſolutio Primi Caſus.

SIt data differentia crurum trianguli B, differentia ſegmentorum baſis D, & exceſſus, quo baſis ſuperat crus maius G. Oportet inuenire



B triangulum.

Sit iam factum, eiuſque baſis eſto A, ergo crus maius erit A — G, crus minus A — G — B; differunt enim crura per B. atque aggregatum crurum erit A 2 — G 2 — B. At rectangulum ſub differentia crurum & aggregato eorumdem* æquale eſt rectangulo ſub differentia ſegmentorum baſis & ipſa baſe. itaque *Theor. 6 huius*

B in (A 2 — G 2 — B æquabitur D in A

Seu quod idem eſt B in A 2 — B in G 2 — B Q æquabitur D in A

Additis vtrobiq; B in G 2, & B Q, ergo

B in A 2 æquabitur D in A + B in G 2 + B Q.

Et ablato vtrinque D in A, vt cognita ab incognitis ſeparentur,

C B in A 2 — D in A æquabitur B in G 2 + B Q

Seu quod idem eſt B 2 — D) in A æquabitur G 2 + B) in B.

Et æqualitate ad proportionem reuocata, proportionales erunt.

B 2 — D G 2 + B B A

Poriſma:

Vt exceſſus, quo dupla differentia crurum trianguli præſtat differentiæ ſegmentorum baſis, ad compoſitam ex differentia crurum, & duplo exceſſu, quo baſis ſuperat crus maius, ita eſt differentia crurum ad baſim.

Datur ergo baſis trianguli, de qua quærebatur.

D Ex Poriſmate apparet in huiuſmodi triangulo duplam crurum differentiam maiorem eſſe differentia ſegmentorum baſis. quod quidem, antequam Problema componam, demonſtrandum eſt, atque Problemati præfigenda determinatio, ne crurum differentia dupla detur, non maior quàm differentia ſegmentorum baſis. Itaq; ad id oſtendendum Lemma huiuſmodi propono.

Lemma.

Si baſis trianguli fuerit crure maiore maior, dupla crurum differentia differentiam ſegmentorum baſis excedet.

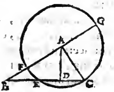
Hoc

HOc Lemma quod ad determinationem Problematis attinet ſic pro- A
poſitum & demonſtratum determinationi ſatisfacit, vt in libro va-
riorum Lem, 2 ante Problema quintum factum eſt. Verùm quo-
niam dupla differentia crurum trianguli, etiam ſi baſis fuerit minor crure
maiore, poteſt eſſe maior quàm differentia ſegmentorum baſis, ideo Lemma
illud in meliorem formam ſic propono.

Lemma.

Si baſis trianguli fuerit dimidio aggregati crurum maior, dupla crurum dif-
ferentia, differentiam ſegmentorum baſis excedet.

SIt triangulum A B C, cuius baſis B C, ſit maior B
dimidio aggregati crurum B A, A C, & cen-
tro A interuallo A C cruris minoris deſcribatur
circulus ſecans crus A B productum in punctis F G,
baſim vero B C in E, & cadat in B C, perpendicu-
laris A D. erit igitur B F differentia crurum A B, A C,
differentia vero ſegmentorum B D, D C erit B E;



3 tertij ſunt enim * æquales E D, D C. Dico duplam B F maiorem eſſe quam B E.
Quoniam enim B C ponitur maior dimidia B G, dupla B C maior erit, quàm
Theor. 7 huius tota B G, ſed vt B C ad B G, ita * eſt B F ad B E, ergo duplatis antecedentibus
erit, vt B C dupla ad B G, ita dupla B F ad B E; ſed B C dupla oſtenſa eſt ma-
ior, quàm B G, ergo & B F dupla, maior erit quàm B E, quod erat oſtendendũ. C
Hoc igitur demonſtrato præfigenda eſt huic caſui hæc determinatio.

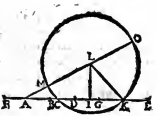
Determinatio.

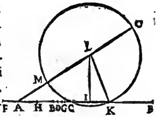
OPortebit duplam differentiam crurum maiorem eſſe differentia ſegmen-
torum baſis, ſimplam vero minorem.

Compoſitio Primi Caſus.

SIt data differentia crurum trianguli A B, differentia ſegmentorum baſis
A C, quæ ſit maior, quàm A B, minor autem, quàm dupla A B & ex-
ceſſus, quo baſis ſuperat crus maius B D. Oportet inuenire triangulum. D
Fiat C F dupla ipſis A B, ea, ex determinatione, maior erit, quàm A C. ſi-
militer & B G fiat dupla ipſius B D, & fiat vt A F ad A G, ita A B ad aliam,
quæ ſit A k; ea ex præcepto Poriſmatis debet fieri baſis trianguli conſtruendi,
eamq; maiorem eſſe, quam A C oſtendetur infra, ergo ſecetur C k bifariam
in I à perpendiculari I L, in qua ponatur k L æqualis K D; ipſa autem K D
maior eſt quam K I, vt demonſtrabimus infra & iungatur A L. poſuimus k L
æqualem k D pro crure minore trianguli conſtruendi quoniam ipſum crus
debet ſuperari à baſe A K, exceſſu A D; nam cum baſis A k debeat ſuperare
crus maius, exceſſu B D, crus autem maius ſuperare debeat crus minus exceſ-
ſu

A ſu A B; baſis A k debebit ſuperare crus minus vtroq; exceſſu A B, B D. Conſtructum eſt igitur triangulum L A K, quemadmodum Poriſma conſtruere docet, factum eſt enim vt A F exceſſus, quo A B. dupla ſuperat A C, ad compoſitam ex A B, & dupla B D, ita A B ad A K baſim trianguli L A k. Nunc demonſtrandum eſt in eo triangulo eſſe ea quæ requiruntur. Differentia ſegmentorum baſis A I, I K eſt ipſa A C data, cum ſint æquales C I, I k, ex conſtructione; differentia vero crurum A L, L k æqualem B eſſe A B datæ, per reſolutionis regreſſum oſtendetur; reliquum autem, ideſt latus A L ſuperari à baſe A K exceſſu B D ex demonſtratis patebit. Centro igitur L interuallo L k deſcribatur circulus ſecans A L in M; productam verò in O, is circulus tranſibit per C cum ſint * æquales C I, I k. deinde producatur A k in E, vt ſit k E æqualis k G. Quoniam igitur E G dupla eſt ipſius K G, & G B dupla ipſius G D tota E B erit dupla totius k D, hoc eſt ipſius k L; atque adeo B E, M O æquales erunt. *1 tertij*





Et quoniam eſt vt A F ad A G, ita A B ad A k, rectangulum F A K ſub extremis æquale erit rectangulo B A G ſub medijs, ſed rectangulum F A K æqua-
C tur rectangulo C F, A K, minus rectangulo C A K, hoc eſt æquatur duplo rectanguli B A K, minus rectangulo (C A k recta enim C F dupla eſt ipſius A B) ergo duplum rectanguli B A K, minus rectangulo C A K, æquale erit rectangulo B A G. addatur vtrobique rectangulum C A K; detractum enim fuit in reſolutione, ergo duplum rectanguli B A K; hoc eſt rectangulum ſub B A, & dupla A K, æquabitur rectangulis B A G, C A K. auferatur vtrinque rectangulum B A G, additum fuit in reſolutione, ergo rectangulum ſub A B, & dupla A k, minus rectangulo B A G, ſeu quod idem valet, rectangulum ſub B A, & compoſita ex A K, k G, quod eſt rectangulum B A E (ſunt enim æquales k G, k E, ex conſtructione) æquale erit rectangulo C A K, * hoc eſt M A O, atque ſunt æquales M O, B E, vt eſt demonſtratum, ergo & A M * æqualis erit A B. Reliquum eſt vt baſis A k ſuperet crus L A exceſſu B D; id autem ex demonſtratis patet; nam cum L k ſuperetur ab A k exceſſu A D, ex conſtructione, ab A L verò exceſſu A B, vt demonſtrauimus, L A ſuperabitur ab A k reliquo exceſſu B D. Conſtructum eſt igitur triangulum L A k, cuius crurum differentia A M, æqualis eſt datæ A B; differentia vero ſegmentorum baſis eſt ipſa A C data, & baſis A K ſuperat crus maius L A dato exceſſu B D, quod erat faciendum. *36 tertij* *Theor. 3 huius*

D (margin letter beside "æqualis erit A B")

At vero A K maiorem eſſe, quàm A C ſic demonſtrabitur. Quoniam enim A B minor eſt, quàm A C, ex determinatione, atque F C dupla eſt ipſius A B, ex conſtructione, erit A F minor, quàm A B ſed A F eſt prima qua-

14 quinti tuor proportionalium A F, A G, A B, A K; ipſa autem A B tertia, ergo &* ſecunda A G minor erit, quàm A K quarta; ſi igitur A G non eſt minor, quàm A C, vt in prima figura manifeſtum eſt A K maiorem eſſe, quàm A C. Si verò A G minor eſt, quàm A C, vt in ſecunda figura, ſecetur F C bifariam in H, erit A B æqualis C H, recta enim F C dupla eſt ipſius A B ex constructione; dempta igitur communi H B, reliqua A H reliquæ B C æqualis erit. Et quoniam eſt vt A F ad A G, ita A B ad A k, ex constructione, erit permutando, vt A F ad A B, hoc eſt ad F H, ita A G ad A K, & per diuiſionem rationis vt A F ad A H, hoc eſt ad B C, ita erit A G ad G K; ſed A F prima minor eſt, quàm A G tertia, cum ſit etiam minor, quàm A B, vt demonſtrauimus, ergo & ſecunda B C minor erit, quàm G H quarta; atque addita communi A B, tota A C minor erit, quàm compoſita ex A B, G K, & conſequenter multo minor, quàm A K quod erat oſtendendum. A B

Similiter K D maiorem eſſe, quàm K I ſic oſtendetur. Si K G non eſt minor quam K I, manifeſtum eſt K D compoſitam ex K G, G D maiorem eſſe, quàm K I.

Sed K G ſit minor quam K I. Quoniã igitur A K oſtenſa eſt maior, quam A G, dempta communi A D, reliqua D K maior erit, quàm reliqua D G, hoc eſt quam D B, & ideo multo maior, quàm D C; ergo punctum D, erit 3 tertij inter puncta C I, cum ſint * æquales K I, I C. quare K D maior eſt quàm K I. quod erat oſtendendum.

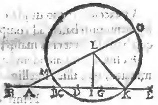
CON-

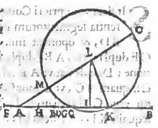
A

CONSPECTVS RESOLVTIONIS, ET COMPOSITIONIS.

	Initium Reſolutionis.		Finis Compoſitionis.	
	ſeu quod B in(A 2 — G 2 — B idē eſt B in A 2 — B in G 2 — B Q	D in A D in A	* V B A E V B A G V B A K 2	hoc eſt V M A O V C A K
	addatur B in G 2 & B Q		auferatur V B A G	
B	B in A 2	D in A † B in G 2 † B Q	V B A K 2	V B A G † V C A K
	auferatur D in A		addatur V C A K	
	ſeu quod B in A 2 — D in A idē eſt B 2 — D) in A	B in G 2 † B Q G 2 † B) in B	— V C A K ſeu V B A K 2 — V C A K hoc eſt V C F A K V F A K	V B A G
	æqualitas ad proportionem		proportio ad æqualitatē	
C	B 2 — D	G 2 † B B A	A F A G A B A K	
	Finis Reſolutionis.		Initium Compoſitionis.	







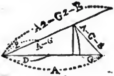
D * Similiter rectang. B A E idem eſt, quod in reſolutione B in (A 2 — G 2 — B. nam ipſum rectang. B A E continetur ſub B A, & exceſſu, quo A K dupla ſuperat G A compoſitam ex G B, B A, hoc eſt ex G D dupla, & ipſa B A. cui quidem rectangulo reſpondet ex reſolutione rectang. B. in (A 2 — G 2. — B.

* Nota quod rectang. B A G. idem eſt quod in reſolutione B in G 2 † B Q. nam ipſum rectang. B. A G. æquale eſt rectang. A B. G. plus quadrato A B. hoc eſt rectangulo A B D. bis, plus quadrato A B. quæ quidem in reſolutione ſunt B in G 2 † B Q.

Eundem

Eundem caſum alia breuiori via, & reſoluam, & componam, in eoque reſol- **A**
uendo proportione vtar, non æqualitate.

Eiuſdem Caſus ſecunda Reſolutio.



IIſdem datis, poſitiſque, vt in antecedente reſolutione, & reſumpta eiuſdem reſolutionis figura. Quoniam eſt* vt differentia crurum triãguli ad differentiam ſegmentorum baſis, ita baſis ad aggregatum crurum, erunt proportionales.

Theor. 7 huius

B D A A2—G2—B

Et duplatis antecedentibus, proportionales erunt

B2 D A2 A2—G2—B **B**

Et per conuerſionem rationis proportionales erunt

B2 B2—D A2 G2 ✠ B.

Rurſus ſubduplatis antecedentibus, erunt proportionales

B B2—D A G2 ✠ B

Et conuertendo erunt proportionales

B2—D B G2 ✠ B A

Denique permutando proportionales erunt

B2—D G2 ✠ B B A

Hæc autem permutatio non erat neceſſaria, cum etiam in penultima proportionalium ſerie, primi tres termini cogniti exiſtant, ſed quoniam in eandem proportionem recidit hæc reſolutio quemadmodum & antecedens; volui vt etiam eorum Poriſmata eadem verborum textura exempli arcentur. **C**

Poriſma.

Vt exceſſus, quo dupla differentia crurum trianguli præſtat differentiæ ſegmentorum baſis, ad compoſitam ex differentia crurum, & duplo exceſſu, quo baſis ſuperat crus maius, ita eſt differentia crurum ad baſim.

Ex hoc Poriſmate idem apparet quod ex præcedenti, eadem ergo Determinatio, quæ illic, intelligatur hic quoq; appoſita, ac demonſtrata.

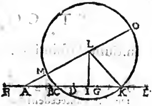
Primi Caſus Compoſitio ſecunda,

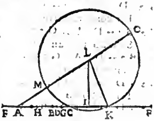
SIt data vt in priori Compoſitione differentia crurum trianguli AB, differentia ſegmentorum baſis A C, & exceſſus, quo baſis ſuperat crus maius B D, & oporteat inuenire triangulum. Producatur C A in F, vt ſit C F dupla ipſius A B, dupla enim A B maior eſt, quàm A C, ex determinatione; Deinde fiat vt A F ad A G, ita A B ad aliam, quæ ſit A K, ea maior erit quam A C, vt demonſtratum eſt ſub antecedenti Compoſitione. Secetur ergo C k biſariam in I ad rectos angulos à recta I L, in qua ponatur K L æqualis K D eſt autem k D maior, quàm k I, vt ſub eadem Compoſitione demonſtrauimus, & iungatur A L. Hæc conſtructio eadem eſt, quæ in præcedenti compoſitione; quoniam vtraque fit per rationem vnius, eiuſdemque **D**

Po-

A Poriſmatis. In triangulo igitur L A k differentia ſegmentorum baſis A I, I K eſt ipſa A C data, cum ſint æquales C I, I k, ex conſtructione. vt autem oſtendantur reliqua, centro L interuallo L k circulus deſcribatur ſecans A L in M, productum vero in O; is circulus tranſibit per C, cum ſint æquales C I, I K. deinde producatur A K in E, vt ſit k E æqualis k G. Quoniam igitur E G dupla eſt ipſius K G, & G B dupla ipſius G D, tota E B erit dupla totius k D, hoc eſt ipſius k L, ſed & M O dupla eſt ipſius L k, ergo æquales

B erunt B E, M O.





Et quoniam eſt vt A F ad A G, ita A B ad A k, erit permutando vt A F ad A B ita A G ad AK, & conuertendo vt A B ad A F, ita A K ad A G, & duplatis antecedentibus vt F C ad A F, ita erit A K bis ad A G, & per conuerſionem rationis vt F C ad A C, ita A k bis ad A E, & rurſus ſubduplatis antecedentibus, vt A B ad A C, ita erit A K ad A E, ſed vt A C ad A M, ita eſt A O ad A K; ergo in perturbata proportione erit vt A B ad A M, ita A O ad A E; atque M O oſtenſa eſt æqualis B E, ergo & A M * æqualis erit A B. reſtat igitur vt Theor. 4 huius
baſis A k ſuperet crus maius L A, exceſſu B D; id autem ita fit manifeſtum.

C Quoniam enim L k ſuperatur ab A k, exceſſu A D; ex conſtructione, ab L A verò exceſſu A B, vt demonſtrauimus, L A ſuperabitur ab A k, reliquo exceſſu B D. Conſtructum eſt igitur triangulum E A K, &c. quod faciendum erat.

Scholium.

Hæc demonſtratio procedit per reſolutionis filum vſque ad illam ſeriem quatuor proportionalium A B, A C, A K, A E incluſiue, ordine vt hìc iacent diſpoſitarum, illinc enim Reſolutio ſumpſit initium. Sed quoniam A M conferenda eſt cum A B, ad quod omne conſilium dirigi debet, opus

D fuit eximere duas medias proportionales A C, A k, & in earum locum alias duas ſubrogare A M, A O; quippe quæ prioribus ad conſtitutionem proportionalium manentibus extremis A B, A E ſunt æquiualentes; cùm rectangulum C A K * æquale ſit rectangulo M A O, quæ quidem ſubrogatio 16 tertij
fit per argumentationem ex æquali in proportione perturbata, vt cernitur.

CONSPECTVS RESOLVTIONIS, A
ET COMPOSITIONIS.

Initium Reſolutionis.

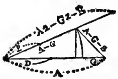
B D A A2 -- G2 -- B
Duplatis antecedentibus
B2 D A2 A2 -- G2 -- B
Per conuerſionem rationis
B2 B2 -- D A2 G2 † B
Subduplatis antecedentibus
B B2 -- D A G2 † B
Conuertendo
B2 -- D B G2 † B A
Per mutando
B2 -- D G2 † B B • A

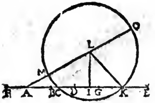
Finis Reſolutionis.

Finis Compoſitionis.

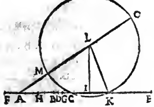
AM AO
AB AC AK AE
Subduplatis antecedentibus
FC AC AK2 AE
Per conuerſionem rationis
FC AF AK2 AG
Duplatis antecedentibus
AB AF AK AG B
Conuertendo
AF AB AG AK
Permutando
AF AG AB AK

Initium Compoſitionis.





C



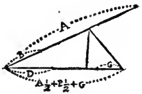
D

Alias duas Reſolutiones, & Compoſitiones eiuſdem Caſus proferam, quarum altera per æqualitatem, altera per proportionem procedet; ſed aliter atque in præcedentibus, in ijs enim quæſita eſt baſis trianguli; in his de aggregato crurum quæram.

A

Primi Caſus Reſolutio tertia.

Iſdem datis, nempe differentia crurum trianguli B, differentia ſegmentorum baſis D, & exceſſus quo baſis ſuperat crus maius G. Oportet inuenire triangulum.



Corol. 1 Probl. 2 primi

Aggregatum crurũ de quo quæratur eſtò A, ergo duplum cruris maioris* erit $A + B$; quare ſimplum $A\frac{1}{2} + B\frac{1}{2}$ & cum baſis ſuperet crus maius exceſſu G, erit baſis $A\frac{1}{2} + B\frac{1}{2} + G$. & quoniam rectangulum ſub differentia crurum trianguli, & aggregato eorundem æquale eſt rectangu-

B lo ſub differentia ſegmentorum baſis, & ipſa baſe; ideo

B in A æquabitur D in $A\frac{1}{2}$ † D in $B\frac{1}{2}$ † D in G.

Et duplicatis omnibus vt fractiones vitentur

B in A 2 æquabitur D in A † D in B + D in G 2

Auferatur vtrinque D in A, vt cognita ab incognitis diſtinguantur, ergo

B in A 2 — D in A æquabitur D in B + D in G 2

Seu quod idem eſt B 2 — D) in A æquabitur B † G 2) in D

Et æqualitate ad proportionem reuocata. proportionales erunt

B 2 — D   B + G 2   D   A

Poriſma.

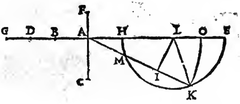
C Vt exceſſus, quo dupla differentia crurum trianguli ſuperat differẽtiam ſegmentorum baſis ad compoſitam ex differentia crurum, & duplo exceſſu, quo baſis ſuperat crus maius, ita eſt differentia ſegmentorum baſis ad aggregatum crurum.

Datur ergo aggregatum crurum.

Idem apparet ex hoc Poriſmate, quod ex præcedẽtibus, nempè duplam differentiam crurum, maiorem eſſe differentia ſegmentorum baſis; quare intelligatur hìc quoque eadem determinatio, quæ ſupra.

Primi Caſus Compoſitio tertia.

D Sit data differentia crurum trianguli, A B, differentia ſegmentorum baſis A C, & exceſſus quo baſis ſuperat crus maius B D. Oportet inuenire triangulum. Poſitis in directũ A B, B D, duplicetur B D in G, & C A producatur in F, vt ſit C F dupla ipſius A B, eſt autẽ A B dupla maior, quàm A C, ex Determinatione. Deinde fiat vt A F ad A G, ita A C ad aliam, quæ ſit A E, ea maior erit, quàm A G,



quia & A C maior eſt, quàm A F, atque ablatis A B ab A G, & A H, æquali ipſi A B ab A E, reliqua H E maior erit, quàm reliqua B G, & cum ſecetur H E bifariam in L, erit quoque L E maior, quàm B D, quæ dimidia eſt ipſius G B. in ipſa igitur L E ſumatur L O æqualis B D, & centro L interuallo L E, vel L H deſcribatur circulus. ſimiliter centro A interuallo A O alius circulus deſcribatur ſecans priorem in K, & iungantur A K, L K, ipſam autẽ A k ſecet circulus E k H in M, perpendicularis vero L I in I. Itaque conſtructũ eſt triangulum L A k quemadmodum Poriſma docet, factum eſt enim vt A F exceſſus, quo A B dupla ſuperat A C ad A G compoſitam, ex A B, & B D dupla, ita A C ad A E aggregatum crurũ trianguli A L K. Huius igitur trianguli crura L A, L K differunt per A k æqualem datæ A B, ex conſtructione; baſis verò A k ſuperat crus maius A L exceſſu L O æquali ipſi B D, pariter ex conſtructione. Supereſt igitur vt differentia ſegmentorum baſis oſtendatur æqualis datæ A C, id autem repetendo reſolutionis veſtigia, ita perſpicuũ fiet. A B

3 Tertij Quoniam enim L I perpendicularis eſt ad A k * erunt æquales M I, I K; quare differentia ſegmentorum A I, I K, erit A M. Et quoniam eſt vt A F ad A G, ita A C ad A E, rectangulum F A E ſub extremis, æquale eſt rectangulo C A G ſub medijs, ſed rectangulum F A E, idem valet, quod rectangulum F C A E minus rectangulo C A E, hoc eſt idem valet, quod rectangulum H A E bis, minus rectangulo C A E, ergo rectangulum H A E bis, minus rectangulo C A E, æquale erit rectangulo C A G, addito vtrique parti rectangulo C A E, rectangulũ H A E bis, æquale erit rectangulo C A G, plus rectangulo C A E; hoc eſt æquale erit rectangulo, C A, G E, ſed rectangulum C A, G E duplum eſt rectanguli C A O, nam cum ſint æquales A B, A H, & æquales quoque L E, L H, erit E B dupla ipſius A L, ſed & B G dupla eſt ipſius L O, ergo tota E G dupla erit totius A O, & conſequenter rectangulum C A, G E duplum rectanguli C A O. rectangulum igitur H A E bis, hoc eſt M A K, bis, æquale erit rectangulo C A O bis, vel C A k bis, vnde & rectangulum M A K ſemel, æquale rectangulo C A K ſemel, quare & recta M A æqualis rectæ A C, quod erat oſtendendum. Conſtructum eſt igitur L A K, &c. quod faciendum erat. C

Primi Caſus Reſolutio quarta.

Theor. 7 huius IIſdem datis, poſitiſque prout in antecedenti Reſolutione. Quoniam * eſt vt differentia crurum ad differentiam ſegmentorum baſis, ita baſis ad aggregatum crurum, erunt proportionales. D

B D A$\frac{1}{2}$ ✢ B$\frac{1}{2}$ ✢ G A

Et duplatis antecedẽtib', proportionales erũt

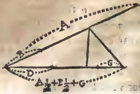
B 2 D A ✢ B ✢ G 2 A

Et diuidendo erunt quoque proportionales

B 2 — D D B ✢ G 2 A

Et permutando erunt proportionales

B 2 — D B ✢ G 2 D A.



Hæc

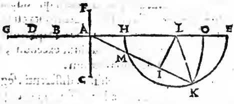
A Hæc permutatio quamuis non ſit neceſſaria, cum & in penultima proportionalium ſerie primi tres termini cogniti exiſtant; tamen facta eſt, vt cum ſit eadem proportio, quæ in antecedenti Reſolutione, ſit quoque idem & Poriſma.

Poriſma.

Vt exceſſus quo dupla differentia crurum trianguli ſuperat differentiam ſegmentorum baſis, ad compoſitam ex differentia crurum, & duplo exceſſu, quo baſis ſuperat crus maius; ita eſt differentia ſegmentorum baſis ad aggregatum crurum.

Primi Caſus Compoſitio quarta.

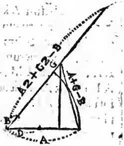
B Iiſdem datis quæ in antecedenti compoſitione, eademque conſtructione facta. oſtendendum eſt A M differentiam ſegmentorum baſis æquari A C datæ; cætera enim, vt illic, ex conſtructione patet.



Quoniam enim vt A F ad A G, ita eſt A C ad A E, ex conſtructione, erit permutando, vt A F ad A C, ita A G ad A E, & componendo vt FC ad AC, ita G E ad A E, ſed F C dupla eſt ipſius A B, vel A H ex conſtructione, & G E
C dupla ipſius A O, vt oſtenſum eſt in præcedenti compoſitione, ergo ſubduplatis antecedentibus erit A H ad A C, vt A O, hoc eſt A k ad A E, ſed & A H ad A M, eſt quoque vt A k ad A E, ergo vt A H ad A C ita erit eadem A H ad A M, quare A M æqualis erit A C, quod erat oſtendendum. Conſtructum eſt igitur triangulum L A k in quo A H differentia crurũ æqualis eſt datæ AB, & A M differentia ſegmentorum baſis, æqualis A C, atque L O exceſſus, quo baſis A k ſuperat crus A L, æqualis B D, quod facere oportebat.

Reſolutio Secundi Caſus.

Deinde exceſſus, qui eſt inter crus maius, & baſim ſit penès ipſum crus, atq; differentia ſeg-
D mentorum baſis ſit maior, quàm dupla differentia crurum.



Sit igitur data differentia crurum trianguli B, differentia ſegmentorum baſis D, quæ ſit maior; quàm dupla B, & exceſſus, quo crus maius ſuperat baſim ſit G. oportet inuenire triangulum.

Baſis trianguli eſto A, ergo crus maius erit A + G, crus minus A + G — B, differunt enim crura per B, atque adeo aggregatum crurum erit A 2 + G 2 — B, & quoniam rectangulũ ſub differentia crurum, & aggregato eorundẽ *æquale eſt Theor. 6 huius

eſt rectangulo ſub differentia ſegmentorum baſis, & ipſa baſe, ideo A

B in A 2 + B in G 2 — B Q æquabitur D in A.

Quoniam autem ponitur D maior, quàm dupla B, planum D in A maius erit plano B 2 in A, vel quod idem eſt B in A 2, itaque poterit B in A 2 auferri A D in A. auferatur ergo vtrinque, vt cognita ad incognitis ſeparentur, ergo

B in G 2 — B Q æquabitur D in A — B in A 2.

Seu quod idem eſt G 2 — B) in B æquabitur D — B 2) in A

Et reuocata ad proportionem æqualitate, erunt proportionales

D — B 2 G 2 — B B A

Poriſma.

Vt exceſſus quo differentia ſegmentorum baſis trianguli ſuperat duplam differentiam crurum, ad exceſſum quo dupla differentia inter crus maius, & baſim ſuperat differentiam crurum, ita eſt differentia crurum, ad baſim. B

Datur ergo baſis trianguli de qua quæritur.

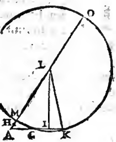
Ex Poriſmate apparet duplum exceſſum, quo crus maius ſuperat baſim, maiorem eſſe differentia crurum.

Apparet quoque exceſſum, differentia ſegmentorum baſis ſuperat duplam differentiam crurum. ad exceſſum quo dupla differentia cruris maioris, & baſis ſuperat differentiam crurum, minorem habere rationem, quàm differentiam crurum ad differentiam ſegmentorum baſis. primus enim exceſſus ad ſecundum ſe habet vt differentia crurum ad baſim. ſic Poriſma indicat.

Hæc omnia oſtendenda ſunt vt data intra terminos coerceantur, non enim ex quibuſcunque datis Problema conſtrui poſſe manifeſtum eſt. Dico igitur Lemmata ad determinationes pertinentia ſic propono. C

Lemma I.

Si baſis trianguli fuerit crure maiore minor; differentia autem ſegmentorum baſis fuerit maior, quàm dupla differentia crurum; Duplus exceſſus, quo crus maius ſuperat baſim, maior erit quàm differentia crurum.



Sit triangulum L A k, in quo perpendicularis L I ſecet baſim A k in duo ſegmenta A I, I k, & centro L interuallo L K. cruris minoris, deſcribatur circulus ſecans baſim A k in C, crus vero L A in M, ipſumque productum in O. Differentia igitur crurum L A, L K erit A M, differentia vero ſegmentorum A I, I k erit A C. ſit autem baſis A K minor crure L A; ipſa autem A C maior, quàm dupla A M. Dico duplum exceſſum, quo crus A L ſuperat baſim A k, maiorem eſſe, quàm A M. Secetur enim A M bifariam. in D

Theor. 7 huius H, erit igitur L H dimidia ipſius A O; Et quoniam* eſt vt A M ad A C, ita A k ad A O, duplatis antecedentibus erit, vt A M dupla ad

A ad A C, ita dupla A K ad A O, ſed A M dupla ponitur minor, quàm A C, ergo & A k dupla minor erit quàm A O; & conſequenter A K ſimpla minor, quam L H, dimidia videlicet ipſius A O; quare exceſſus, quo L A ſuperat A K maior erit, quàm A H, & per conſequens duplus eſt exceſſus maior, quàm dupla A H, hoc eſt, quàm A M. quod erat oſtendendum.

Lemma II.

Iiſdem poſitis. Exceſſus, quo differentia ſegmentorum baſis ſuperat duplam differentiam crurum, ad exceſſum quo dupla differentia cruris maioris, & baſis ſuperat differentiam crurum, minorem habebit rationem, quàm differentia crurum ad differentiam ſegmentorum baſis.

B

Reſumatur antecedentis Lemmatis figura, & M A duplicetur in B, ac etiam producatur in F, vt ſit M F æqualis A C. producatur quoque A K in E, vt ſit A E æqualis A L; & ſumatur B G dupla ipſius K E. Dico B F ad A G, minorem rationem habere, quàm A M ad A C. Hoc demonſtrabitur progrediendo per filum reſolutionis directo ordine, non inuerſo. hac ratione.



Quoniam enim æquales ſunt B A, A M, & æquales quoque M L, L O, erit B O dupla ipſius A L, hoc eſt

C ipſius A E. Et quoniam rectangulum M A O, hoc eſt B A O, ſeu quod idem valet rectangulum A B O, minus quadrato A B æquale eſt rectangulo C A K, ſed cùm ſit B O dupla ipſius A E; rectangulũ A B O æquale eſt duplo rectanguli B A E, hoc eſt duplo rectanguli B A K, & duplo rectanguli B A, k E; hoc eſt & ſimplo rectangulo A B G, eſt enim B G dupla ipſius k E, ergo duplum rectanguli B A k, plus rectangulo A B G minus quadrato A B, æquale erit rectangulo C A k, hoc eſt, rectangulo M F, A K; auferatur vtrinque duplum rectanguli B A K, ergo rectangulũ A B G minus quadrato A B, hoc eſt, rectangulum B A G æquale erit rectangulo M F. A K, minus duplo rectanguli B A K, hoc eſt, minus rectangulo M B A k, ſeu quod idem eſt, æquale erit rectangulo F B A k. Cùm igitur rectangulum

D B A G æquale ſit rectangulo F B A k, reuocata ad proportionem æqualitate; erit vt F B ad A G ita B A, hoc eſt A M, ad A K, ſed A M ad A K, minorem rationem habet, quàm A M ad A C, ergo & F B ad A G, minorem rationem habebit, quàm A M ad A C. quod erat oſtendendum.

His igitur demonſtratis patet, non ex quibuſcumque datis Problema conſtrui poſſe; ideo præfiniendi ſunt limites, intra quos data conſiſtant.

Determinatio I.

Oportebit duplum exceſſum, quo crus maius ſuperat baſim maiorem eſſe differentia crurum.

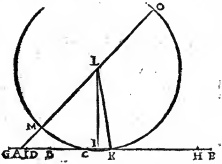
De-

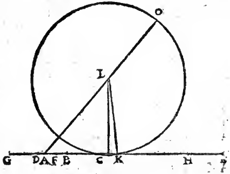
Determinatio II. A

OPortebit quoque exceſſum quo differentia ſegmentorum baſis ſuperat duplam differentiam crurum, ad exceſſum quo dupla differentia cruris maioris, & baſis ſuperat differentiam crurum, minorem rationem habere, quàm differentiam crurum, ad differentiam ſegmentorũ baſis.

Compoſitio ſecundi caſus.

SIt data differentia crurum trianguli A B, differentia ſegmentorum baſis A C, quæ ſit maior, quàm dupla A B, & exceſſus quo crus maius ſuperat baſim B D. Oportet inuenire triangulum, ergo oportebit duplam B D maiorem eſſe quàm A B, & exceſſum, quo A C ſuperat duplam A B ad exceſſum; quo B D dupla ſuperat A B, minorem rationem habere, quàm A B ad A C. Ponatur ergo C F æqualis duplæ A B, & duplicetur B D in G, & fiat vt A F ad A G, ita A B ad aliam quæ ſit A k, ea ex præcepto Poriſmatis debet fieri baſis trianguli conſtruendi, atque habebit A B ad A k minorem rationem, quàm A B ad A C quoniam & A F ad A G, minorẽ rationẽ habet quàm A B ad A C ex determinatione, quare Ak maior erit, quàm A C, Secetur ergo C K bifariam in I à perpendiculari I L, in qua ponatur k L æqualis K D, & iungatur L A. B C D





Poſuimus K L æqualem k D, pro crure minore trianguli conſtruendi; nam cum crus maius debeat ſuperare crus minus exceſſu A B, baſim vero exceſſu B D minori in prima figura quàm A B, baſis A K maior eſſe debet crure minore exceſſu D A. In ſecunda autem figura, crus maius trianguli conſtruendi, debet ſuperare crus minus, exceſſu A B, baſim vero, exceſſu B D qui maior eſt, quàm A B, ergo baſis A K minor eſſe debet crure minore, exceſſu D A. Triangulum igitur L A k conſtitutum eſt quemadmodum Poriſma docet; eſt enim vt A F exceſſus, quo A C ſuperat duplam A B ad A G exceſſum, quo B D dupla ſuperat A B, ita A B ad A K baſim trianguli

guli

A guli L A k; in eo autẽ triangulo eſſe ea, quæ requiruntur, ſic demonſtrabitur.

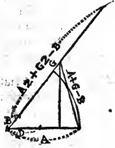
Centro L interuallo L K deſcribatur circulus ſecans A L in M, productam vero in O, is circulus tranſibit per C cum ſint æquales C I, I k; differentia igitur ſegmentorum baſis A I, I k erit ipſa A C data. Duplicetur autem G K in E, & fiat E H æqualis G A. Quoniam igitur E G dupla eſt ipſius k G, & G B dupla ipſius G D, erit & reliqua E B dupla reliquæ k D, vel K L, atque adeo B E, M O æquales erunt.

Et quoniam eſt vt A F ad A G, ita A B ad A k, rectangulum B A G ſub medijs, æquale erit rectangulo F A k, ſub extremis; hoc eſt rectangulo C A K, minus rectangulo C F, A k, ſeu minus duplo rectanguli B A k recta enim C F dupla eſt ipſius A B, ex conſtructione. addatur vtrique parti duplum re-
B ctanguli B A k, ergo rectangulum B A G, vnà cum duplo rectanguli B A K, hoc eſt vna cum rectangulo B A H; ſeu quod idem valet, rectangulum B A G H, vel B A E æquale erit rectangulo C A k, hoc eſt M A O, atqui ſunt æquales M O, B E, vt eſt demonſtratum, ergo * & A M differentia crurum A L, L K, æqualis erit ipſi A B. Supereſt igitur vt crus A L maius ſit baſe A K, exceſſu B D; id autem ita fit manifeſtum. Theor. 1 huius

Quoniam enim in prima figura crus L k ſuperatur à crure A L, exceſſu A B, vt oſtendimus, à baſe vero A K exceſſu A D, ex conſtructione, baſis A k ſuperabitur à crure A L reliquo exceſſu B D, in ſecunda vero figura baſis A k ſuperatur à crure L K, exceſſu D A, ex conſtructione, ipſumque crus L k ſuperatur à crure L A, exceſſu A B, ergo baſis A k ſuperabitur à crure
C A L vtroque exceſſu D A, A B; hoc eſt exceſſu B D, quod erat oſtendendum. Conſtructum eſt igitur triangulum L A K, in quo A M differentia crurum A L, L k æqualis eſt datæ A B, & differentia ſegmentorum baſis A I, I K, eſt ipſa A C data, atque crus maius A L ſuperat baſim A k exceſſu B D quod erat faciendum.

Aliter eundem caſum breuiori via & reſoluam & componam, omiſſaque æqualitate, proportione vtar.

Alia Reſolutio Secundi caſus.



D SIt data differentia crurum trianguli vt prius B; differentia ſegmẽtorum baſis D, & exceſſus quo crus maius ſuperat baſim, G, & oporteat inuenire triangulum. Baſis trianguli eſto A, ergo crus maius erit A + G, crus minus A + G — B, vnde aggregatum crurum A 2 + G 2 — B. Et quoniam eſt * vt differentia ſegmentorum baſis ad differentiam crurum, ita aggregatum crurum ad baſim; erunt proportionales. Theor. 9 huius

D B A 2 + G 2 — B A

Et duplatis conſequentibus, proportionales erunt.

D B 2 A 2 + G 2 — B A 2

Et

Et quoniam dupla differentia crurum ponitur minor, quàm differentia A ſegmentorum baſis, hoc eſt B 2 ponitur minor quàm D, poterit B 2 auferri à D, ergo à diuiſione rationis argumentabor; hoc eſt diuidendo proportionales erunt

D — B 2 B 2 G 2 — B A 2.

Et rurſus ſubduplatis conſequentibus, erunt proportionales

D — B 2 B G 2 — B A

Atque permutando proportionales erunt.

D — B 2 G 2 — B B A

Hæc permutatio licet non ſit neceſſaria, cum in præcedenti quoque proportionalium ſerie dentur primi tres termini; tamen addita eſt, quò commodius Poriſma, ac Determinationes ordinentur. B

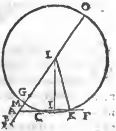
Poriſma.

Vt exceſſus, quo differentia ſegmentorum baſis trianguli ſuperat duplam differentiam crurum ad exceſſum, quo dupla differentia inter crus maius, & baſim ſuperat differentiam crurum, ita eſt differentia crurum ad baſim.

Illud ipſum Poriſma eſt, quod ex antecedente Reſolutione deducitur. Eadem ergo Lemmata, eædemque determinationes, quæ illic, hic quoque intelligantur præpoſitæ. Sed quoniam ſecundum illud Lemma, quod ad ſecundam Determinationem huius Caſus pertinet, oſtenditur per repetitionem veſtigiorum Reſolutionis, eaque reſolutio procedit per æqualitatem, hæc C autem per proportionem; idem Lemma hic etiam, ſed aliter, omiſſa æqualitate, per proportionem demonſtrabo.

Lemma.

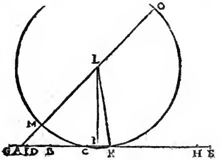
Si baſis trianguli fuerit crure maiore minor, differentia autẽ ſegmentorum baſis fuerit maior, quàm dupla differentia crurum, Exceſſus quo differentia ſegmentorum baſis ſuperat duplam differentiam crurum, ad exceſſum quo dupla differentia inter crus maius, & baſim ſuperat differentiam crurum, minorem rationem habebit quàm differentia crurum ad differentiam ſegmentorum baſis. D

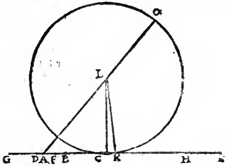


Reſumatur eiuſdem Lemmatis figura, & fiat eadem conſtructio. Dico B F exceſsũ quo A C, ſuperat duplam A M ad A G, exceſſum quo dupla K E ſuperat A B, vel A M, minorem rationem habere, quàm A M ad A C. Quoniam enim A L ſuperat A K dimidia B G; eſt enim B G dupla ipſius, K E, ſuperabit dupla A L, hoc eſt recta B O duplam A k tota B G, quare G O dupla erit ipſius A K. Et quoniam eſt vt A C, hoc eſt F M ad A M, ita A O ad A k; duplatis conſe-

A conſequentibus, erit vt F M ad M B, ita A O ad G O, & diuidendo, vt F B ad B M; ita A G ad G O, ruſus ſubduplatis conſequentibus erit F B ad A M, ita A G ad A K, & permutando, vt F B ad A G, ita A M ad A k, ſed A M ad A K, minorem rationem habet, quàm A M ad A C, ergo & F B ad A G, minorem rationem habebit, quàm A M, ad A C, quod erat oſtendendum.

Alia Compoſitio ſecundi caſus.





IIſdem datis, quæ in antecedenti Compoſitione, eademque facta coſtructione, Oſtēdendum eſt in triangulo L A k,
B eſſe ea quæ requiruntur. Quoniam enim eſt vt A F ad A G, ita A B, ad A k, ex conſtructione, erit permutando, vt A F ad A B, ita A G ad A K, & duplatis conſequentibus, vt A F ad F C, ita A G ad A K, & componendo, vt A C ad F C, ita erit G H, hoc eſt A E, ad A H; & rurſus ſubduplatis cōſequentibus, vt A C ad A B, ita erit A E ad A k. Vt autem
C A B conferatur cum A M, deleātur extremæ A C, A K proportionalium, & in earum locum ſubſtituantur A M, A O, quippe quæ ad conſtitutionem proportionalium, manentibus medijs A B, A E ſunt æquiualentes: propter quod rectangulū M A O, æquale eſt rectangulo, C A k; ſed ad eas delendas, aliaſque ſubſtituendas oportet prius commutare extremas proportionalium. cum medijs; nam argumentatio ex æquali in proportione perturbata eximit medias proportiona-
D lium, aliaſque ſubſtituit; non autem eximit extremas. Conuertantur itaque proportionales vt extremę cum medijs commutentur; ergo, vt A B ad A C, ita erit A k ad A E; ſed vt A C ad A M, ita eſt A O ad A k, ergo in perturbata proportione erit, vt A B ad A M, ita A O ad A E; atque ſunt æquales M O, B E, vt oſtenſum eſt in antecedenti Compoſitione, ergo* & A M differentia crurum A L, L K, æqualis erit A B datæ. differentia autem ſegmentorum baſis A I, I k eſt ipſa A C data: & baſim A K ſuperari à crure A L, exceſſu B D oſtendetur eadem ratione, qua in antecedenti compoſitione. Conſtructum eſt igitur triangulum L A k, &c. quod faciendum erat. Theor. 4. huius

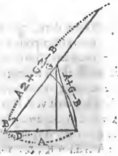
Re-

A

Reſolutio Tertij Caſus.

RVrſus ſit exceſſus, qui eſt inter crus maius,& baſim penes ipſum crus, ſed differentia ſegmentorum baſis ſit minor,quàm dupla differentia crurum; ſit igitur data differentia crurum trianguli B differentia ſegmentorum baſis D minor, quàm dupla B, & exceſſus, quo crus maius ſuperat baſim ſit G. Oportet inuenire triangulum. Baſis trianguli eſto A, ergo crus maius erit A + G crus minus A + G — B, atque adeo aggregatum crurum erit A 2 + G 2 — B. Et quoniam rectangulum ſub differentia crurum, & aggregato eorumdem, *æquale eſt rectangulo ſub differentia ſegmentorum baſis, & ipſa baſe, ergo B

Theor.4 huius



B in A 2 + B in G 2 — B Q æquabitur D in A

Et quoniam ponitur D minor,quàm B 2, planum D in A minus erit, plano B 2 in A, vel B in A 2, quod idem eſt; itaque B in A 2 non poterit vtrinque auferri, vt cognita ab incognitis ſeparentur, quia auferetur etiam à D in A, maius videlicet à minore, quod eſſet impoſsibile, ergo vt ſeparentur cognita ab incognitis, addatur vtrique parti B Q, & auferatur B in G 2. ergo

B in A 2 æquabitur D in A + B Q — B in G 2

Et auferatur quoque D in A. ergo

B in A 2 — D in A æquabitur B Q — B in G 2 C

Seu quod idem eſt (B 2 — D) in A æquabitur (B — G 2) in B.

Et reuocata ad proportionem æqualitate proportionales erunt

B 2 — D B — G 2 B A

Poriſma.

Vt exceſſus, quo dupla differentia crurum trianguli ſuperat differentiam ſegmentorum baſis, ad exceſſum quo differentia crurum ſuperat duplam differentiam cruris maioris, & baſis; ita eſt differentia crurum ad baſim.

Ex hoc Poriſmate apparet, duplum exceſſum, quo crus maius ſuperat baſim, minorem eſſe differentia crurum.

Apparet etiam,exceſſum,quo dupla differentia crurum ſuperat differentiam ſegmentorum baſis, ad exceſſum, quo differentia crurum ſuperat duplam differentiam cruris maioris, & baſis, minorem rationem habere, quàm differentiam crurum ad differentiam ſegmentorum baſis; primus enim exceſſus ad ſecundum ſe habet, vt differentia crurum ad baſim. ſic Poriſma indicat. Quæ quoniam ad determinationes pertinent, oſtendenda ſunt. Lemmata igitur ad id opus ſic propono. D

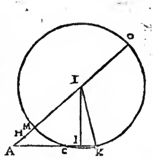
Lem-

A

Lemma I.

Si baſis trianguli fuerit crure maiori minor, ac etiam differentia ſegmentorum baſis minor, quàm dupla differentia crurum. Duplus exceſſus quo crus maius ſuperat baſim, minor erit, quàm differentia crurum.

Sit triangulum L A K, in quo perpendicularis L I ſecet baſim A K in duo ſegmẽta A I, I K, & centro L interuallo L K, cruris minoris, deſcribatur circulus ſecans baſim A K in C, crus vero K L in M, ipſumque



B continuatum in O. differentia igitur crurum LA, LK erit A M, differentia vero ſegmentorum A C. Sit autẽ baſis A K minor crure maiori AL, & A C minor, quàm dupla A M. Dico duplum exceſſum, quo A L ſuperat A k, minorem eſſe, quàm A M. Secta enim A M bifariam in H erit A O dupla ipſius L H. Et quoniam eſt vt A M ad A C, ita A K ad A O, duplatis antecedentibus, erit vt A M dupla ad AC, ita dupla A K ad A O, ſed dupla A M ponitur maior quàm A C, ergo & A k dupla, maior erit, quàm A O, & conſequenter A k ſimpla, maior quam L H, dimidia videlicet ipſius A O; ſed A k ponitur minor, quàm A L; ergo ipſa A L ſupe-

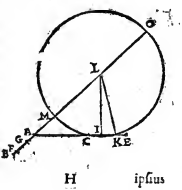
C rat A K exceſſu minori, quàm A H, & per cõſequens duplus exceſſus, quo A L ſuperat ipſam Ak, minor erit, quàm A M, quæ eſt dupla ipſius A H, quod erat oſtendendum.

Lemma I I.

Iiſdem poſitis. Dico inſuper exceſſum, quo dupla differentia crurum ſuperat differentiam ſegmentorum baſis, ad exceſſum quo differẽtia crurũ ſuperat duplam differentiam cruris maioris, & baſis, minorem habere rationem, quàm differentiam crurum ad differentiam ſegmentorum baſis.

Reſumatur enim antecedentis Lemmatis figura, & duplicetur M A in

D B, ab eaq. abſcindatur MF æqualis AC, & producatur A k in E, vt ſit AE æqualis AL, & rectæ k E: fiat dupla BG. ea minor erit quam A B, ex antecedente Lemmate. Oſtendendum eſt igitur B F ad G A minorem rationem habere, quàm A M ad A C, idque fiet per reſolutionis filum procedendo, directo tamen ordine. Quoniam igitur æquales ſunt A B, A M, & æquales quoq; M L, L O, erit B O dupla



ipſius

ipſius A L, vel A E. Et quoniam rectangulum M A O, hoc eſt B A O, ſeu A
quod idem valet rectangulum A B O, minus quadrato A B, æquale eſt re-
ctangulo C A k, rectangulum autem A B O æquatur duplo rectanguli BAE,
cum ſit B O dupla ipſius A E, hoc eſt æquatur duplo rectanguli B A K, &
duplo rectanguli B A, K E, ergo duplum rectanguli B A K vnà cum duplo
rectanguli B A, k E (minus quadrato A B æquale erit rectangulo C A K;
addatur vtrobique quadratum B A, & auferatur duplum rectanguli B A, kE,
hoc eſt rectangulum A B G. eſt enim B G dupla ipſius k E, ergo duplum
rectanguli B A k æquabitur rectangulo C A k, & quadrato B A, minus re-
ctangulo A B G; ablato vtrinque rectangulo C A k, duplum rectanguli
B A K, minus rectangulo C A k, hoc eſt rectangulum M B, A k minus re-
ctangulo C A k, vel M F, A K, ſeu quod idem valet, rectangulum B F, B
A k, æquabitur quadrato B A, minus rectangulo A B G, hoc eſt æquabitur
11 ſexti rectangulo B A G. reuocata igitur ad proportionem æqualitate erit* vt B F ad
A G, ita Ab, vel A M ad A K, ſed A M ad A K minorem rationem habet,
quàm A M ad A C, & ergo B F ad A G, minorem ratiõe habebit, quàm A M
ad A C. quod erat oſtendendum.

His igitur demonſtratis præponendæ ſunt huiuſmodi Determinationes.

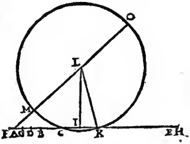
Determinatio I.

OPortebit duplum exceſſum, quo crus maius ſuperat baſim, minorem
eſſe differentia crurum.

Determinatio I I. C

OPortebit quoque exceſſum, quo dupla differentia crurum ſuperat diffe-
rentiam ſegmentorum baſis, ad exceſſum quo differentia crurum ſu-
perat duplam differentiam cruris maioris, & baſis, minorem rationẽ
habere, quàm differentiam crurum ad differentiam ſegmentorum baſis.

Compoſitio tertij caſus.



SIt data differentia crurum trianguli
A B; differentia verò ſegmentorum
baſis A C, quæ ſit minor, quàm du-
pla A B, exceſſus autem, quo crus maius
ſuperat baſim ſit B D. Oportet inueni- D
re triangulum. Oportet autem, ex Deter-
minatione prima, B D duplam, minorem
eſſe, quàm A B; ex Determinatione vero
ſecunda, oportet exceſſum, quo A B du-
pla ſuperat A C ad exceſſum, quo AB ſu-
perat duplam BD, minorẽ rationẽ habe-
re, quàm AB ad AC. Ponatur igitur C F
æqualis duplæ AB, & duplicetur BD in G, & fiat vt A F ad AG, ita A B ad aliã
quæ ſit A K, ea ex præcepto Poriſmatis debet fieri baſis trianguli conſtruendi,
atque

A atque habebit A B ad A k minorem rationem, quàm A B ad A C, quoniam & A F ad A G minorem rationem habet, quàm A B ad A C ex determinatione; quare A k maior erit, quàm A C. Secetur ergo C k bifariam in I perpendiculariter à recta I L, in qua ponatur K L æqualis k D, & iungatur L A. poſita eſt K L æqualis K D, pro crure minore crianguli conſtruendi; nam cum crus maius trianguli debeat ſuperare crus minus, exceſſu A B; baſim vero exceſſu B D; baſis A K maior eſſe debet crure minori, exceſſu D A; itaque triangulum L A k conſtructum eſt, quemadmodum Poriſma docet; eſt enim vt A F exceſſus, quo dupla A B ſuperat A C ad A G exceſſum, quo A B ſuperat duplam B D; ita A B ad A k baſim trianguli L A K. in eo autem triangulo eſſe ea, quæ requiruntur, ſic demonſtrabitur.

B Centro L interuallo L k deſcribatur circulus ſecans A L in M, ipſamque productam in O, is circulus tranſibit per C cum ſint æquales CI, I k. Differentia igitur ſegmentorum baſis A I, I k, erit ipſa A C data. Duplicetur autem G K in E, & A k in H. Quoniam igitur E G dupla eſt ipſius K G, & B G dupla ipſius G D, erit & reliqua E B dupla, reliquæ K D, vel K L, atque adeo B E, M O æquales erunt.

Et quoniam eſt vt A F ad A G, ita A B ad A k, rectangulum F A k ſub extremis, æquale erit rectangulo B A G ſub medijs, ſed rectangulum F A K æquale eſt rectangulo C F, A K, minus rectangulo C A k, ſeu æquale eſt rectangulo B A k bis, minus rectangulo C A k (eſt enim C F dupla ipſius A B) ergo rectangulum B A K bis, minus rectangulo C A K æquabitur re-

C ctangulo B A G; addatur vtrique parti rectangulum C A k, ergo rectangulum B A k bis, hoc eſt rectangulum B A H, æquabitur rectangulis C A K, B A G; auferatur vtrinque rectangulum B A G, ergo rectangulum B A H, minus rectangulo B A G, ſeu quod idem valet rectangulum B A, G H, vel B A E æquale erit rectangulo C A K; hoc eſt rectangulo M A O, ſed æquales ſunt M O, B E, vt eſt demonſtratum, ergo &* A M æqualis erit A B. Et quoniam L K ſuperatur ab A K exceſſu A D, ex conſtructione, ab A L vero exceſſu A M æquali A B, vt oſtendimus, ipſa A k ſuperabitur ab A L reliquo exceſſu D B. Conſtructum eſt igitur triangulum L A K in quo A M, differentia crurum æqualis eſt datæ A B, & differentia ſegmentorum baſis A I, I K eſt ipſa A C data: atque exceſſus quo crus L A ſuperat baſim A k eſt

Theor. 3 huius

D B D. quod erat faciendum.

Alia Reſolutio tertij Caſus.

Iisdem datis. quæratur baſis trianguli, vt in antecedenti Reſolutione, & reſumatur eadem figura. Quoniam igitur * proportionales ſunt, differentia crurum trianguli, differentia ſegmentorum baſis, ipſa baſis, & aggregatum crurum, hoc eſt

Theor.[illegible] huius

B D A A 2 ✠ G 2 -- B

Duplatis antecedentibus, erunt quoque proportionales

B 2. D A 2 A 2 ✠ G 2 -- B

Et per conuerſionem rationis proportionales erunt

B 2 B 2 -- D A 2 B -- G 2

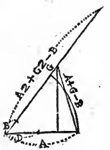
Et rurſus ſubduplatis antecedentibus, proportionales erunt

B B 2 -- D A B -- G 2

Et conuertendo B 2 -- D B B -- G 2 A

Et permutando B 2 -- D B -- G 2 B A

Hæc permutatio non erat neceſſaria, ſed addita eſt ob eas, quas in reſolutione ſecunda, & quarta primi Caſus, & in Reſolutione ſecunda ſecundi, attuli rationes. A



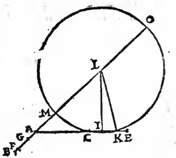
Poriſma. B

Vt exceſſus, quo dupla differentia crurum trianguli ſuperat differentiam ſegmentorum baſis, ad exceſſum, quo differentia crurum ſuperat duplam differentiam cruris maioris, & baſis; ita eſt differentia crurum ad baſim.

Illud ipſum Poriſma, quod per antecedentem reſolutionem inuentum eſt, neque ideo opus eſt Lemmata illa, ac Determinationes, quæ poſt eam Reſolutionem ſequuntur repetere. Verùm quoniam Lemma illud ſecundum per filum reſolutionis oſtenditur, hic etiam idipſum alia via per alium huiuſce Reſolutionis filum demonſtrabo.

Lemma. C

Si baſis trianguli fuerit crure maiori minor, & differentia ſegmentorum baſis minor quoque, quàm dupla differentia crurum. Exceſſus quo dupla differentia crurum ſuperat differentiam ſegmentorum baſis, ad exceſſum quo differentia crurum ſuperat duplam differentiam cruris maioris, & baſis, minorem rationem habebit, quàm differentia crurum, ad differentiam ſegmentorum baſis.



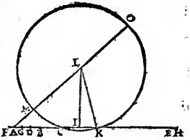
Reſumpta eiuſdem Lemmatis figura, eademque facta conſtructione. Oſtendendum eſt B F exceſſum quo M A dupla ſuperat A C, ad exceſſum A G, quo M A ſuperat duplam k E, minorem rationem habere, quàm A M ad A C. Quoniam enim æquales ſunt A B, A M, & æquales quoque M L, L O, erit B O dupla ipſius A L, ſed cum A L ſuperet AK dimidia B G; eſt enim B G dupla ipſius k E ſuperabit dupla A L, hoc eſt ipſa B O duplã A K, tota BG; quare GO ipſius A K dupla erit. Et quoniam eſt, vt AM ad A C ita AK ad AO, duplatis antecedẽtibus erit, vt BM ad AC hoc eſt ad MF, ita GO D

ad

A ad O A, & per conuerſionem rationis, vt B M ad B F, ita G O ad G A, & rurſus ſubduplatis antecedentibus, vt A M ad B F, ita erit A K ad A G: & conuertendo, vt B F ad A M, ita A G ad A K; ac denique permutando erit, vt B F ad A G, ita A M ad A k; ſed A M ad A k, minorem rationem habet quàm A M ad A C; ergo & B F ad A G minorem rationem habebit quàm A M ad A C, quod erat oſtendendum.

Alia Compoſitio tertij caſus.

Iiſdem datis, quæ in antecedenti Compoſitione, factaq; eadem con-
B ſtructione, Quoniam igitur eſt, vt A F ad A G, ita A B ad A K; erit permutando, vt A F ad A B, ita A G ad A k; & conuertendo, vt A B ad A F, ita A K ad A G, & duplatis antecedentibus, vt C F ad F A, ita A H ad H G, & per conuerſionem rationis, vt C F ad C A, ita A H ad H G, hoc eſt ad A E. & rurſus ſubduplatis antecedentibus erit, vt A B ad A C, ita



A k ad A E, ſed vt A C ad A M, ita eſt A O ad A k, ergo in perturba-
C ta proportione erit, vt A B ad A M, ita A O ad A E, atque æquales ſunt M O, B E, vt demonſtratum eſt in antecedenti compoſitione: ergo & * reliqua A M reliquæ A B æqualis erit. Et cum L k ſuperetur ab L A, exceſſu A M æquali A B, vt oſtendimus, ab A K vero, exceſſu A D, ex conſtructione, ipſa A k ſuperabitur ab A L, reliquo exceſſu D B. Conſtructum eſt igitur triangulum L A k, cuius crurum L A L k differentia A M, æqualis eſt datæ A B, & differentia ſegmentorum A I, I k, eſt ipſa A C data, atque crus L A ſuperat baſim A k, dato exceſſu B D, quod erat faciendum.

* Theor. 4. huius

Scholium.

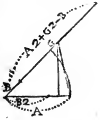
D

In hac quoque demonſtratione, vt A M cum A B conferri poſsit, opus fuerit eximere proportionalium medias A C A K, & in eorum locum alias A M, A O ſubrogare, prioribus ad conſtitutionem proportionalium (manentibus extremis A B, A E) æquiualentes, vt factum eſt in ſecunda Compoſitione primi Caſus, & in ſecunda ſecundi, & ſic cum aliquid ſimile occurret faciendum erit.

Reſolutio quarti, & vltimi Caſus. A

Denique exiſtente exceſſu, qui eſt inter crus maius, & baſim, penes ipſum crus, ſit differentia ſegmentorum baſis æqualis duplæ differentiæ crurum, vtpotè ſit differentia crurum trianguli B, differentia ſegmentorum baſis B 2, & exceſſus, quo crus maius ſuperat baſim G. Oportet inuenire triangulum. Baſis trianguli eſto A, crus igitur maius erit A + G, crus verò minus A + G — B aggregatum ideo crurum A 2 + G 2 — B; ſed cũ ſit vt B ad B 2; ita A ad A 2, *erit A 2 aggregatum crurum, atque adeo eidem aggregato prius inuento æquale; hoc eſt A 2 æquabitur A 2 + G 2 — B B

Theor. 7 huius



Addatur vtrique parti B, ergo

A 2 + B æquabitur A 2 + G 2.

Et auferatur vtrinque A 2, ergo

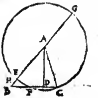
B æquabitur G 2.

In hac æquatione quamuis Reſolutio ritè ſit peracta, quæſitum non comparatur cum dato, vt tali comparatione & ipſum innoteſcat, atque adeo poſſit definiri; quod argumentum eſt, baſim trianguli, de qua quæritur, poſſe eſſe cuiuſque longitudinis, modo datam differentiam ſegmentorum baſis excedat, cùm baſis maior ſit, quàm ipſa differentia. Apparet tamen ex reſolutione, duplum exceſſum, quo crus maius ſuperat baſim, æqualem eſſe differentiæ crurum, idque quoniam ad determinationem pertinet demonſtrandum eſt. Lemma igitur ad id opus ita propono. C

Lemma.

Si differentia ſegmentorum baſis fuerit dupla differentiæ crurum. Crus maius excedet baſim, exceſſu dimidiæ differentiæ crurum æquali.

Sit triangulum A B C, in quo perpendicularis A D ſecet baſim B C in duo ſegmenta B D, D C, & centro A, interuallo A C, quod ſit crus minus, deſcribatur circulus ſecans baſim B C in F; crus verò A B in E, ipſumq. productum in G; ſit autem B F differentia ſegmentorum baſis, dupla B E differentiæ crurum. Dico A B excedere ipſam B C, exceſſu æquali dimidiæ B E. Secetur enim B E biſariam in H. Quoniam igitur eſt vt B F ad B E, ita B G ad B C, & eſt B F dupla ipſius B E, erit & B G dupla ipſius B C; ſed & ipſius A K dupla eſt B C, cum ſint A E, E H æquales ipſis A G, H B, vtraque vtrique, ergo B C æqualis erit A H. itaque A B ſuperat ipſam B C exceſſu H B æquali dimidiæ B E, quod erat oſtendendum. D



Hi

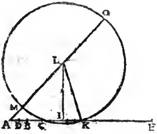
Deter-

A

Determinatio.

Oportebit, exceſſum, quo crus maius trianguli ſuperat baſim, æqualem eſſe dimidiæ differentiæ crurum.

Compoſitio quarti Caſus.



Sit data differentia crurum trianguli A B, differentia ſegmentorum baſis A C, quæ ſit dupla ipſius A B, & exceſſus quo crus maius ſuperat baſim B D, is debet eſſe

B æqualis dimidiæ A B, ex Determinatione. Oportet inuenire triangulum. Producatur A C quantum libuerit in K, & C k ſecetur biſariam in I ad rectos angulos à recta I L, in qua ponatur K L æqualis K D, & iungatur A L. Dico, triangulum L A k Problema efficere. Dupliceturenim A K in E; & centro L interuallo L k deſcribatur circulus ſecans A L in M, ipſamque productam in O. is circulus * tranſibit per C; cum ſint æquales C I, I k, ex conſtructione. 3 tertij Et quoniam A E dupla eſt ipſius A K, & A B dupla ipſius A D; erit & reliqua E B dupla reliquæ k D, vel K L, ſed & M O dupla eſt eiuſ-

C dem K L, ergo M O æqualis erit B E. Et quoniam eſt vt A B ad A C, ita A K ad A E; ſunt enim conſequentes antecedentium duplæ, & vt A C * ad A M; Theor. 9 huius ita eſt A O ad A k; erit in perturbata proportione, vt A B ad A M, ita A O ad A E: atque ſunt æquales B E, M O, vt eſt demonſtratum, ergo & A M * Theor. 4 huius A B æquales erunt, & cum L k ſuperetur ab A k exceſſu A D, ex conſtructione, ab A L vero exceſſu A B, baſis A K ſuperabitur à crure L A, reliquo exceſſu D B. Atque differentia ſegmentorum baſis A I, I K, eſt ipſa A C data. Conſtructum eſt igitur triangulum L A k, &c. quod faciendum erat.

Is Caſus, vt dixi in principio Problematis, vix inter Problemata annumerari poteſt, manentibus enim iiſdem datis, innumera triangula conſtrui poſ-

D ſunt, vt ex ſupradictis patet; baſis enim A k fit ad libitum, eaque poteſt fieri & maior, & minor. requiritur tantum vt datam A C differentiam ſegmentorum baſis excedat. Conuenientior huic Problemati locus erat in primo libro, cum in Reſolutionibus omnium eius caſuum ſimplices æquationes exiſtant; ſed quoniam pluribus Determinationibus indiget, in eoque libro nulla fit de Determinationibus tractatio, viſum fuit illud in hoc ſecundo libro collocare.

Pro-

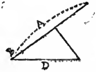
A

Problema VIII.

Data baſe trianguli, angulum rectum ſubtendente, & differentia crurum. Inuenire triangulum.

Reſolutio.

Sit D data baſis trianguli rectanguli, B differentia crurum. Oportet inuenire triangulum.



B

Sit iam factum. & trianguli illius aggregatum crurum eſtò A, ergo A + B * erit duplum cruris maioris, A — B * duplum cruris minoris, vnde ſimplum crus maius erit $A\frac{1}{2} - B\frac{1}{2}$, ſimplum crus minus $A\frac{1}{2} - B\frac{1}{2}$.

Carol. 1 Probl. 1 Lib. 1

47 primi

Sed cum quadrata crurum * æqualia ſint quadrato baſis

A Q $\frac{1}{2}$ + B Q $\frac{1}{2}$ æquabitur D Q

Et omnibus duplatis, vt integra fiat Poteſtas

A Q + B Q æquabitur D Q 2

Et ablato vtrinque B Q, vt cognita ab incognitis ſeparentur

A Q æquabitur D Q 2 — B Q

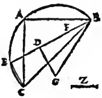
Poriſma.

Duplum quadratum baſis ſubtendentis angulum rectum trianguli, minus quadrato differentiæ crurum æquale eſt quadrato aggregati crurum. C

Datur ergo aggregatum crurum de quo quærebatur.

Compoſitio.

Sit data baſis trianguli angulum rectum ſubtendens A B, differentia crurum Z. Oportet inuenire triangulum. Ducatur ipſi A B perpendicularis, & æqualis A C, & iungatur B C. à quadrato igitur B C quod eſt duplum quadrati A B, debet auferri quadratum Z. ſic Poriſma iubet, ergo deſcribatur in B C ſemicirculus, in quo aptetur C E æqualis Z, & iungatur E B, erit angulus C E B rectus in ſemicirculo, & ob id quadratum E B * æquale erit quadrato C B, minus quadrato E C, hoc eſt æquale erit duplo quadrato A B, minus quadrato Z. Itaque ex præcepto Poriſmatis aggregatum crurum trianguli conſtruendi debet æquari rectæ E B, ita tamen, vt differentia eorundem crurum æquetur ipſi Z, vt Problema exigit. ergo ſumatur in E B recta B F æqualis E C, vel Z; reliqua vero F E ſecetur bifariam in D à perpendiculari D G æquali ipſi D E, vel D F, & iungatur G B. Compoſita igitur ex cruribus G D, D B trianguli D G B æqualis eſt ipſi E B, differentia verò eorundem crurum, hoc



D

47 primi

eſt

A eſt BF æqualis ipſi Z. Itaque conſtructum eſt triangulum DGB, quemadmodum Poriſma docet, ipſum autem triangulum Problema efficere hoc modo demonſtrabitur. Quoniam enim rectus eſt angulus CEB in ſemicirculo, quadratum EB æquale erit quadrato CB, minus quadrato EC, hoc eſt æquale erit duplo quadrati AB, minus quadrato IB, addatur vtrique parti quadratum FB, ablatum enim fuit in Reſolutione, ergo quadratum EB vnà cum quadrato FB, hoc eſt duplum * quadratorum ED, DB, æquale erit duplo quadrati AB; quare & ſimplum ſimplo, ſed quadrata ED, DB, hoc eſt GD, DB * æqualia ſunt quadrato GB, ergo quadratum GB quadrato AB æquale erit, vnde & recta GB æqualis rectæ AB. Conſtructum eſt igitur triangulum DGB rectangulum in D, cuius baſis GB æqualis eſt ipſi AB, & FB differentia crurum GD, DB æqualis ipſi Z, quod faciendum erat. B

* Theor. 4 prim

* 47 primi

Problema IX.

Data baſe trianguli angulum rectum ſubtendente, & aggregato crurum. Inuenire triangulum.

Reſolutio.

C SIt D data baſis trianguli rectanguli, B aggregatum crurum. Oportet inuenire triangulum. Ponatur iam factum eſſe, & differentia crurum trianguli eſto A, ergo B + A erit duplum cruris maioris, & B -- A duplum cruris minoris. vnde ſimplum crus maius erit $B\frac{1}{2} + A\frac{1}{2}$: ſimplum crus minus $B\frac{1}{2} - A\frac{1}{2}$. horum quadra ſimul * æqualia ſunt quadrato baſis, ergo

* 47 primi

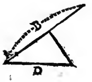
$BQ\frac{1}{2} + AQ\frac{1}{2}$ æquabitur DQ

Et omnibus duplatis, vt Poteſtas integra fiat

$BQ + AQ$ æquabitur $DQ\,2$

Et ablato vtrinque BQ

AQ æquabitur $DQ\,2 - BQ$



Poriſma.

D

Duplum quadratum baſis ſubtendentis angulum rectum trianguli, minus quadrato aggregati crurum, æquale eſt quadrato differentiæ crurum.

Datur ergo differentia crurum, de qua quærebatur.

Ex Poriſmate apparet ſi crura trianguli ſunt inæqualia, duplum quadratum baſis, maius eſſe, quadrato aggregati crurum; ſi verò ſunt æqualia, duplum illud quadratum huic quadrato æquale eſſe; nam cum ſint crura æqualia, nulla eſt eorum differentia, & conſequenter nullum differentiæ quadratum, ſed quadratum differentiæ crurum æquale eſt exceſſui, quo duplum quadratum baſis ſuperat quadratum aggregati crurum; ſic Poriſma

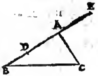
ma indicat, ergo & exceſſus ille nullus erit; in hoc enim caſu nihil nihilo adæquatur. Cum igitur nullus ſit exceſſus inter duplum quadratum baſis, & quadratum aggregati crurum, duplum illud quadratum huic quadrato æquale erit ſecundum Poriſma. Hæc omnia demonſtranda ſunt, vt Problemati ea quam decet determinatio præponatur. A

Lemma.

Recta cuius quadratum æquale eſt duplo quadrato baſis ſubtendentis angulum rectum trianguli, non eſt minor aggregato crurum.



Sit triangulum ABC rectangulum in A, cuius baſis BC. Dico rectam cuius quadratum æquale eſt duplo quadrato ex BC, non eſſe minorem compoſita ex cruribus, BA, AC. Producatur enim BA in E, vt ſit AE æqualis AC, & ſint primum æqualia crura AB, AC. Quoniam igitur quadratum BC æquale eſt quadratis BA, AC, hoc eſt BA, AE duplum quadratum BC æquabitur duplo quadratorum BA, AE, hoc eſt æquabitur quadrato BE, quare & recta cuius quadratum æquale eſt duplo quadrato BC, æqualis erit ipſi BE. Non igitur minor. B



Deinde ſint inæqualia crura AB, AC à maiori ergo quod ſit AB, abſcindatur AD æqualis AC, vel AE. quadrata igitur BE, BD * æqualia erunt duplo quadratorum BA, AE. hoc eſt duplo quadrati BC, ergo duplum quadrati BC, maius erit quadrato BE tantum, vnde & recta, cuius quadratum æquale eſt duplo quadrato BC, maior quam recta BE. quare conſtat propoſitum. C

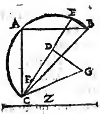
Theor. 4 primi

Hoc demonſtrato, Problema ita determinandum erit.

Determinatio.

Oportebit baſim minorem eſſe aggregato crurum. Rectam autem, cuius quadratum æquale eſt duplo quadrato baſis, non eſſe minorem. D

Compoſitio.



Sit data baſis trianguli angulum rectum ſubtendens AB; aggregatum crurum Z. Oportet inuenire triangulum. Ducatur ipſi AB perpendicularis, & æqualis AC, & connectatur CB, à cuius quadrato (eſt enim duplum quadrati AB) auferendum eſt quadratum Z; ſic Poriſma iubet, ergo in BC deſcribatur ſemicirculus, & in eo aptetur CE æqualis Z; recta enim BC, ex Determinatione, non eſt minor quam Z; dein-

de

A de connectatur E B, erit igitur quadratum E B æquale quadrato C B, minus quadrato E C. hoc eſt æquale erit duplo quadrati A B, minus quadrato Z. Itaque ex præcepto Poriſmatis differentia crurum trianguli conſtruendi debet æquari rectæ E B. Sumatur igitur in E C recta C F æqualis E B, & F E ſecetur biſariam in D ad rectos angulos à recta D G æquali ipſi D E, vel D F, & iungatur C G. Differentia igitur crurum C D, D G trianguli C D G, æqualis eſt ipſi E B, aggregatum verò æquale ipſi C E, hoc eſt Z. Itaque triangulum C D G conſtructum eſt quemadmodum Poriſma docet. nunc oſtendendum eſt in eo eſſe ea quæ Problema requirit. Quoniam enim rectus eſt angulus C E B in ſemicirculo; quadratum E B, vel C F æquale erit quadrato C B, minus quadrato
B E C, hoc eſt æquale erit duplo quadrato A B, minus quadrato E C, addito vtrobique quadrato E C quadratum C F vnà cum quadrato C E. hoc eſt * duplum quadratorum C D, D E, æquale erit duplo quadrati A B, quare & ſimplum ſimplo. ſed quadrata C D, D E. hoc eſt C D, D G æqualia ſunt quadrato C G, ergo quadratum C G quadrato A B æquale erit. vnde & recta C G baſis trianguli C D G æqualis rectæ A B. eſt autem & compoſita ex cruribus C D, D G æqualis ipſi C E, hoc eſt Z datæ, ex conſtructione. Conſtructum eſt igitur triangulum C D G quale conſtruendum proponebatur.

* Theor. prim.

Finis Libri Secundi.

Digitized by Google

MARINI GHETALDI

DE RESOLVTIONE, ET COMPOSITIONE MATHEMATICA.

LIBER TERTIVS.

De iis, quæ ad Reſolutionem, & Compoſitionem pertinent, A
exiſtentibus ſimplicibus laterum, aut quadratorum æquationibus; ſuperioribus libris ſatis me dixiſſe cenſeo. venio nunc ad explicanda ea, quæ in Reſolutionibus, & Compoſitionibus occurrunt, quando in æquationibus quadrata affectionibus implicantur. Sed prius dicam quomodo huiuſmodi æquationes explicentur.

Multi ſanè Auctores de explicandis quadratorum affectorum æquationibus ſcripſerunt, iiſque omnes præter Diofantum, ac Petrum Nonium, vna eademque Methodo, aut parum diſtanti vtuntur, quamuis diuerſas afferant demonſtrationes. Diofantus quidem non curat quadratum æquationis à comite, hoc eſt à data magnitudine in quam ductum eſt liberare, vt ex ſe ſubſiſtat, quemadmodum notat Bachetus, ſed præcipit duci homogeneum comparationis in eundem Comitē quadrati, & reliqua perfici, vt ſuo loco dicetur. B
quo fit vt magnitudines ad plano plana aſcendant, ac proinde longiori operatione, & ad Geometricas Compoſitiones minimè apta æquatio explicetur. Petrus autem Nonius ſumit totam coefficientem longitudinem, non autē dimidiam prout communis Methodus docet; ſumit quoq; quadruplum homogeneum comparationis, & ſic explicata æquatione exhibet duplum latus quæſitum, ex quibus Compoſitio fit difficilior. hanc Methodum Nonius excogitauit, vt fractiones numerorum vitaret, quæ quoniam in Geometricis locum nō habent, nihil eſt quod nos cogat ea Methodo vti. Communi igitur Methodo, quæ eſt ſimpliciſſima vtar, eamq. Geometrica ratione demonſtrabo, aliis tamen mediis, atque alii ſcriptores; per hæc enim media commodior à Reſolutione ad Compoſitionē fit regreſſus, ipſaq. Compoſitio clarius, ac facilius demonſtratur, vt exemplis manifeſtum fiet.

De

A De æquationibus quadratorum affectorum explicandis.

Tribus modis æquatio ritè ordinata variari poteſt. aut enim quadratũ afficitur adiunctione plani, ſub latere, & data coefficiete longitudine; aut aſficitur multa ipſius plani, aut denique planum ipſum afficitur multa quadrati. Tres igitur Canones proferam, quibus ratio explicandi æquationes continetur.

De explicanda æquatione, in qua quadratum afficitur adiunctione plani ſub latere, & data coefficiente longitudine.

Canon Primus.

B Rectæ cuius quadratum æquale eſt quadrato dimidiæ coefficientis datæ, & dato homogeneo comparationis, dematur dimidia coefficiens; reliqua æquabitur lateri quæſito.

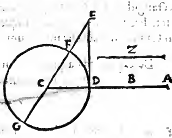
Proponitur A Q + B in A æquari Z Q, explicata ſecundum Canonem æquatione.

L. V. (B Q $\frac{1}{4}$ + Z Q) - B $\frac{1}{2}$ æquabitur A lateri quæſito.

Demonſtratio Canonis primi.

Sit A B caſus quæſitum, B C, data coefficiens longitudo, & quadratum ex Z datum comparationis homogeneum. Poſitis in directum A B, B C

C ſecetur B C bifariam in D, & ex D erigatur perpendicularis D E, æqualis vero ipſi Z, & connectatur E C, ex qua abſcindatur C F æqualis C D. Dico reliquam F E æqualem eſſe A B. Deſcribatur enim ex centro C ad interuallum C F, vel C D circulus ſecãs E C productam in G, is circulus tanget rectam D E in D. & quoniam quadratum A B vnà cum rectãgulo A B C ponitur æquale quadrato Z: eſt autem * æquale & rectangulo 3 ſecundi



B A C; ideo rectangulũ B A C æquale erit quadrato Z, hoc eſt quadrato D E,

D ſed & rectangulum F E G * æquale eſt quadrato D E. ergo rectangula F E G, 16 tertij

B A C æqualia erũt, atq; ſunt æquales F G, B C, ergo & reliquæ * E F, A B æquales erunt, quod erat oſtendendum. Patet igitur Canonem rectè eſſe inſtitutum. Theor. 3 ſecundi

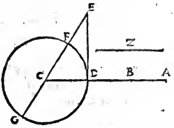
De explicanda æquatione, in qua quadratum afficitur multa plani ſub latere, & data coefficiente longitudine.

Canon Secundus.

Rectæ cuius quadratum æquale eſt quadrato dimidiæ coefficientis datæ, & dato homogeneo comparationis, addatur dimidia coefficiens. Cõpoſita

æquabitur lateri quæſito. Proponatur A Q -- B in A æquari Z Q. Explicata ſecundum Canonem æquatione, A
L. V. (B Q $\frac{1}{4}$ + Z Q) + B $\frac{1}{2}$ æquabitur A lateri quæſito.

Demonſtratio Canonis ſecundi.



Sit quadratum ex Z datum comparationis homogeneum, A C latus quæſitum; & quia ponitur A Q -- B in A æquari Z Q erit B coefficiens, minor quàm A, hoc eſt data coefficiens longitudo, minor erit latere A C. B

Sit igitur data coefficiẽs longitudo B C, eaq. ſecetur bifariã in D, & ex D erigatur perpendicularis D E, & æqualis ipſi Z, & connectatur EC, eaq. producatur in G, vt ſit C G æqualis C D. Dico E G æqualem eſſe A C. Centro enim C interuallo C D, vel CG deſcribatur circulus ſecans E C in F, is circulus tanget rectam E D in D. Et quoniam quadratum A C, minus rectangulo A C B, ponitur æquari quadrato z; quadratum autem A C, minus rectangulo A C B, æquale eſt rectangulo C A B, ergo rectangulum C A B æquale erit quadrato z, hoc
1 tertij eſt quadrato D E, ſed & rectangulum G E F * æquale eſt quadrato D E, ergo rectangula G E F, C A B æqualia erunt, atque ſunt æquales F G, B C, ergo & C
Theor. 1. ſecundi * tota E G toti A C æqualis erit, quod erat oſtendendum, ex quo manifeſtum eſt Canonem rectè eſſe inſtitutum.

De explicanda æquatione, in qua planum ſub latere, & data coefficiente longitudine afficitur multa quadrati.

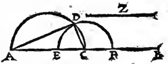
Canon Tertius.

Recta, cuius quadratũ æquale eſt exceſſui, quo quadratum dimidiæ coefficientis datæ, præſtat dato comparationis homogeneo, dempta vel addita dimidiæ coefficienti, reliqua vel compoſita, latus quæſitũ erit. Proponatur B in A -- A Q æquari z Q. explicata ſecundũ Canonẽ æquatione. D
B $\frac{1}{2}$ -- L. V. (B Q $\frac{1}{4}$ -- Z Q) æquabitur A lateri quæſito.
Vel B $\frac{1}{2}$ + L. V. (B Q $\frac{1}{4}$ -- z Q) æquabitur A lateri quæſito.

Antequam demonſtratio Canonis fiat, oſtendendũ eſt, rectũ cuius quadratũ æquale eſt dato comparationis homogeneo nõ eſſe maiorẽ dimidia coefficiẽte. Proponatur B in A -- AQ æquari ZQ Dico z non eſſe maiorem dimidia B.

Reuocetur enim ad proportionem æqualitas, erunt tres proportionales B -- A, z, A; ſed dupla media non eſt maior, quàm compoſita ex extremis; compoſita autem ex extremis eſt B, ergo dupla z, non erit maior ipſa B, nec ſimplex z maior dimidia B, quod erat oſtendendum.

A Demonſtratio Canonis tertij.



SIt quadratum ex Z datum comparationis homogeneum, A B data coefficiens longitudo, quæ ſecetur bifariam in C, erit Z non maior quam A C, vt proximè demonſtrauimus. in ipſa igitur A C deſcribatur ſemicirculus, & in eo accommodetur A D æqualis Z, & iungatur D C. angulus igitur A D C in ſemicirculo rectus erit, quare quadratum A C * æquale erit quadratis A D, D C, vnde quadratum D C erit exceſſus, quo quadratum A C, dimidiæ videlicet coefficiętis præſtat quadrato A D, hoc eſt quadrato Z, quod eſt datum homogeneum comparationis. 47 primi
B Centro igitur C interuallo C D deſcribatur circulus ſecans recta m A B hinc inde in punctis E F. Dico latus de quo quæritur, minus quidem eſſe A E, maius autem A F, hoc eſt rectangulum B A E, minus quadrato A E, æquari quadrato Z, & rurſus rectangulum B A F, minus quadrato A F, æquari eidem quadrato Z, in huiuſmodi enim æquationibus latus quæſitum de duplici termino explicabile eſt. Quoniam igitur A D tangit circulum E D F in D, cum ſit rectus angulus A D C rectangulum F A E* æquale erit quadrato A D, vel quadrato z, ſed rectangulum F A E, hoc eſt B E A, æquale eſt rectangulo B A E, minus quadrato A E, ergo rectangulum B A E, minus quadrato A E, æquale erit quadrato z, atque adeo latus quæſitum erit A E, quod eſto 36 tertij
C primum.

Rurſus quoniam rectangulum E A F æquale eſt quadrato A D, hoc eſt quadrato z; ipſum autem rectangulū E A F hoc eſt B F A, æquale eſt rectangulo B A F, minus quadrato A F, ergo rectangulum B A F, minus quadrato A F, æquabitur quadrato z, itaq; latus quæſitum erit A F, quod ſecūdo loco erat oſtendendum. ex his igitur manifeſtum eſt Canonem rectè eſſe inſtitutum.

Diophantus autem in explicandis quadratorum affectorum æquationibus hac vtitur Methodo.

Canon explicādi æquationem in qua quadratum afficitur affirmatè.

D

DAtum comparationis homogeneum ducatur in comitem quadrati, & producto addatur quadratum dimidij coefficientis, & à radice quadrata aggregati auferatur dimidium coefficientis; reliquum vero applicetur ad comitem quadrati, & proueniet latus quæſitum.

Proponatur A Q in D + B in D in A æquari z Q in D, & explicetur æquatio ſecundum Canonem, ergo L. V. (z Q in D Q + B Q in D Q $\frac{1}{4}$) -- B in D $\frac{1}{2}$ æquabitur A lateri quæſito.

Longa quidem operatione, & ad Geometricas Compoſitiones inutili explicata eſt hæc æquatio, per ipſam enim operationem magnitudines ad plano

plana aſcẽdentes, geometriæ terminos trãſcendunt; vtraque tamen Methodus, A
tam Diophantea, quàm cõmunis eodẽ recidunt; nam L. V. $(\frac{ZQ \text{ in } DQ}{D} \dagger \frac{BQ \text{ in } DQ\ \frac{1}{4}}{})$
idem eſt quod L. V. $(\frac{ZQ \text{ in } DQ \dagger BQ \text{ in } DQ\ \frac{1}{4}}{L.\ DQ})$ ſeu quod L. V. $(ZQ + BQ\ \frac{1}{4})$ ſimi-
liter $\frac{B \text{ in } D\ \frac{1}{2}}{D}$ idem eſt quod $B\ \frac{1}{2}$. igitur L. V. $(\frac{ZQ \text{ in } DQ \dagger BQ \text{ in } DQ\ \frac{1}{4}}{D}) - \frac{B \text{ in } D\ \frac{1}{2}}{}$ idem eſt
quod L. V. $(ZQ + BQ\ \frac{1}{4}) - B\ \frac{1}{2}$, cui quoque (æquatione communi Methodo explicata) æquatur A.

Repetatur enim eadem æquatio, quæ ſupra; hoc eſt A Q in D + B in D in A, æquetur Z Q in D. hæc æquatio non poteſt dici ritè ordinata, donec A Q liberetur à comite D, ergo applicentur omnia ad D. igitur A Q † B in A æquabitur Z Q, & explicata communi Methodo æquatione L. V. (z Q † B Q $\frac{1}{iv}$) – B $\frac{1}{ii}$, æquabitur A. Siue igitur Methodo Diophantea, ſiue communi æquatio explicetur, opus eodem recidit, ſed Diophantea quidem Methodus longa eſt, & Geometricis compoſitionibus inutilis; communis autem breuis, & commoda, idem intelligendum eſt de reliquis duobus, quæ ſequentur æquationibus, & ne eadem repetantur, hæc dixiſſe ſufficiat. B

Canon explicandi æquationem in qua quadratum efficitur negatè.

Datum comparationis homogeneum ducatur in Comitem quadrati, & producto addatur quadratum dimidij coefficientis, & radici quadratæ aggregati, addatur dimidium coefficientis, idque compoſitum applicetur ad Comitem quadrati, & proueniet latus quæſitum. C

Proponatur A Q in D — B in D in A, æquari Z Q in D; explicata ſecundum Canonem æquatione.

L. V. $(\frac{ZQ \text{ in } DQ}{} + \frac{BQ \text{ in } DQ\ \frac{1}{iv}}{D} + \frac{B \text{ in } D\ \frac{1}{2}}{}$ æquabitur A

Hoc eſt L. V. (z Q + B Q $\frac{1}{4}$) + B $\frac{1}{2}$. æquabitur A

Eadem enim ratione, qua ſub antecedenti canone oſtendemus.

L. V $(\frac{ZQ \text{ in } DQ}{} + \frac{BQ \text{ in } DQ\ \frac{1}{4}}{D}) + \frac{B \text{ in } D\ \frac{1}{2}}{}$ idem eſſe quod L. V. (z Q + B Q $\frac{1}{iv}$) + B $\frac{1}{2}$.

Canon explicandi æquationem, in qua quadratum negatur de afficiente homogeneo.

Datum comparationis homogeneum ducatur in comitem quadrati, & productum auferatur à quadrato dimidij coefficientis, reſidui radix quadrata addatur, vel dematur dimidio coefficienti, ſumma vel reſiduum applicetur ad comitem quadrati, & proueniet latus quæſitum. D

Proponatur B in D in A – A Q in D æquari z Q in D explicata ſecundum canonem æquatione.

$\frac{B \text{ in } D\ \frac{1}{2} + L.V.(BQ \text{ in } DQ\ \frac{1}{iv} - ZQ \text{ in } DQ)}{D}$ æquabitur A

Vel $\frac{B \text{ in } D\ \frac{1}{2} - L.V.(BQ \text{ in } DQ\ \frac{1}{iv} - ZQ \text{ in } DQ)}{D}$ æquabitur A

Atque hæc de æquationibus quadratorum affectorũ explicandis dicta ſufficiãt.

Pro-

Digitized by Google

A

Problema I.

Dato vno ex cruribus trianguli angulum rectum ambientibus, dataq; differentia ſegmentorum baſis. inuenire triangulum.

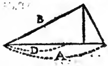
HOc Problema duos Caſus habet, aut enim datur crus maius, aut crus minus. Primo Caſu oportebit differentiam ſegmentorum baſis minorem eſſe crure, ſiquidem crus maius toto maiore ſegmento maius eſt; ſecundus Caſus Determinatione non indiget.

Reſolutio primi Caſus.

B

SIt datum crus maius trianguli rectanguli B, differentia ſegmentorum baſis D. Oportet inuenire triangulum.

Sit iam factum, & baſis trianguli eſto A, ergo A ✣ D erit* duplum ſegmenti maioris, & quoniam crus maius trianguli rectanguli medium eſt* proportionale inter baſim, & ſegmentum maius, rectangulum ſub baſe, & ſegmento maiori* æquale erit quadrato cruris maioris, & conſequenter rectangulum ſub baſe, & duplo ſegmento maiori æquabitur duplo quadrato cruris maioris, hoc eſt Corol. 1 Probl. 2 primi Corol. Prop. 8 ſexti 17 ſexti



AQ † D in A æquabitur BQ 2

C Et explicata ſecundum primum Canonem æquatione:

L. V. (BQ 2 ✣ DQ $\frac{1}{4}$) -- D $\frac{1}{2}$ æquabitur A

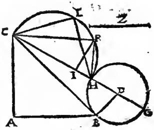
Poriſma.

Recta, cuius quadratum æquale eſt duplo quadrato cruris maioris trianguli rectanguli, vnà cum quadrato dimidiæ differentiæ ſegmentorum baſis, contracta eadem dimidia differentia æqualis eſt baſi trianguli.

Datur ergo quæſita baſis trianguli.

Compoſitio primi Caſus.

D SIt datum crus maius trianguli rectanguli A B, data autem differentia ſegmentorum baſis Z. Oportet inuenire triangulum. Inclinentur ad angulos rectos A B, A C æquales, & connectatur C B, cui perpendicularis ducatur B D, æqualis dimidiæ Z, & connectatur quoque C D: eius quadratū æquale erit quadratis C B, B D, hoc eſt duplo quadrati A B, & quadrato dimidiæ Z. ab ipſa igitur C D auferenda eſt recta æqualis dimidiæ Z, reliquā verò ſumenda pro

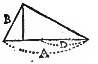


baſe trianguli conſtruendi. ſic habetur ex Poriſmate. centro igitur D inter- A
uallo D B deſcribatur circulus ſecans C D in H. deinde in C H, deſcribatur
ſemicirculus, in quo accommodetur C F æqualis ab ipſa autem A B minor
eſt, quàm C H, vt oſtendetur infra. deniq; iuncta F H factum erit trian-
gulum C F H, vt Poriſma docet. à recta enim C D, cuius quadratum æqua-
le eſt quadratis C B, B D. hoc eſt duplo quadrati A B, & quadrato dimidiæ Z
ablata eſt D H æqualis dimidiæ Z, & reliqua C H baſis eſt trianguli C F
H. Nunc oſtendendum eſt in eo triangulo eſſe ea, quæ Problema requirit.

Ducatur enim F I ad baſim C H perpendicularis, & producatur C D
vſque ad circumferentiam circuli in G. Quoniam igitur in ſemicirculo eſt
angulus C F H trianguli C F H, is eſt rectus, & crus F C æquale eſt A B
datæ, ex conſtructione, ipſumque crus maius eſſe crure F H manifeſtum B
eſt, nam ſecta bifariam circumferentia ſemicirculi CFH in L, & iuncta
47 primi H L, quadratum C H* æquale erit duplo quadrati H L, ſed quadratum C H
(cum ſit minus quadrato C B, eſt enim recta C H minor, quàm recta C B)
minus eſt duplo quadrato A B, ergo duplum quadratum A B, maius erit
duplo quadrato H L; quare & ſimplum maius ſimplo, vnde & recta A B,
hoc eſt F C, maior quam recta H L, & conſequenter multo maior, quàm
F H ſupereſt igitur vt differentia ſegmentorum C I, I H oſtendatur æqua-
lis datæ Z. id per reſolutionis regreſſum ita fit manifeſtum.

Quoniam enim recta C B tangit circulum in B, cum ſit rectus angu-
lus C B D, ex conſtructione, rectangulum H C G æquale erit quadrato
C B, hoc eſt duplo quadrati A B, ſeu quod idem eſt duplo quadrati C F, C
Corol.8. ſexti ſed cum ſit C F* media proportionalis inter H C, C I, rectangulum ſub
H C, C I æquale eſt quadrato C F, & conſequenter rectangulum ſub HC,
& dupla C I æquale duplo quadrati C F, ergo rectangulum H C G æqua-
le erit rectangulo ſub H C. & C I dupla; quare C G dupla erit ipſius C I,
ac proinde æquales erunt C I, I G atque adeo differentia ſegmentorum
C I, I H erit H G quæ æqualis eſt Z datæ ex conſtructione. Conſtructum
eſt igitur triangulum F C H quale conſtruendum proponebatur. At ve-
rò rectam A B minorem eſſe, quàm C H manifeſtum eſt, ſi enim non
eſt minor, erit tota C G minor, quàm A B dupla, quia H G, hoc eſt Z,
minor eſt, quàm A B ex determinatione Problematis. Itaque rectangu-
lum H C G minus erit, rectangulo ſub A B, & altera ipſius dupla, hoc eſt D
duplo quadrati A B, ſed duplum quadrati A B æquale eſt quadrato C B,
ergo rectangulum H C G, minus erit quadrato C B, ſed hoc eſt falſum;
36 tertij ſunt* enim æqualia, ergo A B minor eſt, quàm C H quod oſtendiſſe oportuit.

Reſolutio ſecundi Caſus.



Sit datum crus minus trianguli rectanguli B, diffe-
rentia ſegmentorum baſis D, & oporteat inueni-
re triangulum.

Baſis trianguli eſtò A, ergo A -- D erit* duplum
ſeg-

A ſegmenti minoris, & quoniam crus minus trianguli * rectanguli medium eſt proportionale inter baſim, & ſegmentum minus, rectangulum ſub baſe, & ſegmento minore æquale erit quadrato cruris minoris, & conſequenter rectangulum ſub baſe, & duplo ſegmenti minoris, æquabitur duplo quadrato cruris minoris, hoc eſt Corol. 1. Probl. 1 lib. 1. Corol. propoſ. 8. ſexti

A Q – D in A æquabitur B Q 2

Et explicata iuxta ſecundum Canonem æquatione.

L. V. (B Q 2 + D Q $\frac{1}{4}$) + D $\frac{1}{2}$ æquabitur A

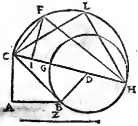
Poriſma.

B Recta cuius quadratum æquale eſt duplo quadrato cruris minoris trianguli rectanguli, vnà cum quadrato dimidiæ differentiæ ſegmentorum baſis, protracta longitudine eiuſdem dimidiæ differentiæ, æqualis eſt baſi trianguli.

Datur ergo baſi trianguli quæſita.

Compoſitio ſecundi caſus.

Sit datum crus minus trianguli rectanguli A B, data differentia ſegmẽtorum baſis Z, & oportet inuenire triangulum. Inclinentur ad angulos rectos A B, A C æquales, & connectatur C B, cui perpendicularis ducatur B D æqualis dimidiæ Z, & connectatur



C quoque C D, eius igitur quadratum æquale eſt quadratis C B, B D, hoc eſt duplo quadrati A B, & quadrato dimidiæ Z, ergo ipſa C D continuanda eſt longitudine dimidiæ Z, eaque ſic continuata fieri debet baſis trianguli conſtruendi, ſic Poriſma docet. Centro igitur D interuallo D B deſcribatur circulus ſecans C D in G, eandemque continuatam in H, & in C H ſemicirculus deſcribatur, in quo accommodetur C F æqualis A B, & iungatur F H triangulum igitur F C H conſtructum eſt, vt Poriſma docet, recta enim C D, cuius quadra-

D tum æquale eſt quadratis C B, B D, hoc eſt duplo quadrati A B, & quadrato dimidiæ Z protracta longitudine D H, æqualis dimidiæ Z baſis eſt trianguli F C H. Nunc oſtendendum eſt in eo triangulo eſſe ea, quæ requiruntur.

Angulus C F H cum ſit in ſemicirculo rectus eſt, & crus F C æquale eſt A B datæ, ex conſtructione, ipſumque crus minus eſſe crure F H, manifeſtum eſt, nam ſecta bifariam circumferentia ſemicirculi G F H in L, & iuncta H L quadratum C H * æquale erit duplo quadrati H L; ſed quadratum C H (cum ſit maius quadrato C B, eſt enim & recta C H maior, quàm recta C B) maius eſt duplo quadrati A B minus erit duplo quadrati H L; 47 primi

H L; quare & ſimplum minus ſimplo; vnde & recta A B hoc eſt F C, minor quam recta H L, & conſequenter multo minor, quàm FH, hæc omnia ex conſtructione patent: differentiam vero ſegmentorum baſis, æqualem eſſe Z datæ per repetitionem veſtigiorum Reſolutionis demonſtrabitur hoc modo. A

Quoniam enim recta C B tangit circulum in B, cum ſit rectus angulus C B D, ex conſtructione, rectangulum H C G æquale erit quadrato C B, hoc eſt duplo quadrati A B; ſeu quod idem eſt duplo quadrati C F; ſed cum ſit C F * media proportionalis inter H C, C I, rectangulum ſub H C, C I æquale eſt quadrato C F, & conſequenter rectangulum ſub H C, & dupla C I, æquale duplo quadrati C F; ergo rectangulum H C G, æquale erit rectangulo ſub H C, & C I dupla quare C G dupla erit ipſius C I, ac proinde æquales erunt C I, I G atque adeo differentia ſegmentorum C I, I H erit H G quæ æqualis eſt Z datæ, ex conſtructione; Conſtructum eſt igitur triangulum C F H &c. quod faciendum erat. B

* Corol. Prop. 8 ſexti

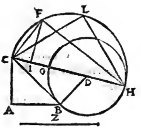
Scholium:

Omne Problema tot admittit Compoſitiones, ex vna eademque Reſolutione pendentes, quot in eo conditiones requiruntur. componitur enim Problema vt ex ſola conſtructione appareant conditiones Problematis omnes adimpletæ, præter vnam quæ poſtea per repetitionem veſtigiorum reſolutionis adimpleta oſtenditur. Nam diſponuntur in conſtructione Problematis omnia data excepto vno, ſecundum Poriſmatis ordinationem: diſponitur ſimiliter cum iiſdem datis etiam quæſitum tamquam datum; quoniam & ipſum datum eſt ex Poriſmate; quæ quidem ſic diſpoſita alia demonſtratione non egent, cum ex conſtructione pateant. illud autem quod excipitur quoniam ex conſtructione non patet, per regreſſum Reſolutionis demonſtratur. C
Huius igitur Problematis, cum in eo tres conditiones requirantur, nempè vt triangulum quod conſtruendum proponitur ſit rectangulum, deinde vt alterum ex cruribus quæ ſunt circa angulum rectum ſit æquale datæ rectæ lineæ; poſtremo vt differentia ſegmentorum baſis æquetur alteri datæ, tripliciter poteſt variari compoſitio ex vna, eademque reſolutione pendens, aut enim excipitur data differentia ſegmentorum baſis, aut crus datum, aut datus verticis angulus, qui eſt rectus. In antecedente compoſitione excepta eſt differentia ſegmentorum baſis, conſtructum eſt enim triangulum ex crure, & angulo recto quæ data ſunt, & ex baſe, vt data, quoniam reuerſa & ipſa data eſt ex Poriſmate; ipſumque crus æquari cruri dato, & angulum verticis eſſe rectum, manifeſtum eſt ex conſtructione; differentiam vero ſegmentorum baſis æqualem eſſe datæ differentiæ, oſtenſum eſt per repetitionem veſtigiorum Reſolutionis. Nunc in hac quæ ſequitur ſecunda Compoſitione ſecundi Caſus excipiam crus datum, atque ex differentia ſegmentorum baſis, & angulo recto, & baſe iam per Reſolutionem inuenta, conſtruam triangulum iuxta rationem Poriſmatis, cuius trianguli crus æquale eſſe cruri dato retrograda Reſolutionis via oſtendetur; cætera vero ex conſtructione perſpi- D

ſpi-

A ſpicua erunt. in tertia deniquec ompoſitione excipiam angulum rectum, & ex differentia ſegmentorum baſis, & crure, & baſe inuenta, triangulum componam, ſecundum præceptum Poriſmatis, cuius trianguli angulum verticis rectum eſſe, per Reſolutionis regreſſum demonſtrabo, reliqua ex conſtructione patebunt.

Secunda compoſitio ſecundi caſus.



SIt igitur datum crus minus trianguli rectanguli A B. data differentia ſegmentorum baſis Z. & oporteat inuenire triangulum. in-
B clinatis, vt prius ad angulos rectos A B, A C æqualibus connectatur C B, eique perpendicularis ducatur B D æqualis dimidiæ Z, & connectatur quoque C D, & centro D interuallo D B deſcribatur circulus ſecans C D in G, continuatam vero in H, & circa diametrum C H, alius circulus deſcribatur (hactenus eadem conſtructio, quæ in antecedenti compoſitione) deinde ſecetur C G bifariam in I à perpendiculari I F ducta vſque ad circumferentiã circuli, & iungantur C F, F H: Trianguli igitur F C H angulus G F H, cum ſit in ſemicirculo rectus eſt, & G H differentia ſegmentorum C I, I H æqualis eſt datæ Z hæc
C omnia ita ſe habent ex conſtructione; crus autem F C æquari ipſi A B, regreſſu reſolutionis demonſtrabitur hoc modo.

Quoniam enim recta C B tangit circulum in B, cum ſit rectus angulus C B D, rectangulum G C H æquale erit quadrato C B, hoc eſt duplo quadrati A B, ſed cum ſit C F * media proportionalis inter H C, C I, rectangulum I C H æquale eſt quadrato C F, & conſequenter rectangulum G C H æquale duplo quadrati C F; eſt enim C G dupla ipſius C I, ergo quadratum C F, æquale erit quadrato A B: vnde & recta F C æqualis rectæ A B. Constructum eſt igitur triangulum F C H, &c. quod faciendum erat.

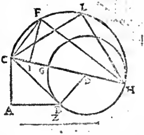
Corol. 8. ſexti

Tertia Compoſitio ſecundi Caſus.

D

IISdem datis inclinentur vt prius ad angulos rectos A B, A C æquales & connectatur C B, eique perpendicularis agatur B D, æqualis dimidiæ Z, & connectatur quoque C D, & centro D interuallo D B deſcribatur circulus ſecans C D in G, eamque continuatam in H (hactenus præcedens compoſitio) deinde ſecetur C G bifariam in I ad rectos angulos à recta I F indefinita, in qua ponatur C F æqualis C A; eſt autem C A maior, quàm C I, nam cum ipſa C A maior ſit quàm dimidia C B ea multo maior erit quàm dimidia C G, hoc eſt quàm C I denique connectatur F H. in triaagulo igitur F C H crus F C æquale eſt C A, hoc eſt A B datæ, ex conſtructione, ſimi-

militer & G H differentia ſegmentorum C I, I H A
æqualis datæ Z, ex conſtructione; ſupereſt igitur vt angulus C F H ſit rectus; id autem repetendo reſolutionis veſtigia ita fit manifeſtum. Quoniam enim eſt rectus angulus C B D, recta C B tanget circulum in B, ac proinde rectãgulum G C H* æquale erit quadrato C B, hoc eſt duplum erit quadrati A B, ſeu quod idem eſt quadrati C F, ſed idem rectangulum G C H duplum eſt rectanguli I C H, cum ſit G C dupla ipſius C I; ergo rectangulum I C H æquale erit quadrato C F vt* igitur I C ad C F, ita erit C F ad C H; quare* ſimilia erunt triangula F C I, F C H B
ſed trianguli F C I angulus F I C rectus eſt, ergo & trianguli F C H angulus C F H rectus erit. Conſtructum eſt igitur triangulũ F C H, vt facere oportebat.



36 tertij · 17 ſexti · 6 ſexti

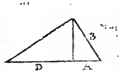
Eadem ratione. & primus Problematis Caſus tripliciter cõponi poterat deducendo ex vna, eademque reſolutione Compoſitiones.

Problema II.

Dato vno ex cruribus trianguli, angulum rectum ambientibus, datoque alterno baſis ſegmento. inuenire triangulum.

Reſolutio.

SIt datum vnum ex cruribus trianguli angulum rectum ambientibus B alternum autem baſis ſegmentum D. oportet inuenire triangulum. Factum ſit hoc, & alterum ſegmentũ baſis de quo quæratur eſtò A. Quoniam autem crus B medium* proportionale eſt inter baſim trianguli, & ſegmentum A, ergo proportionales erunt. C



Corol. 8 ſexti

$D + A \quad B \quad A$

17 ſexti Quod autem ſit ſub extremis,* æquale eſt mediæ quadrato, ergo

D in A + A Q æquabitur BQ

Et explicata æquatione

$L.V.(BQ + DQ\frac{1}{4}) - D\frac{1}{2}$ æquabitur A D

Poriſma.

Recta, cuius quadratum æquale eſt quadrato vnius crurum trianguli angulum rectum ambientium, vna cum quadrato dimidij alterni ſegmenti baſis, contracta dimidio eiuſdem ſegmenti, æqualis eſt alteri ſegmento.

Datur ergo alterum ſegmentum de quo quærebatur.

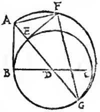
Atque hoc Problema cum in eo tres conditiones requirantur triplici via componi poteſt deducendo ab vna eademque reſolutione compoſitiones.

Com-

A

Compoſitio Prima.

SIt datum vnum ex cruribus trianguli angulum rectum ambientibus A B ſegmentum autem baſis alternum B C. Oportet inuenire triangulum. inclinentur ad rectos angulos A B, B C, & ſecetur BC bifariã in D, & iungatur A D. Quadratum igitur A D æquale eſt quadratis A B, B D, cruris videlicet, & dimidij ſegmenti. Itaque ab ipſa A D debet auferri recta æqualis B D. ſic Poriſma docet. Centro igitur D, interuallo D B; vel D C deſcribatur circulus ſecans A D in E, productam autem in G, reliqua igitur A E debet æquari alte-



B ri ſegmento baſis, vt Poriſma indicat. Sed E G, cum ſit æqualis dato ſegmento BC, tota A G fieri debet baſis trianguli conſtruendi. In ipſa igitur A G deſcribatur ſemicirculus A F G, & ducatur perpendicularis E F vſque ad circumferentiam, & iungantur A F, F G. Triangulum igitur A F G conſtitutum eſt, quemadmodum Poriſma iubet; à recta enim A D cuius quadratum æquale eſt quadratis A B, B D cruris videlicet, & dimidij ſegmenti alterni; ablata eſt D E æqualis ipſi B D dimidio ſegmenti, & ex reliqua A E factum eſt alterum ſegmentum baſis, vt Poriſma docet. Ipſum autem triangulum A F G eſſe quale Problema exigit, ſic demonſtrabitur.

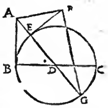
Angulus enim A F G, cum ſit in ſemicirculo, rectus eſt, & baſis ſegmen-
C tum E G, æquale eſt datæ B C ex conſtructione. crus autem A F æquale eſſe A B datæ per repetitionem veſtigiorum reſolutionis; ita oſtendetur. Quoniam enim rectangulum G A E * æquale eſt quadrato A B, recta enim A B 36 tertij
tangit circulum; erunt tres * proportionales G A, A B, A E; quarum media 17 ſexti
erit A B, ſed inter eaſdem G A, A E eſt quoque * media proportionalis A F: Corol. 8 ſexti
ergo A F æqualis eſt A B, quod oſtendiſſe oportuit. Conſtructum eſt igitur triangulum A F G, &c. quod faciendum erat.

Compoſitio Secunda.

IN præcedenti compoſitione exceptum eſt crus datum, ex dato enim baſis alterno ſegmento, & angulo recto, & ex reliquo baſis ſegmento quod
D per reſolutionem inuentum eſt, conſtructum eſt triangulum, ſecundum præceptum Poriſmatis. in hac ſecunda Compoſitione conſtituam ipſum triangulum ex dato crure, & angulo recto, & ex ſegmento per reſolutionem inuento alternum autem baſis ſegmentum æquari ſegmento dato, per regreſſum reſolutionis demonſtrabo.

Sint igitur eadem data, & inclinentur ad angulos rectos A B, B C & ſecta B C bifariam in D iungatur A D, & centro D interuallo DB, vel DC, deſcribatur circulus, quem A D ſecet in E, ipſi autem A D ducatur perpendicularis E F indefinita, in qua ponatur A F æqualis ipſi A B, & ex F ducatur ipſi A F perpendicularis F G occurrens A D productæ in G. In triangulo igitur

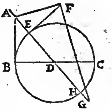
FA G



F A G crus A F continens, cum crure F G angulum rectum, æquale eſt ipſi A B, ex conſtructione, & angulus A F G rectus eſt, pariter ex conſtructione. ſegmentum autem E G æquari ipſi B C, per repetitionem veſtigiorum reſolutionis demonſtrabitur hac ratione. A

Corol. prop. 8 ſexti Quoniam enim A F * media proportionalis eſt inter 17 ſexti E A, A G, rectangulum E A G * æquale erit quadrato A F, hoc eſt quadrato A B, atque A B tangit circulum in B quod angulus A B D rectus eſt, ergo punctum G erit in circumferentia circuli B E C, quare E G diameter erit, ac proinde diametro B C æqualis.

Eſſe autem punctum G in circumferentia circuli B E C patet. ſi enim non eſt, erit aut in circulo, aut extra circulum. ſit primum ſi poſſibile eſt in circulo & producatur A G vſque ad circumferentiam in H, itaque rectangulum E A H æquale erit quadrato A B, ſed & rectangulum E A C oſtenſum eſt æquale quadrato A B, ergo rectangulum E A G rectangulo E A H æquale erit, quare & recta A G æqualis rectæ A H, pars toti quod eſt abſurdum. Non eſt igitur punctum G in circulo. B



Deinde ſit ſi fieri poteſt punctum G extra circulum, ergo recta A G ſecabit circumferentiam, ſecet in H, rectangulum igitur E A H æquabitur quadrato A B, ſed eidem quadrato æquatur & rectangulum E A G, ergo rectangula E A H, E A G æqualia erunt; quare & rectæ A H, A G æquales pars & totum quod itidem eſt abſurdum. Non igitur punctum G eſt extra circulum, ſed neque in circulo, ergo in circumferentia circuli erit, quod erat oſtendendum. C

Compoſitio Tertia.

Iiſdem datis, inclinentur ad angulos rectos A B, B C & ſecta B C biſariam in D iungatur A D, & centro D interuallo D B, vel D C deſcribatur circulus, quem A D ſecet in E, continuata vero in G, & ex E ipſi A D ducatur perpendicularis A F indefinita, in qua ponatur A F æqualis A B, & iungatur F C. In triangulo igitur F A G, crus F A æquale eſt A B datæ, & E G ſegmentum baſis alternum æquale ipſi B C, diameter nempe diametro; ſupereſt igitur vt angulus A F G ſit rectus; id autem per Reſolutionis regreſſum oſtendetur hoc modo. D

Corol. 16 tertij Quoniam enim recta A B * tangit circulum cum ſit rectus angulus A B C, rectangulum E A G æquale erit quadrato A B, hoc eſt quadrato A F, quare 6 ſexti vt A E ad A F, ita erit A F ad A G: vnde * ſimilia erunt triangula E A F, F A G, ſed rectus eſt angulus A E F trianguli E A F ergo, & angulus A F G trianguli F A G rectus erit quod erat oſtendendum. Conſtructum eſt igitur triangulum F A G quemadmodum facere oportebat.

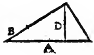
A Problema III.

Data differentia crurum trianguli angulum rectum ambientium, dataque perpendiculari. inuenire triangulum.

Reſolutio.

Sit data differentia crurum trianguli angulum rectum ambientium B, perpendicularis autem D. Oportet inuenire triangulum.

Sit iam inuentum, eiusque baſis, eſto A. Quoniam igitur ab angulo recto trianguli ducta eſt in baſim perpendicularis, triangula ad perpendicularem* 8 ſexti



B ſimilia ſunt toti triangulo, vt igitur baſis totius trianguli ad crus vnum, ita erit crus alterum ad perpendicularem, ac proinde id quod fit ſub extremis* æquabitur ei, quod fit ſub medijs, hoc eſt 16 ſexti

D in A æquabitur rectangulo ſub cruribus,

Sed quadratum differentiæ crurum æquale eſt quadratis crurum, minus duplo rectangulo ſub cruribus, ergo

B Q æquabitur. A Q -- D in A 2

quadratum enim baſis, quod eſt A Q æquale eſt quadratis crurum, & duplum rectangulum ſub baſe, & perpendiculari, quod eſt D in A 2, æquale duplo rectangulo ſub cruribus, vt eſt demonſtratum. Denique explicata æquatione.

C L. V. (B Q + D Q.) -- D æquabitur A.

Poriſma.

Recta, cuius quadratum æquale eſt quadratis differentiæ videlicet crurum trianguli circa angulum rectum, & perpendicularis, aucta ipſa perpendiculari, æqualis eſt baſi trianguli.

Datur igitur quæſita baſis trianguli.

Compoſitio.

D



Sit data differentia crurum trianguli angulum rectum ambientium A B, perpendicularis autem B C. Oportet inuenire triangulum. Inclinentur ad angulos rectos A B, B C, & connectatur A C: eius quadratum æquale erit quadratis A B, B C, differentiæ videlicet crurum, & perpendicularis; ipſa igitur A C, augenda eſt longitudine C B, & ſic aucta debet fieri baſis trianguli conſtruendi. ſic Poriſma docet.

ergo centro C interuallo CB deſcribatur circulus ſecans AC continua- A
tam in D. deinde in AD deſcribatur ſemicirculus AGD, ex cuius centro, quod ſit F, ducatur perpendicularis FG, in qua ſumatur FH, æqualis CB, vel CD, ipſi autem AD parallela agatur HI, ſecans circumferentiam in I, & connectantur AI, ID. Conſtructum eſt igitur triangulum AID, quemadmodum Poriſma docet; recta enim AC, cuius quadratum æquale eſt quadratis datarum AB, BC, differentiæ videlicet crurum, & perpendicularis, aucta longitudine CB baſis eſt trianguli AID. Nunc oſtendendum eſt ipſum triangulũ eſſe quale Problema requirit.

Sumatur enim Ik æqualis ID, & circulus DBE ſecet rectam AC in E; & agatur baſi AD perpendicularis IL; ea parallela erit, & æqualis rectæ HF, atque adeo æqualis quoque CB datæ. atque angulus AID in B
ſemicirculo rectus eſt. hæc omnia ex conſtructione patent. ipſam autem Ak differentiam crurum AI, ID æqualem eſſe AB datæ, per reſolutionis regreſſum ita oſtendetur.

Quoniam enim rectus eſt angulus ABC, ex conſtructione, & ideo AB
36 tertij tangit circulum in B quadratum AB* æquale erit rectangulo EAD, ſeu quod idem eſt quadrato AD, minus rectangulo ADE, hoc eſt minus duplo rectangulo AD, IL, eſt enim DE dupla ipſius IL, ex conſtructione;
47 primi ſed quadratum AD,* ęquale eſt quadratis AI, ID, & rectangulum AD,
8 sexti IL ęquale rectangulo AID; nam cum ſint* ſimilia triangula AID, ILD, & ob id, vt AD ad AI, ita ID ad IL, rectangulum AD, IL ſub extremis, ęquale erit rectangulo AID ſub medijs; ergo quadratum AB ęquale erit C
quadratis AI, ID, minus duplo rectangulo AID; ſed & quadratum Ak dif-
Th.4.primi ferentię ipſarum AI, ID,* ęquale eſt quadratis AI, ID, minus duplo rectangulo AID, ergo quadratum AK quadrato AB, ęquale erit, quare & recta AK ęqualis rectę AB. Conſtructum eſt igitur triangulum AID, &c. quod facere oportebat.

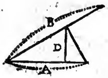
Problema IV.

Dato aggregato crurum trianguli angulum rectum ambientium, dataque perpendiculari. inenire triangulum.

SIt data compoſita ex cruribus trianguli angulum rectum ambientibus B. D
perpendicularis autem D. oportet inuenire triangulum.

Reſolutio.

FActum iam ſit, & baſis illius trianguli eſto A.
8 sexti Quoniam igitur triangula ad perpendicularem* ſimilia ſunt toti triangulo, erit vt baſis totius trianguli ad crus vnum; ita crus alterum, ad perpen-
16 sexti dicularem, & ideo id quod fit ſub extremis* æquabitur ei, quod fit ſub medijs, hoc eſt



D in

A D in A æquabitur rectangulo ſub cruribus,

Sed quadratum compoſitæ ex cruribus* æquale eſt quadratis crurum, vna cum duplo rectangulo ſub cruribus, ergo *4 ſecundi*

B Q æquabitur A Q + D in A 2

Quadratum enim baſis, hoc eſt A Q æquale eſt quadratis crurum; duplum autem rectangulum ſub baſe, & perpendiculari, hoc eſt D in A 2 æquale duplo rectangulo ſub cruribus, vt eſt demonſtratum. Denique explicata æquatione.

L. V. (B Q + D Q) − D æquabitur A

Poriſma.

B

Recta, cuius quadratum æquale eſt quadratis aggregati videlicet crurum, angulum rectum ambientium, perpendicularis, contracta ipſa perpendiculari, æqualis eſt baſi trianguli.

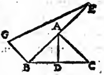
Datur ergo baſis trianguli, de qua quærebatur.

Ex Poriſmate apparet triplam perpendicularem non eſſe maiorem rectà, cuius quadratum æquale eſt quadratis aggregati crurum, & perpendicularis; nam ſi ab ea recta auferenda eſt perpendicularis, & ex reliqua facienda baſis trianguli conſtruendi, vt Poriſmà docet, ipſa baſis non debet eſſe minor, quàm dupla perpendicularis, in triangulo enim rectangulo ſi crura ſunt æqualia, baſis dupla eſt ipſius perpendicularis, ſi inæqualia, maior eſt quàm dupla

C perpendicularis. Hæc demonſtranda ſunt, & Problemati adijcienda determinatio, ne data ſuos limites egrediantur.

Lemma.

Tripla perpendicularis trianguli rectanguli ab angulo recto in baſim cadens, non eſt maior, quàm recta, cuius quadratum æquale eſt quadratis aggregati crurum, & perpendicularis.

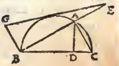


Sit triangulum rectangulum A B C, à cuius angulo recto B A C cadat in baſim B C perpendicularis A D, & B A producatur in E longitudine A C, & ducatur ipſi B E

D perpendicularis B G; æqualis autem ipſi A D, & connectatur G E; eius quadratum æquale erit quadratis B E, B G, hoc eſt aggregati crurum, & perpendicularis. Dico igitur triplam A D, non eſſe maiorem rectà G E: Aut enim æqualia ſunt crura B A, A C, aut inæqualia, ſint primum æqualia, ergo æquales erunt & B D, D A, D C: vnde quadratum B A duplum erit quadrati A D, ſed quadratum B E quadruplum eſt quadrati B A, cum ſit B E dupla ipſius B A, ergo quadratum B E octuplum erit quadrati A D, ſed quadratum G E æquale eſt quadratis G B, B E, & eſt recta G B æqualis rectæ A D, ergo quadratum G E nonuplum

 erit

erit quadrati A D, & conſequenter recta G E tripla rectæ A D. Tripla igitur A D non eſt maior, quam G E. A



Sed ſint inæqualia crura B A, A C, ergo & B D, D C erunt inæquales. Deſcribatur autem in B C ſemicirculus B A C, eius circumferentia tranſibit per A, propter angulum rectum B A C, & recta D A non erit ex centro, quare B C maior erit quam A D dupla, & conſequenter quadratum B C maius quadruplo quadrati A D, & rectangulum B C, A D maius duplo quadrati A D, & per conſequens duplum rectanguli B C, A D maius quadruplo quadrati A D, atque adeo quadratum B C, vnà cum duplo rectanguli B C, A D maiora erunt octuplo quadrati A D, ſed quadratum B C æquale eſt quadratis B A, A C, & duplum rectanguli B C, A D æquale duplo rectanguli B A C; eſt enim propter* ſimilitudinem triangulorum A B C, D A C, vt B C ad B A, ita A C ad A D, & ideo rectangulum ſub extremis B C, A D, æquale rectangulo B A C ſub medijs; ergo quadrata B A, A C vnà cum duplo rectanguli B A C, hoc eſt* quadratum B E, quæ eſt æqualis compoſitæ ex B A, A C, maius erit octuplo quadrati A D, atque adeo quadratum G E, cui æqualia ſunt quadrata G B, B E maius erit nonuplo quadrati A D, vnde & recta G B maior erit, quam tripla A D; quare conſtat propoſitum. B

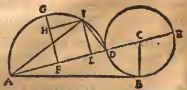
*8 ſexti. *4 ſecundi.

Hoc igitur demonſtrato, Problema ita determinandum erit.

Determinatio. C

OPortebit triplam perpendicularem non eſſe maiorem recta, cuius quadratum æquale eſt quadratis aggregati crurum, & perpendicularis.

Compoſitio Problematis.



SIt datum aggregatū crurum trianguli angulum rectum ambientiū A B, perpendicularis autem B C. Oportet inuenire triangulū. Inclinentur ad angulos rectos A B, B C, & connectatur A C, eius quadratum æquale erit quadratis A B, B C aggregati videlicet crurum, & perpendicularis, ab ipſa igitur A C auferenda eſt recta æqualis C B; reliqua vero ſumenda pro baſe trianguli conſtruendi; ſic Poriſma præcipit ergo centro C interuallo C B deſcribatur circulus ſecans A C in D, in reliqua vero A D deſcribatur ſemicirculus A G D, ex cuius centro quod ſit F ducatur perpendicularis F G, in qua ſumatur F H æqualis C B, vel C D, eſt autē C B non maior, quàm F G; nam ex determinatione Problematis tripla C B non eſt maior, quam A C, ergo nec dupla C B maior erit, quàm A C; nec ſimpla C B maior quàm F G. Ipſi autem A D parallela agatur H I ſecans circumferentiam D

in

A in I, & connectantur A I, I D. Itaque conſtructum eſt triangulum A I D, quemadmodum Poriſma docet: recta enim A C, (cuius quadratum æquale eſt quadratis datarum A B, B C, aggregato videlicet crurum, & perpendicularis) contracta longitudine C B baſis eſt trianguli A I D. Nunc oſtendendum eſt illud triangulum Problema efficere.

Producatur enim A C vſque ad circumferentiam circuli in E, & in A D cadat perpendicularis I L: ea parallela erit, & æqualis rectæ H F; atque adeo æqualis quoque datæ C B. eſt autem & angulus A I D in ſemicirculo rectus. Hæc omnia patent ex conſtructione. Compoſitam autem ex cruribus A I, I D, æqualem eſſe A B datæ, repetendo reſolutionis veſtigia, ita oſtendetur.

B Quoniam enim rectus eſt angulus A B C, & ideo A B tangit circulum in B, quadratum A B* æquale erit rectangulo E A D, ſeu quod idem eſt qua- 16 tertij
drato A D vnà cum rectangulo A D E, hoc eſt vnà cum duplo rectãgulo A D I L; eſt enim D E dupla ipſius I L, ex conſtructione; ſed quadratum A D* æ- 47 primi
quale eſt quadratis A I, I D, & rectangulum A D, I L æquale rectangulo A I D: nam cum ſint* ſimilia triangula A I D, I L D, & ob id, vt A D ad 8 ſexti
A I, ita I D ad I L, rectangulum A D, I L ſub extremis; æquale eſt rectangulo A I D ſub medijs. ergo quadratum A B, æquale erit quadratis A I, I D, vnà cum duplo rectangulo A I D; ſed & quadratum compoſitæ ex A I, I D,* æquale eſt quadratis A I, I D, vnà cum duplo rectanguli A I D, ergo 4 ſecundi
quadratum compoſitæ ex A I, I D, æquale erit quadrato A B: vnde & ipſa
C compoſita ęqualis rectę A B. Conſtructum eſt igitur triangulum A I D, &c. quod erat faciendum.

Problema V.

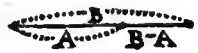
Datam rectam lineam ſecare, vt rectangulum ſub tota, & altera parte ęquale ſit quadrato partis reliquę.

HÆc eſt Propoſitio vndecima libri ſecundi Elementorum, ſeu trigeſima ſexti, quę iubet datam rectam lineam extrema, ac media ratione ſecare.

Reſolutio.

D SIt data recta linea ſecanda B, vt rectangulum ſub tota, & altera parte ęquale ſit quadrato partis reliquę.

Secta iam ſit, & pars maior eſto, A, ergo minor pars erit B -- A. Et cum rectangulum ſub tota & minori parte ęquale ſit quadrato partis maioris



BQ -- B in A ęquabitur AQ

Addito vtrique parti B in A, vt cognita ab incognitis ſeparentur.

BQ ęquabitur AQ + B in A

Et explicata ęquatione L. V. (BQ + BQ $\frac{1}{4}$) -- B $\frac{1}{2}$ ęquabitur A.

Poriſma: A

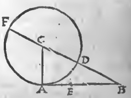
Recta cuius quadratum æquale eſt quadratis totius datæ, & dimidiæ eiuſdem contracta eadem dimidia, æqualis eſt parti maiori.

Datur ergo pars maior, de qua quæritur.

Hoc Problema vnico modo ab vna reſolutione pendente componitur, quoniam in eo vna tantum conditio requiritur, nempe vt rectangulum ſub tota data, & altera parte æquale ſit quadrato partis reliquæ.

Compoſitio.

Sit data recta linea A B, quam oportet ſecare, vt rectangulum ſub tota, & altera parte, æquale ſit quadrato reliquæ partis. Ducatur A C perpendicularis, & æqualis dimidiæ A B, & iungatur C B, à qua abſcindatur C D æqualis C A, reliquæ vero D B fiat æqualis B E. Secta eſt igitur A B in E, quemadmodum habetur ex Poriſmate: à recta enim C B, cuius quadratum æquale eſt quadratis A B, A C totius videlicet datæ, & dimidiæ eiuſdem, ablata eſt C D æqualis dimidiæ A B, reliquæ verò B D facta eſt æqualis B E. Itaque oſtendendum eſt rectangulum B A E æquari quadrato B E. id autem per repetitionem veſtigiorum Reſolutionis fiet manifeſtum. B



Centro enim C interuallo C A, vel C D circulus deſcribatur ſecans B C continuatam in F, is circulus tanget rectam A B in A, ac proinde rectangulum D B F quod * conſtat quadrato D B, & rectangulo F D B * æquale erit quadrato A B. auferatur vtrinque rectangulum F D B, quoniam in Reſolutione additum fuit; ergo reliquum quadratum D B, hoc eſt E B, æquabitur quadrato A B, minus rectangulo F D B, hoc eſt minus rectangulo A B E; ſunt enim æquales F D, A B; cum ſit A C dimidia ipſius A B; & æquales quoque D B, B E, ſeu quod idem eſt, æquabitur rectangulo B A E. Secta eſt igitur A B in E, vt Problema exigit, quod faciendum erat. C

8 ſecundi — *36 tertij*

Problema VI. D

In dato circulo aptare rectam lineam magnitudine datam, quæ ad datum punctum pertingat.

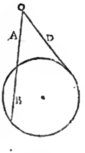
Hoc Problema duos caſus habet, aut enim datum eſt punctum extra circulum, aut intra; primo Caſu oportebit rectam magnitudine datam non eſſe maiorem diametro circuli; ſecundo vero Caſu oportebit eã nec eſſe maiorẽ diametro circuli, nec minorẽ ea recta linea in circulo,

quæ

A quæ in dato puncto ſecat diametrum ad rectos angulos; ea enim minima eſt omnium, cum ſit à centro omnium remotiſsima.

Reſolutio primi Caſus.

SIt iam factum. hoc eſt ſit aptata, in dato circulo, vt petitur, data recta linea B; quæ producta perueniat ad datum punctum O, à quo ducatur recta tangens circulum, ea data erit; quoniam datum eſt & punctum O poſitione, circulus vero poſitione & magnitudine. Sit igitur ea tangens D, & quæratur continuatio aptatæ; quæ eſt inter datum punctum, & aptatum. ea eſto A, ergo to-
B ta continuata, ſeu ſecans circulum, erit A + B. Et quoniam rectangulum ſub tota ſecante, & parte exteriori eiuſdem æquale eſt quadrato, tangentis, ideo



A Q + B in A æquabitur D Q

Et explicata æquatione. L. V. (D Q + B Q $\frac{1}{4}$) -- B $\frac{1}{2}$ æquabitur A.

Poriſma.

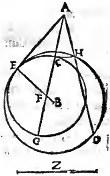
Recta, cuius quadratum æquale eſt quadrato tangentis circulum, & quadrato dimidiæ aptatæ in circulo, contracta eadem dimidia æqualis eſt continuationi aptatæ, quæ dato puncto, & aptata terminatur.

Datur ergo continuatio aptatæ de qua quæritur.

C

Compoſitio Primi Caſus.

SIt datus circulus E H D cuius centrum B; datum autem punctum A, quod ſit extra circulum, & data magnitudine recta linea Z, quæ non ſit maior diametro circuli. Oportet in circulo E H D rectæ lineæ, Z æqualem rectam lineam aptare, quæ ad punctum A pertingat. Si diametro circuli E H D æqualis eſt ipſa Z ducatur à puncto A per centrum circuli recta linea, & factum erit quod proponitur. Si vero ipſa Z minor eſt
D diametro, ducatur A E contingens circulum E H D in E, & connectatur B E, erit igitur angulus A E B rectus. deinde in E B ſumatur E F, æqualis dimidiæ Z, & connectatur quoque A F; quadratum igitur A F æquale erit quadratis A E, E F, hoc eſt tangentis, & dimidiæ Z.



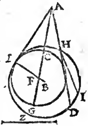
itaque à recta A F auferenda eſt recta æqualis ipſi F E, vel dimidiæ Z, reſiduæ vero facienda eſt æqualis continuatio aptandę, quę dato puncto, & aptanda terminabitur. Sic habetur ex Poriſmate. ergo à recta F A abſcindatur F C ęqualis F E, & centro A internallo A C deſcribatur arcus ſecans circulum E H D in H, & per punctum H ducta recta linea A H D vſque ad cauam eiuſdem cir-

circuli circumferentiam, aptata erit H D in circulo, quemadmodum Poriſma docet. Eam autem æqualem eſſe Z datæ, ſic demonſtrabitur. A

Centro enim F interuallo F E, vel F C deſcribatur circulus ſecans A F continuatam in G. Quoniam igitur æqualia ſunt rectangula H A D, C A G vtrunque enim æquale eſt quadrato A E, atque eſt A H æqualis A C, erit & A D æqualis A G, quare per ſubductionem æqualium A H, A C, æqualibus A D, A C, fiunt & reliquæ H D, C G æquales; ſed C G æqualis eſt Z, vtraque enim dupla eſt ipſius E F; ergo & H D ipſi Z æqualis erit. In dato igitur circulo E H D aptata eſt H D datæ Z æqualis, eaque ad punctum A pertingit quod facere oportebat.

Hoc Problema quia duas conditiones exigit nempe vt aptata in circulo ſit æqualis datæ rectæ lineæ, & vt ad datum punctum pertingat, dupliciter componi poteſt deductis ab vna, eademque Reſolutione compoſitionibus, & licet hæc altera quæ ſequitur Compoſitio ſit multis de cauſis inferior, quàm prima eam tamen ſubijcere volui, vt oſtendatur ex qualibet Reſolutione, tot compoſitiones oriri, quot in Problemate conditiones requiruntur. B

Alia eiuſdem Caſus Compoſitio.

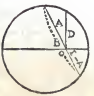


SInt igitur eadem data, & oporteat facere quod imperatum eſt. Ducatur A E, vt prius contingens circulum E H D in E, & iũgatur B E, & in ea ſumatur E F æqualis dimidiæ Z, & iungatur A F, ab eaque abſcindatur F C æqualis F E, & centro A interuallo A C deſcribatur arcus ſecans circulum F H D in H, in quo accommodetur H D æqualis Z. Dico H D Problema efficere, eamq. productã peruenire ad punctũ A. Cẽtro enim F. interuallo F C, vel F E deſcribatur circulus ſecans A F productam in G, & iungatur A H. Oſtendendum eſt igitur A H D rectam eſſe lineam. C
Si enim non eſt recta linea A H D producatur A H. vſque ad cauam circumferentiam circuli E H D in I. Rectangulum igitur H A I æquale erit rectangulo C A G, vtrunque enim æquale eſt quadrato A E tangentis, ea enim vtrumque circulum tangit, ſed rectangulum C A G æquale eſt rectangulo ſub H A, & compoſita ex A H, H D; ſunt enim æquales A C, A H; & æquales quoque C G, H D, ex conſtructione, & ideo æquales, & A G, A I; ergo rectangulum H A I, æquale erit rectangulo ſub H A, & compoſita ex A H, H D; quare A I æqualis erit compoſitæ ex A H, H D dempta communi A H; reliqua H I reliquę H D ęqualis erit, quod eſt abſurdum: recta eſt igitur linea A H D; quod oſtendiſſe oportuit, atque adeo aptata eſt in circulo recta H D, eaque ad punctum A pertingit quod faciendum erat. D

Re-

A

Reſolutio ſecundi Caſus.





FActum iam ſit, hoc eſt ſit aptata in circulo vt petitur data recta linea B, eaque tranſeat per datum punctum O, per quod ducatur circuli diameter cui à puncto O, ducatur perpendicularis vſque ad circumferentiam. Quoniam igitur datum eſt punctum O, poſitione, circulus vero poſitione, & magnitudine, ergo & diameter eius tranſiens per O dabitur poſitione, & magnitudine, atque adeo dabitur & ipſa perpendicularis, ergo ſit ea D, & quæratur alterutra pars aptatæ, quæ in dato puncto diuidi-
B tur: ea eſtò A; ergo reliqua pars erit B -- A & rectangulum ſub partibus aptatæ* æquale erit rectangulo ſub partibus diametri, hoc eſt quadrato perpendicularis, itaque, * 35 tertij

B in A -- A Q æquabitur D Q

Et explicata ſecundum tertium Canonem æquatione

$B \frac{1}{2} + L.V.(B Q \frac{1}{4} -- D Q)$ æquabitur A

Vel $B \frac{1}{2} - L.V.(B Q \frac{1}{4} -- D Q)$ æquabitur A

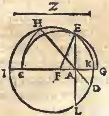
In hac æquatione A explicabilis eſt de duobus terminis, quorum primus eſt pars maior aptatæ, ſecundus pars minor, in eamdem enim æquationem incidītur ſiue de maiori parte aptatæ quæritur, ſiue de minori.

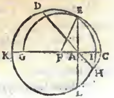
C

Poriſma.

Dimidia aptata in circulo, protracta longitudine rectæ, cuius quadratum æquale eit exceſſui, quo quadratum dimidiæ aptatæ ſuperat quadratum perpendicularis, æqualis eſt parti maiori aptatæ, quæ dato puncto diuiditur, contracta vero æqualis eſt parti minori.

Compoſitio Secundi Caſus.





SEd ſit in circulo datum A punctũ, & data z non ſit maior diametro circuli dati H E D, neque minor ea recta linea in circulo, quàm diameter
D per punctũ A ducta ſecat ad rectos angulos, & oporteat facere quod imperatum eſt. Ducatur per A circuli diameter I A K, cui ſi ſit æqualis Z data, factum iam erit quod proponitur ſi vero ſit minor ducatur per A ipſi diametro ad rectos angulos E A L & ſi ipſa E L æqualis ſit datæ Z, rurſus factũ erit quod proponitur, ſi vero Z maior ſit quam E L ponatur in A I recta linea E F æqualis dimidiæ Z; eſt autem dimidia Z maior, quam A E, cum tota Z ponatur maior, quàm tota E L, quæ dupla eſt ipſius A E. Quadratum igitur E F ſuperat

qua-

quadratum E A quadrato A F, itaque dimidiæ Z addenda eſt recta A F, ei- A
que ſic auctæ facienda æqualis pars maior aptandæ, quæ in puncto A diuiſa erit. Vel dimidiæ Z detrahenda eſt recta A F, & reſiduæ facienda æqualis pars minor aptandæ, ſic Poriſma fieri docet. Igitur rectæ F E fiat æqualis F C, & centro A interuallo A C deſcribatur arcus ſecans circulum H E D in H, & iuncta H A producatur vſque ad circumferentiam in D. Dico rectam H D Problema efficere. Centro enim F interuallo F C, vel F E deſcribatur circulus ſecans F K etiam productam in G. Quoniam igitur æqualia ſunt rectangula H A D, C A G; vtrunque enim æquale eſt quadrato A E, atque eſt A H æqualis A C, erit & A D æqualis A G; quare per additionem æqualium A D, A G æqualibus A H, A C, fiunt quoque æquales & H D, C G, ſed C G æqualis eſt Z, vtraque enim dupla eſt ipſius F E, ergo & H D ipſi Z æqualis erit. B
In dato igitur circulo H A D aptata eſt H D æqualis Z datæ, eaque per punctum A tranſit, quod erat faciendum.

Et hic Caſus duplicem admittit Compoſitionem, vtramque ex vna, eademque Reſolutione emanantem, ſed primi Caſus compoſitiones ad exemplum ſufficiant.

Problema VII.

Dato ſemicirculo, & recta linea ſit ipſius baſi perpendicularis. Inter ipſam perpendicularem, & circumferentiam ſemicirculi ponere rectam lineam magnitudine datam, quæ ad ſemicirculi angulum pertingat. C

HOc Problema ſex Caſus habet; tres quidem ſunt cum perpendicularis ſecat baſim ſemicirculi productam. primus differt à reliquis duobus, quod in primo ponenda eſt recta magnitudine data inter perpendicularem, & conuexam ſemicirculi circumferentiam. In reliquis vero ponenda eſt inter perpendicularem, & circumferentiam cauam. Secundus autem Caſus differt à tertio, quod in ſecundo baſis ſemicirculi non eſt maior ſegmento baſis productæ, quod inter perpendicularem, & circumferentiam interijcitur, in tertio autem maior eſt.

Quartus autem Caſus, & quintus eſt cum perpendicularis in ipſam baſim cadit; quartus differt à quinto, quod in quarto ponenda eſt recta magnitudine data inter perpendicularem, & circumferentiam cauam. At in quinto D
ponenda eſt inter perpendicularem, & circumferentiam conuexam.

Sextus denique Caſus eſt cum perpendicularis in extremitatem baſis ſemicirculi cadit.

Primi quatuor Caſus determinatione indigent: duo vero reliqui indeterminati ſunt.

Primo igitur Caſu oportet rectam magnitudine datam non eſſe minorem eo ſegmento baſis productæ, quod inter perpendicularem, & circumferentiam interijcitur.

Secundo Caſu oportet illam magnitudine datam, non eſſe minorem baſe pro-

A producta, vſque ad perpendicularem.

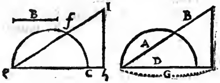
Tertij Caſus determinaionem quære ex Poriſmate Reſolutionis, ſiquidem in ea ſemicirculi, & perpendicularis poſitione non dum liquet, quæ ſit minima interceptarum à circumferentia, & perpendiculari quemadmodum cernitur in præcedentibus, & in ea quæ ſequitur inſpecta tantum ſemicirculi & perpendicularis poſitione.

Quarto denique Caſu oportebit rectam magnitudine datam non eſſe maiorem ſegmento baſis ſemicirculi, quod inter perpendicularem, & circumferentiam interijcitur ex ea parte ponendæ.

Reſolutio primi Caſus.

B Sit datus ſemicirculus EFC, in cuius baſim productam cadat perpendicularis IH, & data recta linea B, quæ non ſit minor, quàm CH. Oportet inter circumferentiam ſemicirculi, & ipſam perpendicularem ponere rectam lineam æqualem datæ B; itaut ad punctum E pertineat.

Sit iam factum, & ſit ea recta FI, & connectatur CF. ſit autem datarum FI, EC, EH, prima B, ſecunda D, tertia G, vt in ſecunda figura, & quæratur EF, ea eſto A. duplicem figuram



C appoſui, primam quidem vt expoſitio Problematis clarior fiat; ſecũdum vero vt Roſolutioni ſeruiat, eaſque diſtinxi, ne multitudine, & diuerſitate literarum, quæ in vna figura exiſterent obruantur ſtudioſi potius, quàm iuuentur. Quoniam igitur ſimilia ſunt triangula EFC, EHI, angulus enim EFC in ſemicirculo rectus eſt, & ideo æqualis angulo recto H, & angulus ad E communis eſt vtrique, erit vt EF ad EC, ita EH ad EI, hoc eſt in figura ad reſolutionem pertinente proportionales erunt.

A D G A ✣ B

Sed quod ſit ſub extremis æquale eſt facto ſub medijs, ergo

D A Q ✣ B in A æquabitur D in G

Et explicata æquatione L. V. (B Q $\frac{1}{4}$ ✣ D in G) — B $\frac{1}{2}$ æquabitur A.

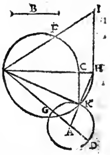
Poriſma.

Recta, cuius quadratum æquale eſt quadrato dimidiæ FI & rectangulo CEH, contracta dimidia FI æqualis eſt rectæ EF.

Datur ergo EF quæſita.

Com-

Compoſitio Primi Caſus.



A

SIt datus ſemicirculus E F C, in cuius baſim E O productam cadat perpendicularis I H, & data quoque recta linea B, quæ non ſit minor, quàm C H. Oportet inter perpendicularem I H, & circumferentiam E F C datæ B æqualem rectam ponere, quæ ad punctum E pertingat. Si B æqualis ſit rectæ C H, factum iam erit quod proponitur, ſi vero ſit maior; deſcribatur in E H ſemicirculus E k H, & ipſi E H agatur perpendicularis C k, & iungantur E K, k H. angulus igitur E k H in ſemicirculo rectus eſt, ac proinde E k* media proportionalis inter C E, E H, quare quadratum E k* æquabitur rectangulo C E H. Producatur autem H k in A, vt ſit k A æqualis dimidiæ B, & iungatur E A: quadratum igitur E A æquale erit quadratis A K, k E, hoc eſt quadrato dimidiæ B, & rectangulo C E H. à recta igitur E A auferenda eſt A G æqualis A K, vel dimidiæ B, reſiduæ vero E G æqualis aptanda eſt recta in ſemicirculo E F C ſic Poriſma docet. aptetur ergo, & ſit ea E F. demonſtrabitur infra, A G minorem eſſe, quàm E C. denique producta E F donec occurrat rectæ H I in I. Dico F I æqualem eſſe datæ B. Iungatur enim F C, & centro A interuallo A K, vel A G deſcribatur circulus ſecans E A productam in D. is circulus tanget rectam E K in k quia rectus eſt angulus E K, cum ſit rectus & k H; quare rectangulum G E D æquale erit quadrato E B hoc eſt rectangulo C E H, vt igitur G E, ſeu F F ad E C, ita erit E H ad E D; ſed propter ſimilitudinem triangulorum E F C, E H I, eſt vt E F ad AC, ita E H ad E I ergo ipſa E I æqualis erit E D, & ablatis æqualibus E F, E G, reliqua F I reliquæ G D hoc eſt datæ B, æqualis erit. Poſita eſt igitur inter circumferentiam E F, & perpendicularem I H recta F I æqualis B, eaque ad punctum E pertingit: quod erat faciendum. B C

Corol. 8. ſexti

87 ſexti

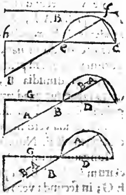
At vero E G minorem eſſe, quàm E C manifeſtum eſt, ſi enim non eſt minor, erit maior, vel æqualis: ſed ponitur & G D, hoc eſt B, maior quàm C H, ergo & E D tota maior erit quàm tota E H. vnde rectangulum G E D, hoc eſt quadratum E K, maius erit rectangulo C E H, quod eſt abſurdum, illud enim quadratum huic rectãgulo* æquale eſt. Non igitur E G maior eſt quàm E C, aut ei æqualis, ergo minor quod oſtendiſſe oportuit. D

Corol. 8 ſexti

Determinatione cautum eſt ne data B ſit minor, quàm C H; nam ipſa C H minima eſt omnium, quæ ad punctum E pertinentes inter circumferentiam E F C, & rectam I H interijciuntur. Ducatur enim alia vtrumque recta linea E F I, ea maior erit quam E H, ſed & E C maior eſt quam E F, ergo reliqua C H minor erit quàm reliqua F I & ſic oſtendetur omnibus alijs minor. Minima eſt igitur omnium C H, quare manifeſta eſt determinatio.

A Reſolutio ſecundi Caſus.

SIt datus ſemicirculus e f c è cuius baſe continuata longitudine, non minore ipſa baſe, cadat perpendicularis h i: data autem recta linea B, quæ non ſit minor, quàm c h. Oportet inter perpendicularem h i, & circumferentiam e f c ponere rectam lineam æqualem datæ B, ita vt ad punctum e pertingat.



Sit iam factum, & ſit ea recta f e i, & iungatur f c. datæ ſunt igitur f i, c e, e h. prima ſit B, ſecunda D, tertia G, & quæratur ſiue e i, ſiue e f. altera earum eſto A, ergo reliqua erit B -- A.

B Et quoniam ſimilia ſunt triangula e f c, e h i, nam angulus e f c in ſemicirculo rectus eſt, & ideo æqualis angulo recto e h i, & angulus f e c æqualis angulo h e i, cum ſint ad verticem, erit vt e f ad e c, ita e h ad e i, hoc eſt in figura Reſolutionis proportionales erunt.

B -- A   D   G   A

Vel   A   D   G   B -- A

Et quod fit ſub extremis æquale erit ei, quod fit ſub medijs, ergo

B in A -- A Q æquabitur D in G

C Et explicata æquatione B $\frac{1}{2}$ + (B Q $\frac{1}{4}$ -- D in G) æquabitur A

Vel   B $\frac{1}{2}$ -- (B Q $\frac{1}{4}$ -- D in G) æquabitur A

In hac æquatione A explicabilis eſt de duobus terminis, quorum primus eſt e i, ſecundus e f ſi quidem in eandem æquationem inciditur, ſiue de e i quæritur, ſiue de e f.

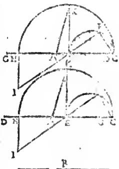
Poriſma.

Dimidia f i, protracta longitudine rectæ, cuius quadratum æquale eſt exceſſui, quo quadratum dimidiæ f i ſuperat rectangulum c e h, æqualis eſt rectæ e i; contracta verò æqualis rectę e f.

D Datur ergo vtraque e i, e f.

Compoſitio ſecundi Caſus.

SIt datus ſemicirculus E F C, vt ſupra, & oporteat facere quod propoſitum eſt. Si B data æqualis ſit H C, factum iam erit quod proponitur. ſi vero ſit maior, agatur ipſi H C perpendicularis E K, quam ſemicirculus in H C deſcriptus ſecet in k, erit E k minor quàm dimidia B, cum ſit & H C minor quam tota B. Itaque poterit à puncto K in rectam E H duci recta æqualis dimidię B. ducatur igitur k A



ea maior erit quam A H, minor autem quam A C; nam cum ſit A k maior, quàm dimidia H C, erit centrum circuli H K C in A C, & ideo A K maior quam A H, & minor quam A C. Producatur ergo A H in G, vt ſit A G æqualis A K, vel dimidiæ B, & in H I ponatur E I æqualis E G, eaque producatur ad circumferentiam in F. A

Vel vt in ſecunda figura ab A C abſcindatur recta A G æqualis A k, & in ſemicirculo E F C accommodetur E F æqualis E G, eaque producatur in I. alterutro modo id fiat, factum erit quemadmodum Poriſma docet, in prima enim figura rectæ A G, cui æqualis eſt dimidia B, addita eſt A E, cuius quadrato ſuperatur quadratum K E à quadrato A K, hoc eſt ſuperatur rectangulum C E H à quadrato dimidiæ B, & toti E G facta eſt æqualis E I. B

In ſecunda vero figura rectæ A G detracta eſt A E, & reliquæ E G facta eſt æqualis E F. Nunc oſtendendum eſt rectam I E F Problema efficere.

Iungatur enim F C, & ſumatur A D æqualis A G. Quoniam igitur rectarum G A, A E, in prima quidem figura differentia eſt E D, aggregatum E G; in ſecunda vero differentia eſt E G, aggregatum E D; ideo in vtraque figura rectangulum G E D, ſub aggregato, & differentia * æquale erit differentiæ quadratorum G A, A E, ſeu k A, A E, hoc eſt quadrato k E, vel rectangulo H E C: ſed & rectangulum I E F æquale eſt eidem rectangulo H E C, nam cum ſint ſimilia triangula E H I, E F C, eſt vt E H ad E I, ita E F ad E C, & ideo rectangulum H E C ſub extremis æquale rectangulo I E F ſub medijs; ergo rectangulum G E D æquale erit rectangulo I E F. In prima quidem figura ſic argumentor. ſed ſi æqualis eſt G E, ergo & E F, ac proinde tota I F æqualis toti G D, hoc eſt ipſi B. In ſecunda vero figura argumentor hoc modo; ſed E F æqualis eſt E G, ergo & E I æqualis erit E D, & conſequenter tota I F, æqualis toti D G, hoc eſt datæ B, quod erat oſtendendum. Poſita eſt igitur inter perpendicularem H I, & circumferentiam E F C recta I F æqualis datæ B, eaque ad punctum E pertingit: quod erat faciendum. C

Theor. 4 primi

At vero rectam H C minimam eſſe omnium, quæ ad punctum E pertinent, & inter perpendicularem H I, & circumferentiam E F C interijciuntur ſic demonſtrabitur. D

Ducatur enim alia quæcunque recta I E F, & iungatur F C. Quoniam igitur propter ſimilitudinem triangulorum E F C, E H I, eſt vt E F ad E C, ita E H ad E I, atque eſt maxima quidem E I, minima vero E F; erit I F compoſita ex maxima, & minima maior, quàm H C compoſita ex reliquis: & ſic oſtendetur H C minor omnibus alijs. Quare manifeſta eſt determinatio.

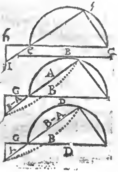
Re-

A Reſolutio Tertij Caſus.

SIt datus ſemicirculus e f c, è cuius baſe continuata longitudine minori ipſa baſe cadat perpendicularis h i, dataque recta linea B: & oporteat facere quod imperatum eſt. In hoc caſu quoniam ex hac ſemicirculi, & perpendicularis poſitione non videtur offerri minima interceptarum à perpendiculari, & circumferentia ſemicirculi, quemadmodum in caſibus præcedentibus, ideo determinatio petenda eſt ex Poriſmate.

Sit igitur factum ducta ſcilicet recta i e f æqualis datæ B, & iungatur F C, ſitque datarum i f, e c, e h, prima B, ſecunda D, tertia G, & quæratur alterutra partium e i, e f, ea eſto A, ergo reliqua

B erit B -- A, & propter ſimilitudinem triangulorum e f c, e h i, erit vt e f ad e c, ita e h ad e i, hoc eſt in figuris ad reſolutionem pertinentibus, proportionales erunt.



A D G B -- A

Vel B -- A D G A

Et factum ſub extremis æquale erit facto ſub medijs, hoc eſt

B in A -- A Q æquabitur D in G.

Et explicata æquatione B $\frac{1}{2}$ + L. V. (BQ $\frac{1}{4}$ -- D in G) æquabitur A

C Vel B $\frac{1}{2}$ -- L. V. (BQ $\frac{1}{4}$ -- D in G) æquabitur A

Et in hac quoque æquatione A explicabilis eſt de duobus terminis, quorum primus indicat maiorem quæſitarum e f, e i, ſecundus minorem.

Poriſma.

Dimidia f i protracta longitudine rectæ, cuius quadratum æquale eſt exceſſui, quo quadratum dimidiæ f i ſuperat rectangulum h e c, æqualis eſt maiori partium e f, e i, contracta verò, minori.

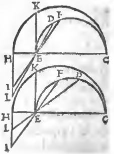
Ex hoc Poriſmate apparet, dimidiam B, non eſſe minorem mediâ pro-

D portionali inter rectas e h, e c. Poriſma enim indicat quadratum dimidiæ B non eſſe minus rectangulo h e c, iubet enim auferri rectangulum illud à quadrato dimidiæ B, minus videlicet à maiori, vel ſaltem æquale ab æquali, non autem maius à minori; neque enim, vt dictum eſt, Poriſma iubet, quod fieri non poteſt. Determinatio igitur tertij Caſus, quam dixi ex Poriſmate petendam, hæc erit.

Determinatio tertij Caſus, A

OPortebit datam B non eſſe minorem dupla media proportionali inter H E, E C. Nam ipſa media dupla minima eſt omnium interceptarũ à perpendiculari H I, & circumferentia E F C; quod quidem ſic demonſtrabitur,

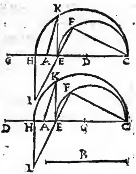
Reſumatur antecedens figura, & deſcribatur in H C ſemicirculus ſecans E k ipſi H C perpendicularem in k, erit ergo E k media proportionalis inter E H, E C. Accommodetur autem in ſemicirculo E F C recta E F æqualis Ek, eaque producta ſecet perpendicularem H I in I, & iungatur F C. erit ob ſimilitudinem triangulorum E F C, E H I vt E C ad E F, ita E I ad E H, ſed B
vt E C ad E K, hoc eſt ad E F, ita eſt E F ad E H, * ergo E F æqualis erit E I, atque adeo tota I F dupla erit ipſius E K. Dico igitur ipſam I F minimam eſſe omnium ductarum per E, quæ à perpendiculari H I, & circumferentia E F C intercipiuntur.



Ducatur enim alia recta vtcumque L E D, & iungatur D C, Quoniam igitur ſimilia ſunt triangula E D C, E H L, erit vt E D ad E C, ita E H ad E L; ſed oſtenſum eſt, vt E C ad E F, ita eſſe E I ad E H, ergo in perturbata proportione erit vt E D ad E F, ita E I ad E L, ſed in prima quidem figura maxima eſt E L, minima E D; in ſecunda* vero maxima eſt E D, C
minima E L, vtroque igitur Caſu L D cum ſit compoſita ex maxima, & minima, maior erit, quàm I F compoſita ex reliquis. & ſic demonſtrabitur I F minor omnibus alijs. Minima eſt igitur I F. quod erat oſtendendum.

Compoſitio tertij Caſus.

SIt datus ſemicirculus E F C, vt dictum eſt; data autem recta linea B, quæ non ſit minor dupla proportionali inter H E, E C. & oporteat facere quod imperatum eſt. Deſcribatur in H C ſemicirculus, quem acta perpendicularis E k ſecet in k, & in E H ponatur k A æqualis dimidiæ B; eſt autem dimidia B non minor, quàm K E; cum tota B non ſit minor quàm dupla E k, ex Determinatione: Deinde producatur A H in G, vt ſit A G æqualis A K, & in H I ponatur E I æqualis E G, eaque producatur ad circumferentiam in F. D

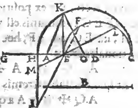


Vel vt in ſecunda figura ſumatur in A C recta A G æqualis A K, & in ſe-

A ſemicirculo E F C accommodetur E F æqualis E G, eaque producatur in I. ſiue hoc, ſiue altero modo fiat conſtructio, ea facta erit quemadmodum Poriſma iubet. rectamque I E F æqualem eſſe datæ B demonſtrabitur eadem ratione, qua in antecedenti Caſu immo eadem verborum textura. quare ijs repetitis habebis demonſtrationem.

Quando autem data B maior eſt, quam dupla E k, non autem quàm H C, poſsibile eſt per punctum E ducere duas rectas lineas, quarum vtraque inter perpendicularem H I, & circumferentiam E F C interiecta æqualis erit datæ B.

Repetatur enim eadem conſtructio, quæ ſupra, & ſit inter perpendicularem H I, & circumferen-



B tiam E F C poſita recta I E F æqualis ipſi B, & à puncto K ad centrum circuli H k C, quod ſit O, ducatur K O, ea non erit minor, quàm k A, cui æqualis eſt dimidia B, cum & H C ponatur non minor quam B, quare neque quadratum K O minus erit quadrato k A. hoc eſt neque quadrata K E, E O minora erunt quadratis k E, E A, atque ablato communi quadrato K E, reliquum quadratum E O non erit minus reliquo quadrato E A; nec ideo recta E O minor, quàm recta E A, ſed & O C non eſt minor quàm A G, ergo tota E C non erit minor quam E G tota. Accommodetur igitur in ſemicirculo E F C recta E L
C æqualis E G, vel E I, & producatur donec ſecet perpendicularem H I in M, & iungatur L C. Quoniam igitur propter ſimilitudinem triangulorum E L C, E H M eſt vt E L ad E C, ita E H ad E M, & propter ſimilitudinem triangulorum E F C, E H I, vt E C ad E F, ita E I ad E H, erit in perturbata proportione, vt E L ad E F, ita E I ad E M, ſed E L prima æqualis eſt tertiæ E I, ex conſtructione, ergo & ſecunda E F æqualis erit E M quartæ, & conſequenter tota M L æqualis toti I F, atque adeo vtraque æqualis B datæ.

Idem autem Caſus poterit conſtrui alia quoque ratione in eodem Poriſmate expoſita, vbi enim in ſemicirculo E F C accommodata eſt recta E L æqualis E G, vel E I, hic, omiſſa ea accommodatione ponatur in H I recta E M æqualis E D, vel E F, ſi quidem ipſa E D, vel E F non eſt minor quam
D E H, quia cum ſit ob ſimilitudinem triangulorum E F C, E H I, vt E C ad E F, ita E I ad E H, atque E C prima non minor, quam tertia E I, vel E C, vt demonſtrauimus ſupra, erit & ſecunda E F non minor, quàm E H quarta. Ipſa autem M E producatur ad circumferentiam E F C in L, & iungatur L C; erit igitur ob ſimilitudinem triangulorum E F C, E H I, vt E F ad E C, ita E H ad E I, ſed vt E C ad E L, ita eſt E M ad E H, ob ſimilitudinem triangulorum E L C, E H M, ergo in perturbata proportione, vt E F ad E L, ita erit E M ad E I, ſed E F prima æqualis eſt E M tertiæ, ex conſtructione, ergo & ſecunda E L æqualis erit quartæ E I; itaque tota I F æqualis erit, toti M L, & per conſequens vtraque æqualis B datæ.

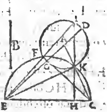
Poriſma. A

Recta, cuius quadratum æquale eſt quadrato dimidiæ F I, & rectangulo H E C, contracta eadem dimidia F I æqualis eſt rectæ E F.

Datur ergo E F quæſita.

Compoſitio quinti Caſus.

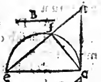
SIt datus ſemicirculus E F C, vt ſupra, & oporteat facere quod propoſitum eſt. Ducantur ad punctum k, in quo perpendicularis I H ſecat circumferentiam E F C rectæ E K, C K, ipſaque C K, producatur in A, vt ſit k A æqualis dimidiæ B, & iungatur E A, B
ab eaque abſcindatur A G æqualis A k, & in ſemicirculo E F C accommodetur E F æqualis E G, & producatur vſq, ad perpendicularem H I. Factum eſt igitur quemadmodum Poriſma docet: à recta enim A E, cuius quadratum æquale eſt quadratis A K, K E, hoc eſt quadrato dimidiæ B, & rectangulo H E C, ablata eſt A G æqualis dimidiæ B, & reſiduæ E G aptata eſt in ſemicirculo æqualis E F. Rectam autem F I æqualem eſſe datæ B, ita fit manifeſtum.



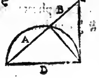
Iungatur enim F C & centro A interuallo A E, vel A G deſcribatur circulus ſecans E A productam in D, is circulus tangit rectam E K in K, rectus eſt enim angulus A K E, cum ſit rectus & angulus E k C in ſemicirculo, & propterea rectangulum G E D æquale erit quadrato E k, hoc eſt rectangulo H E C, C
quare vt G E ſeu E F ad E C, ita erit E H ad E D, ſed vt E F ad E C, ita eſt quoque E H ad E I ob ſimilitudinem triangulorum E F C, E H I, quorum anguli E F C, E H I ſunt recti, & ideo æquales, & angulus I E H communis eſt. vtrique ergo E I æqualis erit E D, & ablatis æqualibus E F, E G, reliqua F I reliquæ G D, hoc eſt datæ B æqualis erit: quod erat oſtendendum: quare factum eſt quod oportebat.

Reſolutio Sexti Caſus.

SIt datus ſemicirculus E F C, in cuius baſis extremitatem cadat perpendicularis I C; data autem recta linea B, & oporteat, inter ipſam perpendicularem, & circumferentiam ſemicirculi ponere rectam lineam æqualem ipſi B, ita vt ad punctum E pertingat. D



Sit factum & ſit ea recta F I, & connectatur F C. ſintque datarum F I, E C, prima B, ſecunda D, & quæratur E F ea eſto A. Quoniam igitur angulus E F C in ſemicirculo Corol. 1 ſexti rectus eſt, erit E C * media proportionalis inter E F, E I ideſt in reſolutionis figura proportionales erunt.



A D

A   A D A ✣ B

Et quod ſit ſub extremis æquabitur quadrato mediæ hoc eſt

A Q ✣ B in A æquabitur D Q.

Et explicata æquatione L. V. (B Q $\frac{1}{4}$ ✣ D Q) -- B $\frac{1}{2}$ æquabitur A

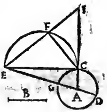
Poriſma.

Recta, cuius quadratum æquale eſt quadratis E C, & dimidiæ F I, contracta eadem dimidia F I, æqualis eſt rectæ E F.

Datur ergo E F quæſita.

B

Compoſitio Sexti Caſus.



SIt datus ſemicirculus E F C, vt dictum eſt, & oporteat iuſſum facere. Producatur I C in A, vt ſit C A æqualis dimidiæ B, & iungatur E A. eius quadratū æquale erit quadratis E C, & C A, hoc eſt, & dimidiæ B, à recta igitur E A auferatur A G æqualis dimidiæ B, & reliquæ E G accommodetur in ſemicirculo æqualis E F, eaque producta ſecet perpendicularem C I in I, hæc conſtructio habetur ex Poriſmate. Rectam autem F I æqualem eſſe datæ B, ita oſtendetur. Iungatur enim F C, & C deſcribatur ex centro A ad interuallum A C, vel A G circulus ſecans E A continuatam in D is circulus tanget rectam E C, in C, cum ſit rectus angulus E C A, & ideo rectangulum G E D * æquale erit quadrato E C, vnde recta 36 tertij E C erit media proportionalis inter E G, E D; ſed eadem E C eſt quoque * media proportionalis inter E F, E I, cum ſit rectus angulus E F C in ſemi- Corol. 8 ſexti circulo, atque eſt E F æqualis E G, ex conſtructione, ergo & E I æqualis erit E D, & ablatis æqualibus E F, E G, reliqua F I reliquæ G D, hoc eſt datæ B, æqualis erit quod erat oſtendendum. Factum eſt igitur quod oportuit.

Finis Libri Tertij.

MA-

Poriſma: A

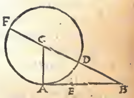
Recta cuius quadratum æquale eſt quadratis totius datæ, & dimidiæ eiuſdem contracta eadem dimidia, æqualis eſt parti maiori.

Datur ergo pars maior, de qua quæritur.

Hoc Problema vnico modo ab vna reſolutione pendente componitur, quoniam in eo vna tantum conditio requiritur, nempe vt rectangulum ſub tota data, & altera parte æquale ſit quadrato partis reliquæ.

Compoſitio.

Sit data recta linea A B, quam oportet ſecare, vt rectangulum ſub tota, & altera parte, æquale ſit quadrato reliquæ partis. Ducatur A C perpendicularis, & æqualis dimidiæ A B, & iungatur C B, à qua abſcindatur C D æqualis C A, reliquæ vero D B fiat æqualis B E. Secta eſt igitur A B in E, quemadmodum habetur ex Poriſmate: à recta enim C B, cuius quadratum æquale eſt quadratis A B, A C totius videlicet datæ, & dimidiæ eiuſdem, ablata eſt C D æqualis dimidiæ A B, reliquæ verò B D facta eſt æqualis B E. Itaque oſtendendum eſt rectangulum B A E æquari quadrato B E, id autem per repetitionem veſtigiorum Reſolutionis fiet manifeſtum. B C



Centro enim C interuallo C A, vel C D circulus deſcribatur ſecans B C continuatam in F, is circulus tanget rectam A B in A, ac proinde rectangulum D B F quod * conſtat quadrato D B, & rectangulo F D B * æquale erit quadrato A B. auferatur vtrinque rectangulum F D B, quoniam in Reſolutione additum fuit; ergo reliquum quadratum D B, hoc eſt E B, æquabitur quadrato A B, minus rectangulo F D B, hoc eſt minus rectangulo A B E; ſunt enim æquales F D, A B; cum ſit A C dimidia ipſius A B; & æquales quoque D B, B E, ſeu quod idem eſt, æquabitur rectangulo B A E. Secta eſt igitur A B in E, vt Problema exigit, quod faciendum erat.

* 3 ſecundi

* 36 tertij

D

Problema VI.

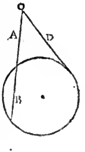
In dato circulo aptare rectam lineam magnitudine datam, quæ ad datum punctum pertingat.

Hoc Problema duos caſus habet, aut enim datum eſt punctum extra circulum, aut intra; primo Caſu oportebit rectam magnitudine datam non eſſe maiorem diametro circuli; ſecundo vero Caſu oportebit eã nec eſſe maiorẽ diametro circuli, nec minorẽ ea recta linea in circulo,

quæ

A quæ in dato puncto ſecat diametrum ad rectos angulos; ea enim minima eſt omnium, cum ſit à centro omnium remotiſsima.

Reſolutio primi Caſus.



SIt iam factum. hoc eſt ſit aptata, in dato circulo, vt petitur, data recta linea B; quæ producta perueniat ad datum punctum O, à quo ducatur recta tangens circulum, ea data erit; quoniam datum eſt & punctum O poſitione, circulus vero poſitione & magnitudine. Sit igitur ea tangens D, & quæratur continuatio aptatæ; quæ eſt inter datum punctum, & aptatum. ea eſto A, ergo to-
B ta continuata, ſeu ſecans circulum, erit A ✠ B. Et quoniam rectangulum ſub tota ſecante, & parte exteriori eiuſdem æquale eſt quadrato, tangentis, ideo

A Q ✠ B in A æquabitur D Q

Et explicata æquatione. L. V. (D Q ✠ B Q ¼) -- B ½ æquabitur A.

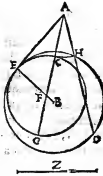
Poriſma.

Recta, cuius quadratum æquale eſt quadrato tangentis circulum, & quadrato dimidiæ aptatæ in circulo, contracta eadem dimidia æqualis eſt continuationi aptatæ, quæ dato puncto, & aptata terminatur.

Datur ergo continuatio aptatæ de qua quæritur.

C

Compoſitio Primi Caſus.



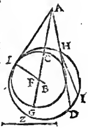
SIt datus circulus E H D cuius centrum B; datum autem punctum A, quod ſit extra circulum, & data magnitudine recta linea Z, quæ non ſit maior diametro circuli. Oportet in circulo E H D rectæ lineæ, Z æqualem rectam lineam aptare, quæ ad punctum A pertingat. Si diametro circuli E H D æqualis eſt ipſa Z ducatur à puncto A per centrum circuli recta linea, & factum erit quod proponitur. Si vero ipſa Z minor eſt
D diametro, ducatur A E contingens circulum E H D in E, & connectatur B E, erit igitur angulus A E B rectus. deinde in E B ſumatur E F, æqualis dimidiæ Z, & connectatur quoque A F; quadratum igitur A F æquale erit quadratis A E, E F, hoc eſt tangentis, & dimidiæ Z. itaque à recta A F auferenda eſt recta æqualis ipſi F E, vel dimidiæ Z, reſiduæ vero facienda eſt æqualis continuatio aptandæ, quæ dato puncto, & aptanda terminabitur. Sic habetur ex Poriſmate. ergo à recta F A abſcindatur F C æqualis F E, & centro A internallo A C deſcribatur arcus ſecans circulum E H D in H, & per punctum H ducta recta linea A H D vſque ad cauam eiuſdem cir-

circuli circumferentiam, aptata erit H D in circulo, quemadmodum Poriſma docet. Eam autem æqualem eſſe Z datæ, ſic demonſtrabitur. A

Centro enim F interuallo F E, vel F C deſcribatur circulus ſecans A F continuatam in G. Quoniam igitur æqualia ſunt rectangula H A D, C A G vtrunque enim æquale eſt quadrato A E, atque eſt A H æqualis A C, erit & A D æqualis A G, quare per ſubductionem æqualium A H, A C, æqualibus A D, A C, fiunt & reliquæ H D, C G æquales; ſed C G æqualis eſt Z, vtraque enim dupla eſt ipſius E F; ergo & H D ipſi Z æqualis erit. In dato igitur circulo E H D aptata eſt H D datæ Z æqualis, eaque ad punctum A pertingit quod facere oportebat.

Hoc Problema quia duas conditiones exigit nempe vt aptata in circulo ſit æqualis datæ rectæ lineæ, & vt ad datum punctum pertingat, dupliciter componi poteſt deductis ab vna, eademque Reſolutione compoſitionibus, & licet hæc altera quæ ſequitur Compoſitio ſit multis de cauſis inferior, quam prima eam tamen ſubijcere volui, vt oſtendatur ex qualibet Reſolutione, tot compoſitiones oriri, quot in Problemate conditiones requiruntur. B

Alia eiuſdem Caſus Compoſitio.

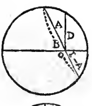


Sint igitur eadem data, & oporteat facere quod imperatum eſt. Ducatur A E, vt prius contingens circulum E H D in E, & iūgatur B E, & in ea ſumatur E F æqualis dimidiæ Z, & iungatur A F, ab eaque abſcindatur F C æqualis F E, & centro A interuallo A C deſcribatur arcus ſecans circulum F H D in H, in quo accommodetur H D æqualis Z. Dico H D Problema efficere, eamq. productā peruenire ad punctū A. Cētro enim F. interuallo F C, vel F E deſcribatur circulus ſecans A F productam in G, & iungatur A H. Oſtendendum eſt igitur A H D rectam eſſe lineam. C

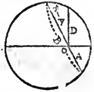
Si enim non eſt recta linea A H D producatur A H. vſque ad cauam circumferentiam circuli E H D in I. Rectangulum igitur H A I æquale erit rectangulo C A G, vtrunque enim æquale eſt quadrato A E tangentis, ea enim vtrumque circulum tangit, ſed rectangulum C A G æquale eſt rectangulo ſub H A, & compoſita ex A H, H D; ſunt enim æquales A C, A H; & æquales quoque C G, H D, ex conſtructione, & ideo æquales, & A G, A I; ergo rectangulum H A I, æquale erit rectangulo ſub H A, & compoſita ex A H, H D; quare A I æqualis erit compoſitæ ex A H, H D dempta communi A H; reliqua H I reliquę H D ęqualis erit, quod eſt abſurdum: recta eſt igitur linea A H D; quod oſtendiſſe oportuit, atque adeo aptata eſt in circulo recta H D, eaque ad punctum A pertingit quod faciendum erat. D

Re-

A Reſolutio ſecundi Caſus.



FActum iam ſit, hoc eſt ſit aptata in circulo vt petitur data recta linea B, eaque tranſeat per datum punctum O, per quod ducatur circuli diameter cui à puncto O, ducatur perpendicularis vſque ad circumferentiam. Quoniam igitur datum eſt punctum O, poſitione, circulus vero poſitione, & magnitudine, ergo & diameter eius tranſiens per O dabitur poſitione, & magnitudine, atque adeo dabitur & ipſa perpendicularis, ergo ſit ea D, & quæratur alterutra pars aptatæ, quæ in dato puncto diuiditur:



B ea eſtò A; ergo reliqua pars erit B -- A & rectangulum ſub partibus aptatæ * æquale erit rectangulo ſub partibus diametri, hoc eſt quadrato perpendicularis, itaque, * 35 tertij

B in A -- A Q æquabitur D Q

Et explicata ſecundum tertium Canonem æquatione

B ½ + L. V. (B Q ¼ -- D Q) æquabitur A

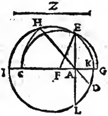
Vel B ½ - L. V. (B Q ¼ -- D Q) æquabitur A

In hac æquatione A explicabilis eſt de duobus terminis, quorum primus eſt pars maior aptatæ, ſecundus pars minor, in eamdem enim æquationem incidit ſiue de maiori parte aptatæ quæritur, ſiue de minori.

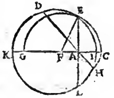
C Poriſma.

Dimidia aptata in circulo, protracta longitudine rectæ, cuius quadratum æquale eſt exceſſui, quo quadratum dimidiæ aptatæ ſuperat quadratum perpendicularis, æqualis eſt parti maiori aptatæ, quæ dato puncto diuiditur, contracta vero æqualis eſt parti minori.

Compoſitio Secundi Caſus.



SEd ſit in circulo datum A punctũ, & data Z non ſit maior diametro circuli dati H E D, neque minor ea recta linea in circulo, quàm diameter
D per punctũ A ducta ſecat ad rectos angulos, & oporteat facere quod imperatum eſt. Ducatur per A circuli diameter I A K, cui ſi ſit æqualis Z data, factum iam erit quod proponitur ſi vero ſit minor ducatur per A ipſi diametro ad rectos angulos E A L & ſi ipſa E L æqualis ſit datæ Z, rurſus factũ erit quod proponitur, ſi vero Z maior ſit quam E L ponatur in A I recta linea E F æqualis dimidiæ Z; eſt autem dimidia Z maior, quam A E, cum tota Z ponatur maior, quàm tota E L, quæ dupla eſt ipſius A E. Quadratum igitur E F ſuperat



qua-

quadratum E A quadrato A F, itaque dimidiæ Z addenda eſt recta A F, eique ſic auctę facienda æqualis pars maior aptandæ, quæ in puncto A diuiſa erit. Vel dimidiæ Z detrahenda eſt recta A F, & reſiduæ facienda ęqualis pars minor aptandæ, ſic Poriſma fieri docet. Igitur rectę F E fiat ęqualis F C, & centro A interuallo A C deſcribatur arcus ſecans circulum H E D in H, & iuncta H A producatur vſque ad circumferentiam in D. Dico rectam H D Problema efficere. Centro enim F interuallo F C, vel F E deſcribatur circulus ſecans F K etiam productam in G. Quoniam igitur æqualia ſunt rectangula H A D, C A G; vtrunque enim æquale eſt quadrato A E, atque eſt A H æqualis A C, erit & A D æqualis A G; quare per additionem æqualium A D, A G æqualibus A H, A C, fiunt quoque æquales & H D, C G, ſed C G æqualis eſt Z, vtraque enim dupla eſt ipſius F E, ergo & H D ipſi Z æqualis erit. In dato igitur circulo H A D aptata eſt H D æqualis Z datæ, eaque per punctum A tranſit, quod erat faciendum. A B

Et hic Caſus duplicem admittit Compoſitionem, vtramque ex vna, eademque Reſolutione emanantem, ſed primi Caſus compoſitiones ad exemplum ſufficiant.

Problema VII.

Dato ſemicirculo, & recta linea ſit ipſius baſi perpendicularis. Inter ipſam perpendicularem, & circumferentiam ſemicirculi ponere rectam lineam magnitudine datam, quæ ad ſemicirculi angulum pertingat. C

HOc Problema ſex Caſus habet; tres quidem ſunt cum perpendicularis ſecat baſim ſemicirculi productam. primus differt à reliquis duobus, quod in primo ponenda eſt recta magnitudine data inter perpendicularem, & conuexam ſemicirculi circumferentiam. In reliquis vero ponenda eſt inter perpendicularem, & circumferentiam cauam. Secundus autem Caſus differt à tertio, quod in ſecundo baſis ſemicirculi non eſt maior ſegmento baſis productæ, quod inter perpendicularem, & circumferentiam interijcitur, in tertio autem maior eſt.

Quartus autem Caſus, & quintus eſt cum perpendicularis in ipſam baſim cadit; quartus differt à quinto, quod in quarto ponenda eſt recta magnitudine data inter perpendicularem, & circumferentiam cauam. At in quinto ponenda eſt inter perpendicularem, & circumferentiam conuexam. D

Sextus denique Caſus eſt cum perpendicularis in extremitatem baſis ſemicirculi cadit.

Primi quatuor Caſus determinatione indigent: duo vero reliqui indeterminati ſunt.

Primo igitur Caſu oportet rectam magnitudine datam non eſſe minorem eo ſegmento baſis productæ, quod inter perpendicularem, & circumferentiam interijcitur.

Secundo Caſu oportet illam magnitudine datam, non eſſe minorem baſe

pro-

A producta, vſque ad perpendicularem.

Tertij Caſus determinaionem quære ex Poriſmate Reſolutionis, ſiquidem in ea ſemicirculi, & perpendicularis poſitione non dum liquet, quæ ſit minima interceptarum à circumferentia, & perpendiculari quemadmodum cernitur in præcedentibus, & in ea quæ ſequitur inſpecta tantum ſemicirculi & perpendicularis poſitione.

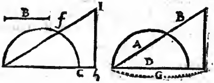
Quarto denique Caſu oportebit rectam magnitudine datam non eſſe maiorem ſegmento baſis ſemicirculi, quod inter perpendicularem, & circumferentiam interijcitur ex ea parte ponendæ.

Reſolutio primi Caſus.

B

Sit datus ſemicirculus EFC, in cuius baſim productam cadat perpendicularis IH, & data recta linea B, quæ non ſit minor, quàm CH. Oportet inter circumferentiam ſemicirculi, & ipſam perpendicularem ponere rectam lineam æqualem datæ B; itaut ad punctum E pertineat.

Sit iam factum, & ſit ea recta FI, & connectatur CF. ſit autem datarum FI, EC, EH, prima B, ſecunda D, tertia G, vt in ſecunda figura, & quæratur EF, ea eſto A. duplicem figuram



C appoſui, primam quidem vt expoſitio Problematis clarior fiat; ſecūdum vero vt Reſolutioni ſeruiat, eaſque diſtinxi, ne multitudine, & diuerſitate literarum, quæ in vna figura exiſterent obruantur ſtudioſi potius, quam iuuentur. Quoniam igitur ſimilia ſunt triangula EFC, EHI, angulus enim EFC in ſemicirculo rectus eſt, & ideo æqualis angulo recto H, & angulus ad E communis eſt vtrique, erit vt EF ad EC, ita EH ad EI, hoc eſt in figura ad reſolutionem pertinente proportionales erunt.

A D G A ✣ B

Sed quod ſit ſub extremis æquale eſt facto ſub medijs, ergo

D A Q ✣ B in A æquabitur D in G

Et explicata æquatione L. V. (B Q $\frac{1}{4}$ ✣ D in G) — B $\frac{1}{2}$ æquabitur A.

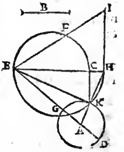
Poriſma.

Recta, cuius quadratum æquale eſt quadrato dimidiæ FI & rectangulo CEH, contracta dimidia FI æqualis eſt rectæ EF.

Datur ergo EF quæſita.

Com-

Compoſitio Primi Caſus. A



SIt datus ſemicirculus E F C, in cuius baſim E O productam cadat perpendicularis I H, & data quoque recta linea B, quæ non ſit minor, quàm C H. Oportet inter perpendicularem I H, & circumferentiam E F C datæ B æqualem rectam ponere, quæ ad punctum E pertingat. Si B æqualis ſit rectæ C H, factum iam erit quod proponitur, ſi vero ſit maior; deſcribatur in E H ſemicirculus E k H, & ipſi E H agatur perpendicularis C k, & iungantur E K, k H. angulus igitur E k H in ſemicirculo rectus eſt, ac proinde B

Corol. 8. ſexti E k* media proportionalis inter C E, E H, quare qua-

17 ſexti dratum E k* æquabitur rectangulo C E H. Producatur autem H k in A, vt ſit k A æqualis dimidiæ B, & iungatur E A: quadratum igitur E A æquale erit quadratis A K, k E, hoc eſt quadrato dimidiæ B, & rectangulo C E H. à recta igitur E A auferenda eſt A G æqualis A K, vel dimidiæ B, reſiduæ vero E G æqualis aptanda eſt recta in ſemicirculo E F C ſic Poriſma docet. aptetur ergo, & ſit ea E F. demonſtrabitur infra, A G minorem eſſe, quàm E C. denique producta E F donec occurrat rectæ H I in I. Dico F I æqualem eſſe datæ B. Iungatur enim F C, & centro A interuallo A K, vel A G deſcribatur circulus ſecans E A productam in D. is circulus tanget rectam E K in k quia rectus eſt angulus E K, cum ſit rectus & k H; qua- C re rectangulum G E D æquale erit quadrato E B hoc eſt rectangulo C E H, vt igitur G E, ſeu E F ad E C, ita erit E H ad E D; ſed propter ſimilitudinem triangulorum E F C, E H I, eſt vt E F ad AC, ita E H ad E I ergo ipſa E I æqualis erit E D, & ablatis æqualibus E F, E G, reliqua F I reliquæ G D hoc eſt datæ B, æqualis erit. Poſita eſt igitur inter circumferentiam E F, & perpendicularem I H recta F I æqualis B, eaque ad punctum E pertingit: quod erat faciendum.

At vero E G minorem eſſe, quàm E C manifeſtum eſt, ſi enim non eſt minor, erit maior, vel æqualis: ſed ponitur & G D, hoc eſt B, maior quàm C H, ergo & E D tota maior erit quàm tota E H. vnde rectangulum G E D, hoc eſt quadratum E K, maius erit rectangulo C E H, quod eſt abſurdum, illud D

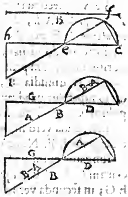
Corol. 8 ſexti enim quadratum huic rectãgulo* æquale eſt. Non igitur E G maior eſt quàm E C, aut ei æqualis, ergo minor quod oſtendiſſe oportuit.

Determinatione cautum eſt ne data B ſit minor, quàm C H; nam ipſa C H minima eſt omnium, quæ ad punctum E pertinentes inter circumferentiam E F C, & rectam I H interijciuntur. Ducatur enim alia vtrumque recta linea E F I, ea maior erit quam E H, ſed & E C maior eſt quam E F, ergo reliqua C H minor erit quàm reliqua F I & ſic oſtendetur omnibus alijs minor. Minima eſt igitur omnium C H, quare manifeſta eſt determinatio.

Reſo-

A Reſolutio ſecundi Caſus.

SIt datus ſemicirculus e f c è cuius baſe continuata longitudine, non minore ipſa baſe, cadat perpendicularis h i: data autem recta linea B, quæ non ſit minor, quàm c h. Oportet inter perpendicularem h i, & circumferentiam e f c ponere rectam lineam æqualem datæ B, ita vt ad punctum e pertingat.



Sit iam factum, & ſit ea recta f e i, & iungatur f c. datæ ſunt igitur f i, c e, e h. prima ſit B, ſecunda D, tertia G, & quæratur ſiue e i, ſiue e f. altera earum eſto A, ergo reliqua erit B -- A.

B Et quoniam ſimilia ſunt triangula e f c, e h i, nam angulus e f c in ſemicirculo rectus eſt, & ideo æqualis angulo recto e h i, & angulus f e c æqualis angulo h e i, cum ſint ad verticem, erit vt e f ad e c, ita e h ad e i, hoc eſt in figura Reſolutionis proportionales erunt.

B -- A D G A

Vel A D G B -- A

Et quod fit ſub extremis æquale erit ei, quod fit ſub medijs, ergo

B in A -- A Q æquabitur D in G

C Et explicata æquatione $B\frac{1}{2}$ + (B Q $\frac{1}{4}$ -- D in G) æquabitur A

Vel $B\frac{1}{2}$ -- (B Q $\frac{1}{4}$ -- D in G) æquabitur A

In hac æquatione A explicabilis eſt de duobus terminis, quorum primus eſt e i, ſecundus e f ſi quidem in eandem æquationem inciditur, ſiue de e i quæritur, ſiue de e f.

Poriſma.

Dimidia f i, protracta longitudine rectæ, cuius quadratum æquale eſt exceſſui, quo quadratum dimidiæ f i ſuperat rectangulum c e h, æqualis eſt rectæ e i; contracta verò æqualis rectę e f.

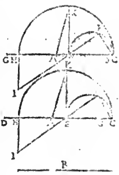
D Datur ergo vtraque e i, e f.

Compoſitio ſecundi Caſus.

SIt datus ſemicirculus E F C, vt ſupra, & oporteat facere quod propoſitum eſt. Si B data æqualis ſit H C, factum iam erit quod proponitur. ſi vero ſit maior, agatur ipſi H C perpendicularis E K, quam ſemicirculus in H C deſcriptus ſecet in k, erit E k minor quàm dimidia B, cum ſit & H C minor quam tota B. Itaque poterit à puncto K in rectam E H duci recta æqualis dimidię B. ducatur igitur k A

L ea

ea maior erit quam A H, minor autem quam A C; A
nam cum ſit A k maior, quàm dimidia H C, erit centrum circuli H K C in A C, & ideo A K maior quam A H, & minor quam A C. Producatur ergo A H in G, vt ſit A G æqualis A K, vel dimidiæ B, & in H I ponatur E I æqualis E G, eaque producatur ad circumferentiam in F.



Vel vt in ſecunda figura ab A C abſcindatur recta A G æqualis A k, & in ſemicirculo E F C accommodetur E F æqualis E G, eaque producatur in I. alterutro modo id fiat, factum erit quemadmodum Poriſma docet, in prima enim figura rectæ A G, cui æqualis eſt dimidia B, addita eſt A E, cuius quadrato ſuperatur quadratum K E à quadrato A K, hoc eſt ſuperatur rectangulum C E H à quadrato dimidiæ B, & toti E G facta eſt æqualis E I. B

In ſecunda vero figura rectæ A G detracta eſt A E, & reliquæ E G facta eſt æqualis E F. Nunc oſtendendum eſt rectam I E F Problema efficere.

Iungatur enim F C, & ſumatur A D æqualis A G. Quoniam igitur rectarum G A, A E, in prima quidem figura differentia eſt E D, aggregatum E G; in ſecunda vero differentia eſt E G, aggregatum E D; ideo in vtraque figura rectangulum G E D, ſub aggregato, & differentia* æquale erit differentiæ quadratorum G A, A E, ſeu k A, A E, hoc eſt quadrato k E, vel rectangulo H E C: ſed & rectangulum I E F æquale eſt eidem rectangulo H E C, nam cum ſint ſimilia triangula E H I, E F C, eſt vt E H ad E I, ita E F ad E C, & ideo rectangulum H E C ſub extremis æquale rectangulo I E F ſub medijs; ergo rectangulum G E D æquale erit rectangulo I E F. In prima quidem figura ſic argumentor. ſed ſe æqualis eſt G E, ergo & E F, ac proinde tota I F æqualis toti G D, hoc eſt ipſi B. In ſecunda vero figura argumentor hoc modo; ſed E F æqualis eſt E G, ergo & E I æqualis erit E D, & conſequenter tota I F, æqualis toti D G, hoc eſt datæ B, quod erat oſtendendum. Poſita eſt igitur inter perpendicularem H I, & circumferentiam E F C recta I F æqualis datæ B, eaque ad punctum E pertingit: quod erat faciendum. C

Theor. 2 primi

At vero rectam H C minimam eſſe omnium, quæ ad punctum E pertinent, & inter perpendicularem H I, & circumferentiam E F C interijciuntur ſic demonſtrabitur. D

Ducatur enim alia quæcunque recta I E F, & iungatur F C. Quoniam igitur propter ſimilitudinem triangulorum E F C, E H I, eſt vt E F ad E C, ita E H ad E I, atque eſt maxima quidem E I, minima vero E F; erit I F compoſita ex maxima, & minima maior, quàm H C compoſita ex reliquis: & ſic oſtendetur H C minor omnibus alijs. Quare manifeſta eſt determinatio.

Re-

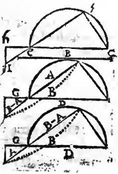
A

Reſolutio Tertij Caſus.

SIt datus ſemicirculus e f c, è cuius baſe continuata longitudine minori ipſa baſe cadat perpendicularis h i, dataque recta linea B: & oporteat facere quod imperatum eſt. In hoc caſu quoniam ex hac ſemicirculi, & perpendicularis poſitione non videtur offerri minima interceptarum à perpendiculari, & circumferentia ſemicirculi, quemadmodum in caſibus præcedentibus, ideo determinatio petenda eſt ex Poriſmate.

Sit igitur factum ducta ſcilicet recta i e f æqualis datæ B, & iungatur F C, ſitque datarum i f, e c, e h, prima B, ſecunda D, tertia G, & quæratur alterutra partium e i, e f, ea eſto A, ergo reliqua

B erit B -- A, & propter ſimilitudinem triangulorum e f c, e h i, erit vt e f ad e c, ita e h ad e i, hoc eſt in figuris ad reſolutionem pertinentibus, proportionales erunt.



A D G B -- A

Vel B -- A D G A

Et factum ſub extremis æquale erit facto ſub medijs, hoc eſt

B in A -- A Q æquabitur D in G.

Et explicata æquatione B $\frac{1}{2}$ + L. V. (B Q $\frac{1}{4}$ -- D in G) æquabitur A

C Vel B $\frac{1}{2}$ -- L. V. (B Q $\frac{1}{4}$ -- D in G) æquabitur A

Et in hac quoque æquatione A explicabilis eſt de duobus terminis, quorum primus indicat maiorem quæſitarum e f, e i, ſecundus minorem.

Poriſma.

Dimidia f i protracta longitudine rectæ, cuius quadratum æquale eſt exceſſui, quo quadratum dimidiæ f i ſuperat rectangulum h e c, æqualis eſt maiori partium e f, e i, contracta verò, minori.

Ex hoc Poriſmate apparet, dimidiam B, non eſſe minorem mediâ proportionali inter rectas e h, e c. Poriſma enim indicat quadratum dimidiæ B non eſſe minus rectangulo h e c; iubet enim auferri rectangulum illud à quadrato dimidiæ B, minus videlicet à maiori, vel ſaltem æquale ab æquali, non autem maius à minori; neque enim, vt dictum eſt, Poriſma iubet, quod fieri non poteſt. Determinatio igitur tertij Caſus, quam dixi ex Poriſmate petendam, hæc erit.

D

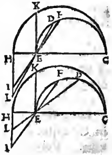
Digitized by Google

 A

Determinatio tertij Caſus,

OPortebit datam B non eſſe minorem dupla media proportionali inter H E, E C. Nam ipſa media dupla minima eſt omnium interceptarū à perpendiculari H I, & circumferentia E F C; quod quidem ſic demonſtrabitur,

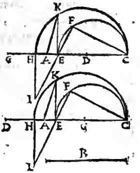
Reſumatur antecedens figura, & deſcribatur in H C ſemicirculus ſecans E k ipſi H C perpendicularem in k, erit ergo E k media proportionalis inter E H, E C. Accommodetur autem in ſemicirculo E F C recta E F æqualis E k, eaque producta ſecet perpendicularem H I in I, & iungatur F C. erit ob ſimilitudinem triangulorum E F C, E H I vt E C ad E F, ita E I ad E H, ſed B vt E C ad E K, hoc eſt ad E F, ita eſt E F ad E H, * ergo E F æqualis erit E I, atque adeo tota I F dupla erit ipſius E K. Dico igitur ipſam I F minimam eſſe omnium ductarum per E, quæ à perpendiculari H I, & circumferentia E F C intercipiuntur.



Ducatur enim alia recta vtcumque L E D, & iungatur D C, Quoniam igitur ſimilia ſunt triangula E D C, E H L, erit vt E D ad E C, ita E H ad E L; ſed oſtenſum eſt, vt E C ad E F, ita eſſe E I ad E H, ergo in perturbata proportione erit vt E D ad E F, ita E I ad E L, ſed in prima quidem figura maxima eſt C E L, minima E D; in ſecunda vero maxima eſt E D, minima E L, vtroque igitur Caſu L D cum ſit compoſita ex maxima, & minima, maior erit, quàm I F compoſita ex reliquis. & ſic demonſtrabitur I F minor omnibus alijs. Minima eſt igitur I F. quod erat oſtendendum.

Compoſitio tertij Caſus.

SIt datus ſemicirculus E F C, vt dictum eſt; data autem recta linea B, quæ non ſit minor dupla proportionali inter H E, E C. & oporteat facere quod imperatum eſt. Deſcribatur in H C ſemicirculus, quem acta perpendicularis E k ſecet in k, & in E H ponatur k A æqualis dimidiæ B; eſt autem dimidia B non minor, quàm K E; cum tota B non ſit minor quàm dupla E k, ex Determinatione: Deinde producatur A H in G, vt ſit A G æqualis A K, & in H I ponatur E I æqualis E G, eaque producatur ad circumferentiam in F. D



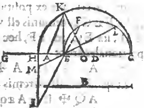
Vel vt in ſecunda figura ſumatur in A C recta A G æqualis A K, & in-

ſe-

A ſemicirculo E F C accommodetur E F æqualis E G, eaque producatur in I. ſiue hoc, ſiue altero modo fiat conſtructio, ea facta erit quemadmodum Poriſma iubet. rectamque I E F æqualem eſſe datæ B demonſtrabitur eadem ratione, qua in antecedenti Caſu immo eadem verborum textura. quare ijs repetitis habebis demonſtrationem.

Quando autem data B maior eſt, quam dupla E k, non autem quàm H C, poſsibile eſt per punctum E ducere duas rectas lineas, quarum vtraque inter perpendicularem H I, & circumferentiam E F C interiecta æqualis erit datæ B.

Repetatur enim eadem conſtructio, quæ ſupra, & ſit inter perpendicularem H I, & circumferen-

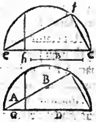


B tiam E F C poſita recta I E F æqualis ipſi B, & à puncto K ad centrum circuli H k C, quod ſit O, ducatur K O, ea non erit minor, quàm k A, cui æqualis eſt dimidia B, cum & H C ponatur non minor quam B, quare neque quadratum K O minus erit quadrato k A; hoc eſt neque quadrata K E, E O minora erunt quadratis k E, E A, atque ablato communi quadrato K E, reliquum quadratum E O non erit minus reliquo quadrato E A; nec ideo recta E O minor, quàm recta E A, ſed & O C non eſt minor quàm A G, ergo tota E C non erit minor quam E G tota. Accommodetur igitur in ſemicirculo E F C recta E L
C æqualis E G, vel E I, & producatur donec ſecet perpendicularem H I in M, & iungatur L C. Quoniam igitur propter ſimilitudinem triangulorum E L C, E H M eſt vt E L ad E C, ita E H ad E M, & propter ſimilitudinem triangulorum E F C, E H I, vt E C ad E F, ita E I ad E H, erit in perturbata proportione, vt E L ad E F, ita E I ad E M, ſed E L prima æqualis eſt tertiæ E I, ex conſtructione, ergo & ſecunda E F æqualis erit E M quartæ, & conſequenter tota M L æqualis toti I F, atque adeò vtraque æqualis B datæ.

Idem autem Caſus poterit conſtrui alia quoque ratione in eodem Poriſmate expoſita, vbi enim in ſemicirculo E F C accommodata eſt recta E L æqualis E G, vel E I, hic, omiſſa ea accommodatione ponatur in H I recta E M æqualis E D, vel E F, ſi quidem ipſa E D, vel E F non eſt minor quam
D E H, quia cum ſit ob ſimilitudinem triangulorum E F C, E H I, vt E C ad E F, ita E I ad E H, atque E C prima non minor, quam tertia E I, vel E C, vt demonſtrauimus ſupra, erit & ſecunda E F non minor, quàm E H quarta. Ipſa autem M E producatur ad circumferentiam E F C in L, & iungatur L C; erit igitur ob ſimilitudinem triangulorum E F C, E H I, vt E F ad E C, ita E H ad E I, ſed vt E C ad E L, ita eſt E M ad E H, ob ſimilitudinem triangulorum E L C, E H M, ergo in perturbata proportione, vt E F ad E L, ita erit E M ad E I, ſed E F prima æqualis eſt E M tertiæ, ex conſtructione, ergo & ſecunda E L æqualis erit quartæ E I, itaque tota I F æqualis erit, toti M L, & per conſequens vtraque æqualis B datæ.

Reſolutio quarti Caſus. A

SIt datus ſemicirculus E F C, in cuius baſim cadat perpendicularis I H data autem recta linea B, quæ non ſit maior quàm H C. Oportet inter perpendicularem H I, & cauam circumferentiam E F C ponere rectam lineam æqualem ipſi B, ita vt ad punctum E pertingat.



Sit factum & ſit ea recta I F, & connectatur F C. Sit autem datarum I F, E C, E H prima B, ſecunda D, tertia G, & quæratur E I. ea eſto A. Quoniam igitur ſimilia ſunt triangula E H I, E F C, anguli enim E H I, E F C ſunt æquales, quia recti, ille ex poſitione, hic ex vi ſemicirculi & angulus F E C communis eſt vtrique triangulo, erit vt E I ad E H, ita E C ad E F, hoc eſt in reſolutionis figura, proportionales erunt B

A G D. A + B

Et quod fit ſub extremis æquale erit ei quod fit ſub medijs, nempe

A Q + B in A æquabitur G in D

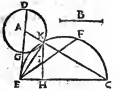
Et explicata æquatione L. V. (B Q $\frac{1}{4}$ + G in D) -- $\frac{1}{2}$ æquabitur A.

Poriſma.

Recta, cuius quadratum æquale eſt quadrato dimidiæ I F, & rectangulo H E C contracta eadem dimidia I F æqualis eſt rectæ E I. C

Datur ergo E I quæſita.

Compoſitio quarti Caſus.



SIt datus ſemicirculus E F C, vt ſupra, & oporteat facere quod imperatum eſt. Si data B, æqualis ſit rectæ H C, factum iam erit quod proponitur. Si vero ſit minor ſecet recta H I circumferentiam in k, & connectatur E K, K C. angulus igitur E K C in ſemicirculo rectus erit, & ideo E K* media proportionalis inter H E, E C, ac proinde quadratum E k* æquale rectangulo H E C, producatur autem C k in A, vt ſit k A æqualis dimidiæ B, & connectatur A E eius quadratum æquale erit quadratis A k, K E; hoc eſt quadrato dimidiæ B, & rectangulo H E C. Itaque à recta A E auferatur A G æqualis dimidiæ B, reſiduæ vero E G ponatur in H k æqualis E I, ſic Poriſma iubet. inferius autem oſtendetur ipſa A G maior, quàm A H producta; deinque E I ad circumferentiam in F. Dico I F æqualem eſſe datæ B. Connectatur enim F C, & centro A interuallo A G, vel A K deſcribatur circulus quem E A producta ſecet in D, is circulus tangit rectam E k in k; angulus enim A K E rectus eſt, cum ſit rectus & angulus E k C in ſemicirculo, & ideo D

Corol. 8 ſexti
17 ſexti

re-

A rectangulum G E D æquabitur quadrato E K hoc eſt rectangulo H E C, quare vt G E, hoc eſt E I ad E H, ita erit E C ad E D; ſed vt E I ad E H, ita eſt quoque E C ad E F, propter ſimilitudinem triangulorum E H I, E F C, anguli enim E H I, E F C ſunt æquales, quia recti, & angulus I E H communis eſt vtrique triangulo, ergo E F æqualis erit E D, demptis æqualibus E I, E G, reliqua I F reliquæ G D, hoc eſt datæ B, æqualis erit, quod erat oſtendendum. Poſita eſt igitur recta I F, vt facere oportebat.

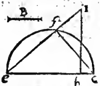
At vero E G maiorem eſſe, quàm E H ſic demonſtrabimus. ſit enim, ſi fieri poteſt, non maior, ergo cum G D cui æqualis eſt B, minor ſit, quàm H C, vt ponitur, erit & tota E D minor, quàm tota E C, atque adeo rectangulum G E D minus erit rectangulo H E C, hoc eſt* quadrato E k, quod eſt Corol. 5 ſexti
B abſurdum; rectangulum enim G E D quadrato E k æquale eſt. Maior eſt igitur E G, quàm E H, quod erat oſtendendum. Rectam autem H C maximam eſſe omnium, quæ à puncto E ductæ inter perpendicularem k H, & cauam circumferentiam K C interijciuntur, ſic oſtendemus.

Ducatur enim alia vtrumque recta E I F, ea minor erit, quàm E C; ſed & E H minor eſt quàm E I, ergo reliqua H C maior erit, quàm reliqua I F: & ſic ipſa H C oſtendetur omnibus alijs maior: Maxima eſt igitur omnium H C, quod erat oſtendendum.

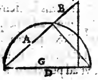
Reſolutio quinti caſus.

C Sit datus ſemicirculus E F C, in cuius baſim cadat perpendicularis I H: data autem recta linea B: & oporteat inter ipſam perpendicularem, & conuexam circumferentiam ſemicirculi ponere rectam lineam æqualem ipſi B; ita vt ad punctum E pertingat.

Sit factum, & ſit ea recta F I, & iungatur F C, ſitque datarum F I, E C, E H prima B, ſecunda D, tertia G, & quæratur E F, ea eſtò A. Quoniam igitur ſimilia ſunt triangula E F C, E H I, angulus enim E F C, cum ſit in ſemicirculo rectus eſt, & ideo æqualis recto E H I, & angulus E communis eſt vtrique, erit vt E F ad E C, ita E H ad E I, hoc eſt in figura reſolutionis, proportio-
D nales erunt



A D G A + B



Et quod fit ſub extremis æquale erit ei, quod fit ſub medijs nempe

AQ + B in A æquabitur D in G

Et explicata æquatione L. V. (BQ $\frac{1}{4}$ + D in G) − B $\frac{1}{2}$ æquabitur A.

Po-

Poriſma.

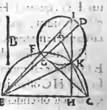
A

Recta, cuius quadratum æquale eſt quadrato dimidiæ F I, & rectangulo H E C, contracta eadem dimidia F I æqualis eſt rectæ E F.

Datur ergo E F quæſita.

Compoſitio quinti Caſus.

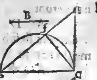
SIt datus ſemicirculus E F C, vt ſupra, & oporteat facere quod propoſitum eſt. Ducantur ad punctum k, in quo perpendicularis I H ſecat circumferentiam E F C rectæ E K, C K, ipſaque C K, producatur in A, vt ſit k A æqualis dimidiæ B, & iungatur E A, B ab eaque abſcindatur A G æqualis A k, & in ſemicirculo E F C accommodetur E F æqualis E G, & producatur vſq; ad perpendicularem H I. Factum eſt igitur quemadmodum Poriſma docet: à recta enim A E, cuius quadratum æquale eſt quadratis A K, K E, hoc eſt quadrato dimidiæ B, & rectangulo H E C, ablata eſt A G æqualis dimidiæ B, & reſiduæ E G aptata eſt in ſemicirculo æqualis E F. Rectam autem F I æqualem eſſe datæ B, ita fit manifeſtum.



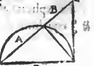
Iungatur enim F C & centro A interuallo A E, vel A G deſcribatur circulus ſecans E A productam in D, is circulus tangit rectam E K in K, rectus eſt enim angulus A K E, cum ſit rectus & angulus E k C in ſemicirculo, & propterea rectangulum G E D æquale erit quadrato E k, hoc eſt rectangulo H E C, C quare vt G E ſeu E F ad E C, ita erit E H ad E D, ſed vt E F ad E C, ita eſt quoque E H ad E I ob ſimilitudinem triangulorum E F C, E H I, quorum anguli E F C, E H I ſunt recti, & ideo æquales, & angulus I E H communis eſt. vtrique ergo E I æqualis erit E D, & ablatis æqualibus E F, E G, reliqua F I reliquæ G D, hoc eſt datæ B æqualis erit: quod erat oſtendendum: quare factum eſt quod oportebat.

Reſolutio Sexti Caſus.

SIt datus ſemicirculus E F C, in cuius baſis extremitatem cadat perpendicularis I C; data autem recta linea B, & oporteat, inter ipſam perpendicularem, & circũferentiam ſemicirculi ponere rectam lineam æqualem ipſi B, ita vt ad punctum E pertingat. D



Sit factum & ſit ea recta F I, & connectatur F C. ſitque datarum F I, E C, prima B, ſecunda D, & quæratur E F ea eſto A. Quoniam igitur angulus E F C in ſemicirculo



Corol. 8 ſexti rectus eſt, erit E C * media proportionalis inter E F, E I ideſt in reſolutionis figura proportionales eruut.

A D

A A D A ✠ B

Et quod ſit ſub extremis æquabitur quadrato mediæ hoc eſt

A Q ✠ B in A æquabitur D Q.

Et explicata æquatione L. V. (B Q $\frac{1}{4}$ ✠ D Q) -- B $\frac{1}{2}$ æquabitur A

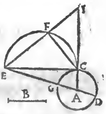
Poriſma.

Recta, cuius quadratum æquale eſt quadratis E C, & dimidiæ F I, contracta eadem dimidia F I, æqualis eſt rectæ E F.

Datur ergo E F quæſita.

B

Compoſitio Sexti Caſus.



SIt datus ſemicirculus E F C, vt dictum eſt, & oporteat iuſſum facere. Producatur I C in A, vt ſit C A æqualis dimidiæ B, & iungatur E A. eius quadratū æquale erit quadratis E C, & C A, hoc eſt, & dimidiæ B, à recta igitur E A auferatur A G æqualis dimidiæ B, & reliquæ E G accommodetur in ſemicirculo æqualis E F, eaque producta ſecet perpendicularem C I in I, hæc conſtructio habetur ex Poriſmate. Rectam autem F I æqualem eſſe datæ B, ita oſtendetur. Iungatur enim F C, & C deſcribatur ex centro A ad interuallum A C, vel A G circulus ſecans E A continuatam in D is circulus tanget rectam E C, in C, cum ſit rectus angulus E C A, & ideo rectangulum G E D * æquale erit quadrato E C, vnde recta E C erit media proportionalis inter E G, E D; ſed eadem E C eſt quoque * media proportionalis inter E F, E I, cum ſit rectus angulus E F C in ſemicirculo, atque eſt E F æqualis E G, ex conſtructione, ergo & E I æqualis erit E D, & ablatis æqualibus E F, E G, reliqua F I reliquæ G D, hoc eſt datæ B, æqualis erit quod erat oſtendendum. Factum eſt igitur quod oportuit.

* 36 tertij

* Corol. 8 ſexti

Finis Libri Tertij.

MARINI GHETALDI
DE RESOLVTIONE, ET COMPOSITIONE MATHEMATICA.

LIBER QVARTVS.

SVPERIORI libro expoſui exempla ad Reſolutionem, & Compoſitionem pertinentia, vbi quadrata in æquationibus ſimplici affectione implicantur, ideſt ſimplici plano ſub latere, & data coefficiente lõgitudine, & ideo abſque difficultate Æquationes ipſæ explicantur, ac deinde Compoſitiones, quæ inde deducuntur, facili opera perficiuntur. Nunc venio ad Reſolutionem, & Compoſitionem difficiliorum Problematum, vbi quadrata implexis affectionibus obuoluuntur, ideſt vel pluribus planis, partim affirmatis, partim negatis; vel etiam planis ſub latere, & aliqua longitudine, non quidem ex ſe data, ſed ad datam ex ſe, datam habente rationem, quo fit vt æquationes difficilius explicentur, atque adeo Compoſitiones, quæ ab ipſis proficiſcuntur fiant difficiliores. A B

Theorema I.

Si quatuor magnitudinum proportionalium vna extremarum, aut mediarum fuerit maxima, altera minima erit.

SInt quatuor magnitudines proportionales A B, C D, ſitque A ad B, vt C ad D, & ſit vna extremarum vtpote A omnium maxima. Dico alteram extremam D minimam eſſe. Quoniam enim maxima ponitur A prima, ea maior eſt quàm C tertia, ergo & ſecunda B maior eſt, quàm D quarta. & cum ſit, vt A ad B, ita C ad D, A autem maior quàm B, erit & C maior quàm D. itaque ipſa D omnium eſt minima.



Digitized by Google

A SEd ſit maxima vna mediarum vtpote B. Dico alterâm mediam C minimam eſſe, Quoniam enim vt A ad B minor nempè ad maiorem, ita eſt C ad D, erit & C minor quam D, & cum ſit, vt A ad B, ita C ad D erit conuertendo vt B ad A, ita D ad C, eſt autem B maior quam D, cum ſit omnium maxima, ergo & A ſquàm E C maior erit. Minima eſt igitur omnium C. quare conſtat propoſitum.



Theorema II.

Si compoſita ex extremis quatuor magnitudinum proportionalium fuerit maior, quam compoſita ex medijs, vel differentia extremarum maior, quam
B differentia mediarum, altera extremarum maxima erit, altera minima, ſin minor altera mediarum maxima, altera minima erit.

SInt quatuor magnitudines proportionales A B, C D, ſitque compoſita ex extremis A D maior, quã compoſita ex medijs B C. Dico alterã extremarum A D maximam eſſe, alteram minimam. Si enim fieri poteſt neutra ipſarum A D ſit maxima, ergo maxima erit vna ex medijs B C & * conſequenter altera minima, quare compoſita ex maxima & minima, hoc eſt ex B C, * maior erit quam compoſita ex reliquis, quod eſt abſurdum; ponitur enim compoſita ex A D maior,
C quam compoſita ex B C: Cum igitur neutra mediarum ſit maxima, erit maxima vna extremarum, & per conſequens * altera minima. Eadem ratione oſtendemus ſi compoſita ex extremis fuerit minor, quam compoſita ex medijs, alteram mediarum, maxima eſſe alteram minimam.



ex antec. — 25 quinti — ex antec.

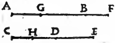
Rurſus ſint quatuor magnitudines proportionales A B, C D, D E, B F, ſitque A F differentia extremarum A B, B F maior quam C E differentia mediarum C D, D E. Dico A B maximam eſſe, F B minimam. Si enim fieri poteſt non ſit maxima A B, ergo C D maxima erit, & conſequenter * D E minima: itaque D E minor erit, quàm B F; quare reliqua E C maior, quàm reliqua F A. quod eſt abſurdum; ponitur enim A F maior quàm C E. Non igitur maxima eſt C D, quare A B maxima erit, & * conſequenter B F minima. Eadem ratione oſtendemus ſi differentia extremarnm fuerit minor, quàm differentia mediarum, alteram mediarum maximam eſſe, alteram minimam. Quare conſtat propoſitum.



ex antec. — ex antec.

Hoc Theorema demonſtrauimus ratione ducente ad impoſsibile, ſed tamen poſſumus etiam recta demonſtratione vti hoc modo.

Sint quatuor magnitudines proportionales A B, C D, D E, B F, ſitque A F compoſita ex extremis maior quàm C E compoſita ex medijs. Dico alteram extremarum A B, B F maximam eſſe, alteram mini-

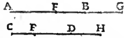


mam

mam. Sit enim A B maior, quàm B F, & C D non minor, quam D E; A
poſſunt enim C D, D E eſſe quoque æquales. Quoniam igitur A B ponitur maior, quàm B F, & C D non minor quam D E, erit B F minor, quàm C D: alioquin rectangulum A B F ſub extremis maius eſſet rectangulo C D E ſub medijs; quod eſſet abſurdum. Sumatur ergo D H æqualis F B, & B G æqualis E D: erit G F æqualis H E, vnde reliqua A G maior erit, quàm reliqua C H, ponitur enim tota A F maior, quàm tota C E.

Et quoniam eſt, vt A B ad C D, ita D E ad B F; erit permutando vt A B ad D E, hoc eſt ab B G, ita C D ad B F, hoc eſt ad D H, & diuidendo, vt A G ad G B, ita erit C H ad H D, ſed A G oſtenſa eſt maior, quam C H, ergo & G B maior erit quam H D; atque adeo tota A B maior, quàm tota C D, & conſequenter maior etiam, quàm D E, ponitur B
enim C D non minor, quàm D E, itaque A B maxima erit proportiona-
ex 1 antec. lium, & per * conſequens B F minima.

Rurſus ſint quatuor proportionales C D, A B, B F, D E, ſed C E compoſita ex extremis ſit minor quàm A F compoſita ex medijs. eadem ratione qua ſupra oſtendemus alteram mediarum A B, B F, maximam eſſe, alteram minimam.



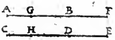
Item ſint quatuor proportionales A B, C D, D E, B F, ſitque A F differentia extremarum maior, quàm C E differentia mediarum. Dico alteram, extremarum A B, B F maximam eſſe, alteram minimam. Producatur enim A B in G, vt ſit B G æqualis E D. ſimili- C
ter producatur C D in H, vt ſit D H æqualis F B, erunt igitur æquales F G, E H, ſed A F ponitur maior, quàm C E, ergo tota A G maior erit, quàm tota C H.

Et quoniam eſt vt A B ad C D, ita D E ad B F, erit permutando, vt A B ad E D, hoc eſt ad B G, ita C D ad B F, hoc eſt ad D H, & componendo, vt A G ad G B, ita C H ad H D, ſed A G oſtenſa eſt maior, quàm C H, ergo & G B maior erit, quàm H D, hoc eſt E D maior, quàm F B, itaque F B minima
ex antec. erit proportionalium A B, C D, D E, B F, & * conſequenter A B maxima.

Denique ſint quatuor proportionales C D, A B, B F, D E: ſit autem C E differentia extremarum minor, quàm A F differentia mediarum. eadem ratione qua ſupra oſtendemus alteram mediarum A B, B F maximam, alteram minimam eſſe. quare conſtat propoſitum. D

Theorema I I I.

Si compoſita ex extremis quatuor magnitudinum proportionalium fuerit, æqualis compoſitæ ex medijs, vel differentia extremarum æqualis differentiæ mediarum, maior extrema maiori mediæ, minor minori æqualis erit.



SInt quatuor magnitudines proportionales A B, C D, D E, B F, ſitque A F compoſita ex extremis æqualis C E compoſitæ ex medijs, & ſit

A B

A A B maior extrema, C D maior media. Dico A B, C D æquales eſſe, itemque æquales D E, B F; ſumatur enim B G æqualis E D, & D H æqualis F B, ergo tota F G æqualis erit toti E H, ſed & A F ponitur æqualis C E, ergo & reliqua A G æqualis erit reliquæ C H.

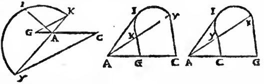
Et quoniam eſt, vt A B ad C D, ita B E ad B F; erit permutando, vt A B ad E D, hoc eſt ad B G, ita C D ad B F, hoc eſt ad D H, & diuidendo, vt A G ad G B, ita erit C H ad H D, ſed A G oſtenſa eſt; æqualis C H, ergo & G B æqualis erit H D, hoc eſt E D æqualis F B, minor videlicet mediarum, minori extremarum. & ſi ab æqualibus A F, C E auferantur æquales F B, D E, reliqua B A reliquæ D C æqualis erit, hoc eſt maior extrema maiori mediæ.

Rurſus ſint quatuor magnitudines proportionales A B, C D, D H, B G,
B ſitque A G differentia extremarum æqualis C H differentiæ mediarum. Dico A B, C D æquales eſſe, & æquales D H, B G, producatur enim A B, C D, vt ſit B F æqualis D H, & D E æqualis B G. Quoniam igitur B F æqualis eſt D H, & B G æqualis D E; erit tota F G æqualis toti E H, ſed & A G ponitur æqualis C H, ergo tota A F toti C E æqualis erit.

Et quoniam eſt, vt A B ad C D, ita D H ad B G, erit permutando, vt A B ad D H, hoc eſt ad B F, ita C D ad B G, hoc eſt ad D E, & componendo, vt A F ad F B, ita C E ad E D ſed A F oſtenſa eſt æqualis C E, ergo & F B æqualis erit E D, hoc eſt D H æqualis B G minor videlicet mediarum minori extremarum, ſed ponũtur æquales & A G, C H, ergo tota A B toti C D æqualis erit; hoc eſt maior extrema maiori mediæ. Maior igitur extremarum maiori mediarum minor minori æqualis eſt, quod erat oſtendendum.
C

Problema I.

Dato quadrato aliud quadratum in data ratione inuenire.

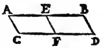


SIt datum quadratum, cuius latus A k, & data ratio A G ad A C. Oportet inuenire aliud quadratum, vt quadratũ A K ad quadratũ inuentũ habeat rationẽ, vt A G ad A C. Ponãtur in directum
D A G, A C, & ex pũcto A ducatur A k, ita vt cũ A C conſtituat angulum quẽcunq; & iungatur G k, eiq. parallela ducatur c y occurrens K A productæ in y: in recta autem k y deſcribatur ſemicirculus y I K, & ex A ipſi k y ducatur perpendicularis A I, vſque ad circumferentiam: ſi quidem punctum A ſit in diametro K y; ſi vero ſit extra diametrum, ducatur A I contingens ſemicirculum in I. Quoniam igitur parallelæ ſunt G k, c y, erunt anguli A G K, A c y æquales, & æquales quoque anguli A k G, A y c; vnde ſimilia triangula A G K, A c y: vt igitur A G ad A C, ita erit A k ad A y, ſed vt A K ad A y, ita eſt quadratum A k ad quadratum A I, ſunt enim tres proportionales A k,

Corol. 2. propoſ. 20 ſexti — A I, A y, & eſt vt * prima ad tertiam, ita quadratum primæ ad quadratum A
ſecundæ, ergo vt A G ad A C, ita erit quadratum A k ad quadratum A I.
Factum eſt igitur quod oportebat.

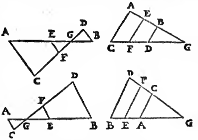
Lemma I.

Si à medio & extremitatibus vnius rectæ lineæ ducantur tres rectæ parallelæ, alteram rectam lineam ſecantes. Segmenta ſectæ inter parallelas interiecta æqualia erunt.



SInt duæ rectæ lineæ AB, CD, quarum A B ſecetur bifariam in E, & à punctis A E B. ducantur tres parallelæ A C, E F, B D ſecantes rectam C D in punctis, C F D. Dico æquales eſſe C F, B
F D. Si enim A B, C D ſunt parallelæ. parallelogramma ſunt A F, F B, ac proinde latera A E, C F ex aduerſo æqualia, atque æqualia latera E B, F D, ſed ponuntur æquales A E, EB, ergo & C F, F D ſunt quoque æquales.

Si vero A B, C D non ſunt parallelæ conuenient inter ſe, conueniant in G, ergo ſimilia erunt triangula G A C, G E F, ob parallelas enim E F, A C angulus G A C æqualis eſt angulo G E F, & angulus G C A angulo GFE, quare vt A G ad G E, ita erit CG ad G F, & exiſtente quidem puncto E inter puncta A G, erit diuidendo, & conuertendo, exiſtēte vero G inter A E erit componendo, & conuertendo, exiſtēte autem A inter E G erit conuertēdo, C
& per conuerſionem rationis, vt G E ad E A, ita G F ad F C.



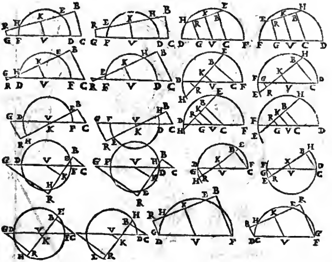
Et quoniam propter parallelas BB, E F angulus G D B, æqualis eſt angulo G F E, & angulus G B D angulo G E F, ſimilia erunt triangula G D B, G F E, vt igitur BG ad G E, ita erit D G ad G F, & exiſtente G inter E B, erit componendo, exiſtente vero E inter G B, erit diuidendo, at exiſtente B inter E G, erit conuertendo, & per conuerſionem rationis, & rurſus conuertendo, vt B E ad G E, ita D F ad G F; ſed vt D
G E ad E A, ita eſt G F ad F C, vt demonſtrauimus, ergo ex * æquali, erit vt B E ad E A, ita D F ad F C; ſed BE æqualis eſt E A, ergo & D F æqualis erit F C.

Lemma II.

Si in diametro circuli, etiam producta, ſumantur duo puncta à centro æquè diſtantia, & ab ijs ducantur ad rectam lineam cadentem in circulum duæ rectæ perpendiculares; Segmenta cadentis inter circumferentiam, & perpendiculares interiecta, æqualia erunt.

Suman-

A Sumantur in diametro circuli D F. duo puncta C G à centro quod ſit V,

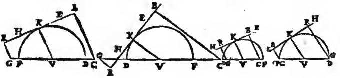


B

æque diſtantia, & ab alijs ad rectam E H cadentem in circulum ducantur duæ perpendiculares C B, G R, ipſa autem E H ſecet circulum in punctis
C E H. Dico E B, H R æquales eſſe. Ducatur enim V K perpendicularis ad E H, erunt igitur tres parallelæ B C, k V, G R atque ſunt æquales G V, V C, ergo ex antecedente Lemmate æquales erunt, & K R, K B, ſed æquales quoque ſunt K H, K E, ergo per æqualium æqualibus ablationem, vel additionem, erunt æquales & E B, H R.

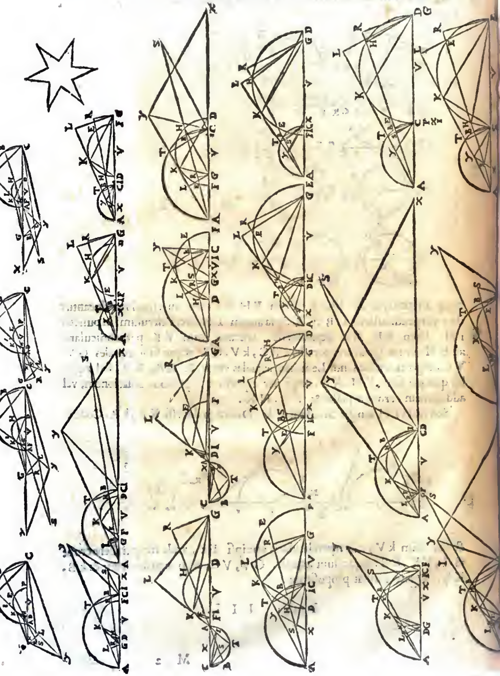
Sed recta E H tanget circulum in k. Dico æquales eſſe K B, k R. Conne-

D



ctatur enim k V; ea perpendicularis erit ipſi F k, vnde tres parallelæ erunt G R, V K, C B, atque ſunt æquales G V, V C, ergo æquales erunt & k B, K R. Quare conſtat propoſitum.

Lemma III.



Digitized by Google

A Sint duo ſemicirculi A B C, D E F in directum baſes habentes, & recta A k contingat ſemicirculum D E F in K, ipſum vero A B C ſecet in T, & ex centro circuli D E F, quod ſit V ponatur V G æqualis V C, & per A ducatur vtcumque recta A E B ſecans circūferentias K F, T C in punctis E B, circumferentiam verò K D in H, & connectantur G H, G k, k D, quibus parallelæ agantur c s, c y, y x ſecantes B A, T A, F A etiam continuatas in punctis S Y X, & * fiat vt A G ad A C, ita quadratū A K ad quadratum A I. Dico vt A G ad A C, ita eſſe F C ad c x, & ita E B ad B S, & ita k T ad T Y, atque vnumquodque rectangulorū Y A k, E A S, F A X quadrato A I æquale eſſe. Probl. 1 huius

Quoniam enim æquales ſunt V G, V C, & æquales quoq; V D, V F, erūt
B æquales & D G, F C, & quoniam propter parallelas K D, x y æquales ſunt anguli G D k, c x y, & propter parallelas G K, c y æquales anguli D G k; x c y, ſimilia erunt triangula D G K, x c y; vt igitur G k ad c y, ita erit G D hoc eſt F C ad c x.

Similiter quoniam parallelæ ſunt G k, c y, erunt anguli A G k, A C Y æquales, & æquales quoque anguli A K G, A Y C, & ideo ſimilia triangula A G k, A C Y, quare vt A G ad A C, ita erit G K ad c y, ſed vt G k ad c y, ita oſtenſa eſt F C ad c x; ergo vt A G ad A C, ita erit F C ad c x. quod eſt primum.

Deinde iungatur B C, eique parallela agatur G R ſecans B S in R. angulus igitur A R G æqualis erit angulo A B C, & ideo rectus, quia & ipſe
C A B C in ſemicirculo rectus eſt, vnde H R, * E B æquales erunt. Lem. 2.

Et quoniam parallelæ ſunt G H, c s, erit angulus G H R æqualis angulo c S B, eſt autem & angulus H R G æqualis angulo S B C, rectus nempe recto, ergo ſimilia erunt triangula H R G, S B C; quare vt G H ad C S, ita erit H R, hoc eſt E B ad B S.

Æquè quoniam ob parallelas G H, c s æquales ſunt anguli A G H, A C S, & æquales quoque anguli A H G, A S C, & ideo ſimilia triangula A G H, A c S; erit vt A G ad A C, ita G H ad C S, ſed vt G H ad C S, ita eſt E B ad B S, vt proximè demonſtrauimus, ergo vt A C ad A C, ita erit E B ad B S, quod eſt ſecundum.

Iam connectatur T C, eique parallela agatur G L ſecans Y T in L, erit an-
D gulus K G L æqualis angulo A T C, ſed rectus eſt A T C in ſemicirculo, ergo & k L G rectus erit: itaque æquales erunt L k, K T. Et quoniam ſimilia ſunt triangula k L G, Y T C, ſunt enim æquales anguli G K L, C Y T ob parallelas G k, c y, & æquales anguli k L G, Y T C, quia recti, erit vt G K ad c y, ita k L, hoc eſt k T, ad T y, ſed & A G ad A C eſt, vt G k ad c y, ob ſimilitudinem triangulorum A G k, A C Y, ergo vt A G ad A C, ita erit k T ad T y, quod eſt tertium.

Et quoniam propter eandem triangulorum A G K, A c y ſimilitudinem, eſt vt A G ad A C, ita A k ad A y, vt autem A K ad A y ita * eſt quadratum A k ad rectangulum y A k, cum ſint eiuſdem altitudinis A k, ergo vt 1. ſexti

AG ad A C, ita erit quadratum A k ad rectangulum Y A k, ſed vt A G ad A C, ita ponitur quadratum A k ad quadratum A I ergo rectangulum Y A K quadrato A I æquale erit, quod eſt quartum. A

Similiter quoniam ſupra oſtenſa ſunt ſimilia triangula A G H, A C S, erit
1 ſexti vt A G ad A C, ita A H ad A S, ſed vt A H, ad A S, * ita eſt rectangulum E A H ad rectangulum E A S, eandem enim habent altitudinem E A, ergo
36 tertij vt A G ad A C, ita erit rectangulum E A H, hoc eſt * quadratum A K, ad rectangulum E A S, ſed vt A G ad A C, ita ponitur quadratum A k ad quadratum A I, ergo rectangulũ E A S æquale erit quadrato A I quod eſt quintum.

Poſtremo quoniam parallelæ ſunt k D, x y, erunt anguli A D K, A X Y æquales, & æquales anguli A K D, A Y k, & ideo ſimilia triangula A D K,
17 ſexti A X Y; vt igitur A D ad A k, ita erit A X ad A Y; ſed vt A D ad A K * ita eſt B
36 tertij A K ad A F; rectangulum enim F A D * æquatur quadrato A k, ergo vt A X ad A Y, ita erit A K ad A F; vnde rectangulum F A X ſub extremis, æquale erit rectangulo Y A k ſub medijs, ſed rectangulum Y A K æquale eſt quadrato A I, quarto loco demonſtrauimus, ergo & rectangulum F A X eidem quadrato A I æquale erit, quod poſtremo loco erat oſtendendum.

Corollarium.

EX demonſtratis patet rectangula Y A k, E A S, F A X æqualia eſſe, oſtenſum eſt enim vnumquodque eorum æquari quadrato A I.

Problema I I. C

Datis duobus ſemicirculis in directum baſes habentibus, inter eorum circumferentias ponere rectam lineam magnitudine datam, quæ ad vnius ſemicirculorum angulum pertingat.

HOc Problema multos Caſus habet, eoſque omnes in ſecundo libro mei Apollonij Rediuiui in tria capita congeſtos abſolui, nunc octo ex principalibus in exemplum Reſolutionis & Compoſitionis explicabo, omiſſis ijs in quibus dati duo ſemicirculi ſe inuicem ſecant aut tangunt, ij enim Caſus ad illorum ſimilitudinem, & reſoluentur & componentur.

Caſus primus. D

Primum vergant dati duo ſemicirculi ad eandem partem, neutro reliquum includente.

SInt itaque dati duo ſemicirculi a b c, d e f, vt dictum eſt. data autem recta linea G. & ducatur a k contingens ſemicirculum d e f in k; ipſum vero A B C ſecans in t. Oportet inter circumferentias t c, k f ponere rectam lineam æqualem ipſi G, ita vt ad punctum a pertingat. Quamuis autem ex hac ſemicirculorum poſitione duo Caſus oriantur, aut enim

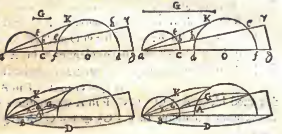
po-

A ponenda eſt illa magnitudine data inter conuexam vtriuſque ſemicirculi circumferentiam, aut inter conuexam vnius, & cauam alterius, tamen vna, eademque reſolutione vtrique ſatisfit.

Reſolutio.

FActum iam ſit ducta nimirum recta a b e habens ſegmentum b e æquale datæ G, & producatur a d in g, vt o g recta ex centro circuli d e f, quod ſit o ſit æqualis o c, & in a e productam ſectamque à circumferentia k d in h ducatur perpendicularis g r, & connectatur c b, eaque eidem a e perpendicularis erit, quoniam angulus a b c in ſemicirculo rectus Lem. 2.
B eſt, quare * æquales erunt h r, e b.

Quoniã igitur datæ ſunt a c, a g, b e, a k prima ſit B, ſecunda D, tertia G, quarta K, vt in figuris ad Reſolutionem pertinẽtibus deſignatũ eſt, & quæratur a e, ea eſto A: ergo a b erit A -- G, & cum ſint anguli a b c,



C a r g recti, & ideo æquales parallelæ erunt b c, r g, & ob id ſimilia triangula a b c, a r g, quare vt a c, ad a g, ita erit a b ad a r; hoc eſt in figuris Reſolutionis, vt B ad D ita A -- G ad $\frac{D \text{ in } A - D \text{ in } G}{B}$ atque adeo a r erit $\frac{D \text{ in } A - D \text{ in } G}{B}$, à qua ſi auferatur recta h r, cui æqualis eſt e b, reliqua a h erit $\frac{D \text{ in } A - D \text{ in } G}{B}$ -- G; ſed rectangulum e a h æquale eſt quadrato a K, ergo

$$\frac{D \text{ in } AQ - D \text{ in } G \text{ in } A}{B} - G \text{ in } A \text{ æquabitur } KQ$$

Ducantur omnia in B, vt fractio euaneſcat, ergo

$$D \text{ in } AQ - D \text{ in } G \text{ in } A - B \text{ in } G \text{ in } A \text{ æquabitur } KQ \text{ in } B.$$

Applicentur omnia ad D, vt poteſtas æquationis nempe A Q ex ſe ſubſi-
D ſtat, ergo

$$AQ - G \text{ in } A - \frac{B \text{ in } G \text{ in } A}{D} \text{ æquabitur } \frac{KQ \text{ in } B}{D}$$

Præcipere autem vt omnia ducantur in B, ac deinde producta applicentur ad D, perinde eſt ac ſi dicatur fiat vt D ad B, ita vtraque æqualitatis pars ſeparatim ad alias partes, harum namque partium altera quidem eſſet A Q -- G in A -- $\frac{B \text{ in } G \text{ in } A}{D}$: altera vero $\frac{KQ \text{ in } B}{D}$ eadem nempe partes, quæ ex illa ductione, & applicatione procreantur, nam vtrobique eadem eſt operatio exemplo res fiet illuſtrior.

$$\frac{D \text{ in } AQ - D \text{ in } G \text{ in } A}{B} - G \text{ in } A \text{ æquetur } KQ$$

& fiat vt D ad B ita $\frac{D \text{ in } AQ - D \text{ in } G \text{ in } A}{B}$ -- G in A ad alia plana, ea erunt A Q -- G

in

in A -- $\frac{B \text{ in } G \text{ in } A}{D}$ nam

$\frac{D \text{ in } KQ - D \text{ in } G \text{ in } A}{B}$ -- G in A ducitur in B, & productum quod eſt D in A Q -- D in G in A -- B in G in A applicatur ad D, ex eaque applicatione oritur A Q -- G in A -- $\frac{B \text{ in } G \text{ in } A}{D}$.

Similiter fiat, vt D ad B, ita K Q ad aliud planum id erit $\frac{KQ \text{ in } B}{D}$; tota igitur hæc progreſſio fit per plana non autem per ſolida, & in eandem inciditur æquationem. Hoc monuimus quoniam in demonſtratione, quæ ordinanda eſt per regreſſum Reſolutionis procedetur per proportionem planorum, non autem per æqualitatem ſolidorum; neque enim opus erit plana in longitudines ducere, ſolidaque ex huiuſmodi ductu facta, ad alias longitudines applicare, vt rurſus ad plana deueniant, cum in æqualitatem eorundem planorum incidatur per proportionem planorum progrediendo. A B

Vt autem clarior exiſtat æquatio, faciliuſque explicetur, tranſmutentur fractiones in integras magnitudines nempe $\frac{KQ \text{ in } B}{D}$ eſto Z Q, ſi enim fiat vt D ad B, ita K Q ad aliud quadratum quod ſit Z Q, erit Z Q idem quod $\frac{KQ \text{ in } B}{D}$. Similiter $\frac{B \text{ in } G}{D}$ eſto F: nam ſi fiat vt D ad B, ita G ad aliam, quæ ſit F, erit F eadem quæ $\frac{B \text{ in } G}{D}$, & per conſequens planum F in A idem erit, quod planum $\frac{B \text{ in } G \text{ in } A}{D}$. tranſmutatis itaque in integras magnitudines fractionibus.

A Q -- G in A -- F in A æquabitur Z Q

Seu quod idem eſt A Q -- G ✣ F in A æquabitur z Q;

Et explicata æquatione L. V. (G $\frac{1}{2}$ ✣ F $\frac{1}{2}$ Q ✣ z Q) ✳ G $\frac{1}{2}$ ✣ F $\frac{1}{2}$ æquabitur A. C

Poriſma.

Fiat vt a g ad a c, ita quadratum a k ad aliud quadratum, quod ſit a i, & ita recta G ad aliam rectam, quæ ſit F; deinde rectæ cuius quadratum æquale eſt quadratis a i, & dimidiæ compoſitæ ex G, & F; addita eadem dimidia compoſita, fiet recta æqualis quæſitæ a e.

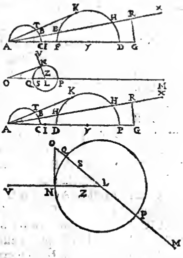
Datur igitur a e quæſita.

Compoſitio.

SInt dati duo ſemicirculi A B C, D E F, vt dictum eſt, data autem recta linea V z, & contingat A K ſemicirculum D E F in K ſecet vero ipſum A B C in T. Oportet inter circumferentias T C, K F ponere rectam lineam æqualem V z, ita vt ad punctum A pertingat. Duo ſunt Caſus vt in Reſolutione dictum eſt. in primo oportebit datam V z non eſſe maiorem, quàm K T, nec minorem quàm F C. in ſecundo oportebit non eſſe maiorem, quam F C, nec minorem quàm K T. Si quidem data V z ſit æqualis alteri ipſarum k T, F c: factum iam erit quod proponitur, ſi vero maior ſit minore, minor autem maiore producatur A D in D

Probl. 1 huius G, vt y G recta ex centro circuli D E F, quod ſit y, æqualis ſit y c, & fiat

vt



A vt A G ad A C, ita quadratũ A K ad aliud quadratũ quod ſit A I. Similiter fiat vt A G ad A C, ita V Z ad Z L, & V L cõpoſita ex V Z, Z L ſecetur bifariã in N, eiq; ducatur ad rectos angulos N O æqualis ipſi A I, & connectatur O L. quadratum igitur O L æquale eſt quadratis O N, N L, itaq; rectæ O L addenda eſt recta æqualis ipſi L N. ſic Poriſma fieri iubet.

Producatur ergo O L in P, vt ſit L P æqualis L N, & à puncto A ad circumferẽ-
B tiam k F ducatur A E æqualis O P ſecans circumferentiã T C in B, ipſam autẽ O P, in primo quidem caſu, maiorẽ eſſe quàm A F, minorẽ quàm A K, in ſecundo vero, minorẽ quàm A F, maiorẽ quã AK infra demonſtrabitur. Iam facta eſt conſtructio Problematis, prout Poriſma docet. Nunc oſtendendũ eſt B E æqualem eſſe VZ datæ. Producatur A E, vbi opus exigit donec ſecet circumferentiã k D in H, & centro L interuallo L N, vel L P deſcribatur circulus ſecans rectam O P in Q, & ſumatur P S æqualis V Z, reliqua S Q æqualis erit reliquæ Z L.

Et quoniam recta O N tangit circulum in N cum ſit rectus angulus
C O N L ex conſtructione; quadratum O N * æquale erit rectangulo P O Q, hoc eſt quadrato O P, minus rectangulo O P Q, ſeu minus rectangulis O P S O P S Q. Si igitur fiat vt A C ad A G, ita vtraq; æqualitatis pars ſeparatim ad alia plana, itidem manebit æqualitas in Reſolutione conuerſo modo factum eſt nempe, vt A G ad A C, ita vtraque æqualitatis pars ſeparatim ad alia plana. At quoniam eſt vt A G ad A C, ita quadratum A K ad quadratum A I ex conſtructione, hoc eſt ad quadratum O N, erit conuertendo, vt A C ad A G, ita quadratum O N ad quadratum A K, quadratum igitur A K erit vna pars æqualitatis, alterum vero ſic explorabimus. 36 tertij

Fiat vt A C ad A G, hoc eſt vt L Z ad Z V, ſeu quod idem eſt, vt Q S ad S P, ita O S ad aliam, quæ ſit S M, ea maior erit, quàm S P, quoniam
D & O S maior eſt, quàm Q S, ſed vt O S ad S M ita * eſt rectangulum P O S ad rectangulum P O, S M, eandem enim habent altitudinem P O, ergo vt A C ad A G, ita erit rectangulum P O S, hoc eſt quadratum O P, minus rectangulo O P S, ad rectangulum P O, S M; ſed vt A C ad A G, hoc eſt vt Q S ad S P, ita * eſt quoque rectangulum O P, S Q ad rectangulum O P S: ſunt enim eiuſdem altitudinis O P. ergo vt quadratum O P, minus rectangulo O P S ad rectangulum P O, S M, ita erit rectangulum O P, S Q ad rectangulum O P S, hoc eſt vt totum ad totum ita ablatum ad ablatum, quare & * reliquum ad reliquum erit, vt totum ad totum ideſt & quadratum O P minus rectangulo O P S, ac etiam minus rectangulo O P, S Q 1 ſexti 1 ſexti 19 quinti

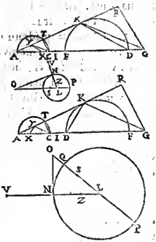
* minus

minus rectangulo O P S, erit vt quadratum O P minus rectangulo O P S A
ad rectangulum P O, S M. hoc eſt vt A C ad A G. Rectangulum igitur P O, S M, minus rectangulo O P S, erit altera pars æqualitatis. Itaque quadratum A K, hoc eſt rectangulum E A H, æquale erit rectangulo P O, S M, minus rectangulo O P S, hoc eſt æquale erit rectangulo O P M; ſed æquales ſunt A E, O P, ex conſtructione ergo & A H, P M æquales erunt.

Denique connectatur B C, & ei parallela agatur G R ſecans A E productam in R, angulus igitur, A R G æqualis erit angulo A B C, & ideo rectus
Lem. 3 cum ſit rectus & ipſe A B C in ſemicirculo, quare * æquales erunt E B, H R, & poſita E x æquali A H. vel P M tota B X æqualis erit toti A R, & cum ſint æquales A E, O P, ex conſtructione, & æquales e x P M, tota A X toti O M æqualis erit. B

Et quoniam eſt vt A C ad A G, ita A B ad A R ob ſimilitudinem triã-gulorum A B C, A R G, & ita O S ad S M, ex conſtructione, erit vt A B ad A R, hoc eſt ad B X, ita o s S M, & componendo vt A X ad X B, ita O M ad M S; ſed A X prima oſtenſa eſt æqualis tertiæ O M, ergo & ſecunda X B æqualis erit M S quartæ, vnde ablatis æqualibus e x P M reliqua E B æqualis erit reliquæ P S, hoc eſt V Z datæ, quod erat oſtendendum. Factum eſt igitur quod oportebat.

Rudis eſt quidem hæc demonſtratio, ſed talem Reſolutio genuit, & nos noſtrum inſtitutum ſecuti, quod eſt à veſtigijs Reſolutionis in Demonſtratione non recedere, ipſam demonſtrationem per orſum reſolutionis texuimus. ſic etiam ſequentium Caſuum demonſtrationes texentur. facile autem eas ex- C
poliet, qui non ea ſe lege adſtrinxerit, vt per veſtigia Reſolutionis omnino regrediatur. quemadmodum neglectis ex parte reſolutionem veſtigijs, demonſtrationes omnium Caſuum huius Problematis in ſecundo libro noſtri Apollonij Rediuiui explicauimus.



At vero rectam O P in primo quidem Caſu maiorem eſſe quam A F, minorem quam A k, in ſecundo vero minorem quam A F, maiorem quam A k ſic demonſtrabimus.

Connectantur G K, K D, eiſque parallelæ agantur C y, y x ſecantes A T, A C in pun-
Lem. 3 ctis y x, erit * igitur vt A G ad A C, ita F C ad C X; ſed vt A G ad A C, ita eſt quoque V Z ad Z L ex conſtructione, ergo vt V Z ad Z L, ita erit F C ad c x, & permutando vt V Z ad F C, ita erit Z L ad c x, quare vt V Z ad F C, ita erit quoque V L hoc eſt P Q ad F x, hoc eſt vt vna antecedentium ad vnam conſequentium; ita omnes antecedentes ad omnes conſequentes, ſed V Z in primo quidem Caſu ponitur maior, quam F c, in ſecun- D

do

A do vero minor, ergo & p Q in primo Caſu maior erit quam F x, in ſecundo minor.

Et quoniam rectangulum F A x * æquale eſt quadrato A I, hoc eſt quadrato O N, ſeu rectangulo P O Q, proportionales erunt P O, F A, A x, O Q, ſed P Q differentia extremarum in primo quidem Caſu oſtenſa eſt maior, quam F x, differentia mediarum, ergo altera * extremarum p O, O Q, nempe ipſa p O maxima erit, & per conſequens maior quàm F A. in ſecundo vero Caſu ipſa P Q oſtenſa eſt minor quam F x, ergo altera * mediarum F A, A x, hoc eſt ipſa A F maxima erit, & per conſequens maior quam O P. Lem. 3 Theor. 2 huius Theor. 2 huius

Deinde connectatur C T, eique parallela agatur G R occurrens A K

B continuatæ in R, erit angulus A R G rectus, cum ſit rectus & angulus A T C in ſemicirculo, ac proinde * æquales erunt T K, k R. Lem. 8

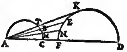
Et quoniam eſt vt A G ad A C, * ita k T ad T y, & ita quoque V Z ad Z L, ex constructione, erit vt V Z ad Z L, ita k T ad T y, & permutando vt V Z ad k T, ita Z L ad T y, & conſequenter ita V L ad k Y, omnes videlicet antecedentes ad omnes conſequentes, ſed V Z, in primo quidem Caſu ponitur minor, quàm K T, in ſecundo vero maior, ergo & V L hoc eſt P Q in primo Caſu minor erit, quam K Y in ſecundo maior. Lem. 3

Et quoniam rectangulum y A k * æquale eſt quadrato A I, hoc eſt quadrato O N, ſeu rectangulo P O Q, proportionales erunt y A, Q o, o P, A k, ſed y k differentia extremarum, in primo quidem Caſu oſtenſa eſt ma-

C ior, quam p Q differentia mediarum, ergo altera * extremarum y A, A k, nempe ipſa A k maxima erit, & conſequenter maior quam O P: In ſecundo vero Caſu y k oſtenſa eſt minor, quàm P Q ergo altera * mediarum Q O, O p, nempè ipſa p O erit maxima, & per conſequens maior quam A k. Recta igitur O p. in primo quidem Caſu maior eſt quàm A F, minor quàm A K, in ſecundo vero minor, quàm A F, maior quàm A K. quod erat oſtendendum. Lem. 3 Theor. 2 huius Theor. 2 huius

Diximus oportere in primo quidem Caſu datam V Z non eſſe maiorem, quam K T, nec minorem quam F C: in ſecundo vero non eſſe maiorem, quàm F C, nec minorem, quàm K T. Quoniam in primo Caſu k T maxima eſt omnium, quæ ad punctum A pertinentes inter circumferentias

D T C, k F interijciuntur: F C miuima: In ſecundo vero maxima eſt F C, minima K T, aliarum autem in vtroque Caſu propinquior minimæ remotiore minor eſt, idque ſic demonſtrabitur.



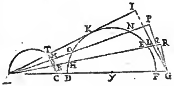
Ducatur vtrumque recta A B E ſecans circumferentias T C, K F in punctis B E. Qnoniam igitur in primo Caſu A K maior eſt, quàm A E, A T autem minor, quàm A B, reliqua T K maior erit, quàm reliqua B E, & ſic demonſtrabitur omnibus alijs maior. Maxima eſt igitur K T.

Similiter quoniam A F minor eſt, quàm A E, A C autem maior quàm

A B,

A B, reliqua C F minor erit, quàm reliqua B E: Eademque ratione demonſtrabitur omnibus alijs minor. minima eſt igitur omnium F C. A

Rurſus ducatur alia recta A M N ſecans circumferentias T C, K F in punctis M N, ſitque recta M N minimæ C F propinquior, quàm B E. Quoniam igitur A N minor, eſt quàm A E, A M autem maior quam A B reliqua M N, minor erit quàm reliqua B E. Propinquior igitur minimæ, minor eſt remotiore.



In ſecundo autem Caſu ſumatur ex centro circuli D E F, quod ſit y recta y G æqualis y c, & connectatur C B eique parallela agatur G R ſecans A E productam in R, quàm etiam ſecet circumferentia k D in H. Angulus igitur A R G æqualis erit angulo A B C, ſed rectus eſt A B C B
Lem. 2 in ſemicirculo ergo & A R G rectus erit, quare* æquales erunt E B, H R; & A G maior erit quam A R, ſed A D minor eſt quam A H, ergo reliqua D G, hoc eſt F C, maior erit quam reliqua H R. & ſic oſtendetur ipſa F C maior omnibus alijs. Maxima eſt igitur F C.

Deinde connectatur C T, & ei parallela agatur G I ſecans A k productam in I, ipſam vero A R in L, angulus A I G æqualis erit angulo A T C
Lem. 2 & ideo rectus, cum ſit rectus & ipſe A T C in ſemicirculo, quare* æquales T K, K I, & A I minor erit quam A L, & multo minor quam A R, ſed A K maior eſt quàm A H, ergo reliqua K I ſeu k T minor erit, quàm reliqua H R, hoc eſt quam E B, & ſic ipſa K T oſtendetur omnibus alijs minor. Itaque minima eſt K T. C

Poſtremo ducatur alia recta A M N ſecans circumferentias T C, K F in punctis M N, circumferentiam vero k D in O, ſitque recta M N minimæ K T propinquior quam E B, & connectatur C M, cui parallela agatur G P ſecans A N productam in P, ipſam vero A R in Q. angulus igitur A P G æqualis erit angulo A M C, & ideo rectus, cum ſit rectus & A M C
Lem. 2 in ſemicirculo, vnde æquales* erunt M N, O P, & A P minor erit quam A Q, & multo minor quam A R, ſed A O maior eſt, quàm A H, ergo reliqua A P ſeu M N, minor erit, quàm reliqua H R. hoc eſt quam B E. Propinquior igitur minimæ minor eſt remotiore. Quare manifeſta eſt Determinatio. D

Caſus Secundus.

Sed vergentibus ad eandem partem datis duobus ſemicirculis, maior includat minorem, & recta ponenda pertineat ad angulum ſemicirculi maioris, à quo quidem angulo ſemicirculus minor plus diſtet, quàm à reliquo.

Sint igitur dati duo ſemicirculi a b c, d e f, quales ponuntur, data autem recta linea G, & contingat a k ſemicirculum d e f in K, ipſum

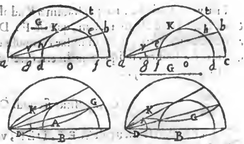
A ſum vero a b c ſecet in ε. Oportet inter circumferentias ε c, k f ponere rectam lineam æqualem ipſi G, ita vt ad punctum a pertineat. Hic quoque duplex oritur Caſus, aut enim ponenda eſt data recta inter cauam vnius & conuexam alterius ſemicirculi circumferentiam, aut inter cauam vtriuſque. vnica tamen Reſolutione vtrique caſui ſatisfit.

Reſolutio.

Poſita iam ſit recta linea e b æqualis datæ G, eaque ad punctum a pertineat, quemadmodum Problema exigit, & ex centro circuli d e f, quod ſit o ponatur o g æqualis o c, & recta a e b ſecet circumferentiam k d in h, ipſique a b ducatur perpendicularis g r, & iungatur c b;

B ea quoque eidem a b perpendicularis erit, angulus enim a b c in ſemicirculo rectus eſt vnde * æquales erunt h r, e b. Theor. huius

Quoniam igitur datæ ſunt a c, a g, b e, a K, prima ſit B, ſecunda D, tertia G, quarta K, vt in figuris ad Reſolutionem pertinentibus deſignatum eſt, & quæratur a e, ea eſto A, ergo a b erit A ✣ G, & cum ſint ſimilia triangula a b c, a r g, anguli enim a b c, a r g ſunt æquales, quia recti, & angulus a communis vtrique triangulo, erit vt a c ad a g, ita a b ad a r, hoc eſt in figuris



C reſolutionis, vt B ad D, ita A ✣ G ad $\frac{\text{D in A} \dagger \text{D in G}}{\text{B}}$, atque adeo a r erit $\frac{\text{D in A} \dagger \text{D in G}}{\text{B}}$, cui addita r h, quæ æqualis eſt ipſi e b tota a h erit $\frac{\text{D in A} \dagger \text{D in G}}{\text{B}}$ ✣ G, ſed rectangulum e a h * æquale eſt quadrato A K, ergo 36 tertij

$\frac{\text{D in AQ} \dagger \text{D in G in A}}{\text{B}}$ ✣ G in A æquabitur K Q.

Ducantur omnia in B, vt fractio euaneſcat. ergo

D in A Q † D in G in A † B in G in A æquabitur K Q in B.

Et applicentur omnia ad D, vt Poteſtas æquationis, nempe A Q ex ſe ſubſiſtat. ergo

D A Q ✣ G in A ✣ $\frac{\text{B in G in A}}{\text{D}}$ æquabitur $\frac{\text{K Q in B}}{\text{D}}$.

Ductio hæc, & applicatio vtramq; æqualitatis partẽ trãſmutant in alias partes ibidem æquales, reſolutionemq. ad æquationem ſecundũ artis pręcepta perducunt. idem fieret ſi operatio per proportionẽ inſtitueretur, hoc modo. Fiat vt D ad B, ita vtraq; æqualitatis pars ſeparatim ad alias partes, nam & hæ quidẽ partes æquales erunt eædẽq. quæ ex operatione ductionis, & applicationis procreantur. Hoc monuimus quẽadmodũ in antecedẽtis caſus reſolutione factum eſt, quoniã in demonſtratione inſtituenda, regreſſus qui fieri debet reſolutionis veſtigia repetendo, fiet non per æqualitatem ſolidorum, ſed per proportionem

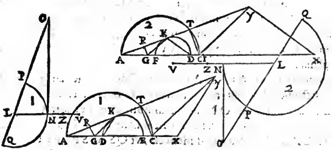
N pla-

Denique connectatur B C, & ei parallela agatur G R ſecans A H in R, A
angulus igitur A R G æqualis erit angulo A B C, & ideo rectus, cum ſit
Lem. 2 rectus & ipſe A B C in ſemicirculo, quare* æquales erunt E B, H R, &
poſita B x æquali A R, tota E x æqualis erit toti A H, vel P M, & cum
ſint æquales A E, O P, ex conſtructione, & æquales e x, P M, tota A x
toti O M æqualis erit.

Et quoniam eſt vt A C ad A G, ita A B ad A R, ob ſimilitudinem triangulorum A B C, A R G, & ita O S ad S M, ex conſtructione, erit vt A B ad A R, hoc eſt ad B x, ita O S ad S M, & componendo vt A x ad x B, ita O M ad M S, ſed prima A x oſtenſa eſt æqualis tertiæ O M, ergo & ſecunda x B æqualis erit M S quartæ, atque ablatis æqualibus x B, M S ab æqualibus e x, P M, reliqua E B reliquæ P S, hoc eſt V Z datæ, æqualis erit, quod erat oſtendendum. Factum eſt igitur quod oportebat. B

At vero rectam O P in, primo quidem Caſu minorem eſſe, quam A F, maiorem quam A K: in ſecundo vero maiorem quàm A F, minorem quam A K, ſic demonſtrabitur.

Connectantur G k, K D, eiſque parallelæ agantur c y, y x ſecantes A T



C

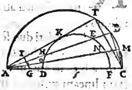
Lem. 3 A C continuatas in punctis y x. erit igitur vt* A G ad A C, ita F C ad C x, ſed vt A G, ad A C, ita eſt quoque V Z ad, Z L, ex conſtructione, ergo vt V Z ad Z L, ita erit F C, ad C x, & permutando vt V Z ad F C, ita erit Z L ad c x, quare &* ita omnes antecedentes ad omnes conſequentes, hoc eſt ita V L, vel P Q ad F x. ſed V Z in primo caſu ponitur maior, quam F C: in ſecundo minor, ergo & P Q in primo Caſu maior erit quam F x, in ſecundo minor. D

Lem 3. Et quoniam rectangulum F A x* æquale eſt quadrato A I, hoc eſt quadrato O N, ſeu* rectangulo P O Q,* proportionales erunt P O, F A, A x, O Q, ſed P Q differentia extremarum, in primo quidem Caſu oſtenſa eſt maior, quam F x differentia mediarum, ergo altera* extremarum P O, O Q, nempe ipſa P O minima erit, & per conſequens minor quam A F. In ſecundo vero Caſu ipſa P Q oſtenſa eſt minor, quàm F x, ergo altera* mediarum F A, A x, hoc eſt ipſa A F, minima erit, & conſequenter minor quam O P.

Iam connectatur C T, eique parallela agatur G R ſecans A K in R,

erit

A erit angulus A R G æqualis angulo A T C, & ideo rectus, cum ſit rectus
& angulus A T C in ſemicirculo quare* æquales erunt T k, k R. Lem. 3.
Et quoniam eſt vt A G ad, A C, * ita k T ad T y, & ita quoque V Z ad Lem. 1.
Z L, ex conſtructione, erit, vt V Z ad Z L ita k T ad T y, & permutando
vt V Z ad k T, ita erit Z L ad T y, & conſequenter ita* quoque V L ad 12 quinti
K y, omnes videlicet antecedentes ad omnes conſequentes, & rurſus con-
uertendo vt V Z ad V L, ita k T ad k y ſed V Z in primo caſu ponitur
minor, quam k T, in ſecundo maior, ergo, & V L, hoc eſt P Q in primo
Caſu minor erit, quam K y, in ſecundo maior.
Poſtremo quoniam rectangulum y A K* æquale eſt quadrato A I, hoc Lem. 3
eſt quadrato O N ſeu* rectangulo Q o P, proportionales erunt y A, Q o 16 tertij
B o P, A K, ſed y K differentia extremarum. in primo quidem Caſu oſtenſa
eſt maior, quàm P Q differentia mediarum, ergo altera* extremarum y A, Theor. 2 huius
A k nempe ipſa A K minima erit, & conſequenter minor, quam O P. In
ſecundo vero Caſu y k oſtenſa eſt minor, quàm P Q, ergo altera* media- Theor. 2 huius
rum Q O, o P, nempe, ipſa O P minima erit, & per conſequens minor
quàm A k. Recta igitur O P in primo Caſu minor eſt, quàm A F, ma-
ior quam A k, in ſecundo minor quàm A K, maior quàm A F. quod
erat oſtendendum.
Diximus oportere in primo quidem Caſu datam V Z non eſſe maiorem,
quàm k T, nec minorẽ, quam F C, in ſecundo vero non eſſe maiorem, quàm
F C, nec minorem, quam k T, nam in primo Caſu k T maxima eſt om-
C nium quæ ad punctum A pertinentes inter circumferentias T C, k F inter-
ijciuntur, F C minima. In ſecundo autem maxima eſt F C, minima k T.
aliarum autem propinquior minimæ, remotiore minor eſt. idque ſic de-
monſtrabitur.
In primo Caſu ducatur vtrumque recta A E B ſecans circumferentias K F,
T C in punctis E B, circumferentiam vero K D
in H, & ex centro circuli D E F, quod ſit y ſu-
matur y G æqualis y c, & connectantur C B,
C T, eiſque parallelæ agantur G R, G I, quarum
G R ſecet rectam A B in R, altera vero G I ſecet
vtramque A B, A T in punctis Q I. Æquales

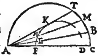


D igitur erunt anguli A T C, A I G, & æquales quoque anguli A B C, A R G
ſed recti ſunt A T C, A B C in ſemicirculo, ergo & anguli A I G, A R G
recti erunt, ac proinde* æquales IK, KT, &* æquales R H, E B. Et quoniam Lem. 2
A k maior eſt, quàm A H, A I autem minor, quàm A Q, & multo minor
quam A R, reliqua I K maior erit, quàm reliqua R H, hoc eſt K T, maior
quam E B & ſic ipſa K T oſtendetur omnibus alijs maior. Maxima eſt igi-
tur K T.
Æque quoniam A D minor eſt, quàm A H, A G autem maior quàm
A R reliqua G D minor erit, quàm reliqua R H, hoc eſt F C minor, quàm
E B. Minima eſt igitur F C.

Sed ducatur alia recta A N M ſecans circumferentias K F, T C in punctis N M; circumferentiam vero k D in O, ſitque N M ipſi F C propinquior, quàm E B, & connectatur C M, cui parallela agatur G P ſecans rectam A M in P, quam etiam ſecet G R in L. angulus igitur A P G æqualis erit angulo A M C, ſed rectus eſt A M C in ſemicirculo, ergo & A P G rectus erit, ac proinde* æquales erunt P O, N M. Et quoniam A O minor eſt, quàm A H, ipſa autem A L maior, quàm A R, & A P multo maior, ergo reliqua P O hoc eſt N M minor erit, quàm reliqua R H, hoc eſt quàm E B. Propinquior igitur minimæ minor eſt remotiore. A

Lem. 1

In ſecundo autem Caſu ducatur recta A E B ſecans circumferentias k F, T C in punctis E B. Quoniam igitur A C maior eſt, quàm A B, A F autem minor, quàm A E, reliqua F C maior erit, quàm reliqua E B. Maxima eſt igitur omnium F C. B



Similiter quoniam A T minor, eſt quàm A B; A K autem maior, quàm A E reliqua K T minor erit, quàm reliqua E B. Minima eſt igitur omnium k T.

Poſtremò ducatur alia recta A N M ſecans circumferentias k F, T C in punctis N M, & ſit N M ipſi k T propinquior, quàm E B. Quoniam igitur A M minor eſt, quàm A B, & A N maior, quàm A E, reliqua N M minor erit, quàm reliqua E B, hoc eſt propinquior minimæ minor remotiore. Quare manifeſta eſt determinatio.

C

Caſus Tertius.

Rurſus vergant ad eamdem partem dati duo ſemicirculi, maior minorem includens, & recta ponenda pertineat ad angulum ſemicirculi maioris, ſed ab eo angulo ſemicirculus minor minus diſtet, quàm à reliquo.

Sint igitur dati duo ſemicirculi a b c, d e f, quales ponuntur; data autem recta linea G, & ducatur A K contingens ſemicirculum d e f in K; ipſum vero a b c ſecans in t. Oportet inter circumferentias t c, K f ponere rectam lineam æqualem ipſi G, ita vt ad punctum a pertineat. Et hic Caſus in duos alios Caſus diuiditur, aut enim ponenda eſt ea recta inter cauam circumferentiam vnius ſemicirculi, & conuexam alterius, aut inter cauas vtriuſque, tamen vterque vno eodemque modo reſoluitur. D

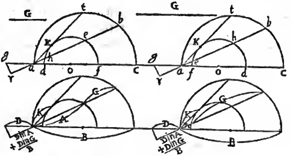
Reſolutio.

Sit iam poſita recta linea e b æqualis datæ G, vt Problema exigit, & ex centro circuli d e f, quod ſit O, ponatur O g æqualis o c, & recta a e b ſecet circumferentiam K d in h, & ducatur g r perpendicularis ad b a productam, & connectatur c b. angulus igitur a b c in ſemicirculo rectus eſt, ac proinde h r *æqualis e b.

Lem. 1

Quo-

A Quoniam igitur datæ ſunt a c, a g, b e, a k. prima ſit B, ſecunda D, tertia G, quarta K, vt in figuris ad Reſolutionem pertinentibus deſignatũ eſt, & quæratur a e. eſtò illa A, ergo recta A B erit A + G, & cùm ſint ſimilia triangula a b c, a r g, anguli enim a b c,



B a r g ſunt recti, & ideo æquales, & æquales quoque anguli ad a, quia ſunt ad verticem, erit vt a c ad a g ita a b ad a r, hoc eſt in figuris ad reſolutionem pertinentibus, vt B ad D, ita A + G ad $\frac{D \text{ in } A + D \text{ in } G}{B}$, atque adeo a r erit $\frac{D \text{ in } A + D \text{ in } G}{B}$, quæ ſi auferatur à recta r h æquali ipſi e b, remanebit a h, itaque a h erit G -- $\frac{D \text{ in } A + D \text{ in } G}{B}$, ſed rectangulum e a h * æquale eſt quadrato A k, ergo 36 tertij

G in A -- $\frac{D \text{ in } A\,Q + D \text{ in } G \text{ in } A}{B}$ æquabitur k Q

Ducantur omnia in B, vt fractio euaneſcat, ergo

B in G in A -- D in G in A -- D in A Q æquabitur K Q in B

G in A -- $\frac{D \text{ in } A\,Q + D \text{ in } G \text{ in } A}{B}$ ducto in B alicui videbitur productum debere eſſe B

C in G in A -- D in A Q + D in G in A (non autem vt nos expoſuimus) quod verum non eſt; nam cum à G in A auferenda ſit tota fractio $\frac{D \text{ in } A\,Q + D \text{ in } G \text{ in } A}{B}$ à producto quoque B in G in A auferri debet totum productum fractionis, quod eſt D in A Q + D in G in A. Itaque G in A -- $\frac{D \text{ in } A\,Q + D \text{ in } G \text{ in } A}{B}$ ducto in B, productum erit B in G in A -- D in A Q -- D in G in A, quod animaduertiſſe fuerit operæ pretium.

Denique applicentur omnia ad D, vt A Q, Poteſtas nempe æquationis ex ſe ſubſiſtat, ergo

$\frac{B \text{ in } G \text{ in } A}{D}$ -- G in A -- A Q æquabitur $\frac{k\,Q \text{ in } B}{D}$

Ea, quæ de huiuſmodi ductione, & applicatione in Reſolutionibus duorum præcedentium Caſuum in ſimili loco dicta ſunt, hic quoque dicta eſſe intel-

D ligantur ob rationes ibidem allatas.

Sed vt æquatio facilius explicetur, tranſmutentur fractiones in integras magnitudines, vt in Reſolutionibus præcedentium Caſuum factum eſt, hoc eſt fiat vt D ad B, ita K Q ad aliud quadratum, quod ſit Z Q, erit Z Q idem quod $\frac{k\,Q \text{ in } B}{D}$. Similiter fiat vt D ad B, ita G ad aliam, quæ ſit F, erit F eadem quæ $\frac{B \text{ in } G}{D}$, atque adeo planum F in A idem erit, quod planũ $\frac{B \text{ in } G \text{ in } A}{D}$ facta igitur tranſmutatione.

F in A --- G in A --- A Q æquabitur Z Q

Vel F -- G in A -- A Q æquabitur Z Q

Et explicata æquatione F $\frac{1}{2}$ G $\frac{1}{2}$ -- L. V. (F $\frac{1}{2}$ -- G $\frac{1}{2}$ Q -- Z Q) æquabitur A

Vel

Digitized by Google

Vel $F\frac{1}{2} - G\frac{1}{2} + L.V.(F\frac{1}{2} - G\frac{1}{2}Q - ZQ)$ æquabitur A A

In hac æquatione A explicabilis eſt de duobus terminis, quorum non ſemper vterque indicat a e quæſitam, ſed alter tantum, interdum minor, interdum maior, ſed quo Caſu terminus minor indicet ipſam quæſitam, quoue terminus maior, quoue etiam vterque ſuo loco dicetur.

Poriſma.

Fiat vt a g ad a c, ita quadratum a k ad aliud quadratum, quod ſit a i, & ita recta G ad aliam rectam, quæ ſit F, deinde dimidiæ differentiæ, qua F ſuperat ipſam G, dempta recta, cuius quadratum æquale eſt exceſſui, quo quadratum eiuſdem dimidiæ differentiæ ſuperat quadratum a i, reliqua erit terminus minor. B

Vel eidem dimidiæ differentiæ addita eadem recta fiet terminus maior.

Scholium.

Ex Poriſmate apparet dimidiam differentiam, qua F ſuperat G, non eſſe minorem recta a i, eo quod quadratum ipſius dimidiæ differentiæ non eſt minus, quadrato a i, & licet in Poriſmate appareat ipſum quadratum a i ſuperari à quadrato dimidiæ differentiæ, non tamen poteſt dici abſolute, quadratum dimidiæ differentiæ maius eſſe quadrato a i, affirmari autem debet non eſſe minus; nam quadratum dimidiæ differentiæ nonnumquam præſtat quadrato a i nihilo, idque contingit cum ratio a d ad a f, non eſt maior ratione a g, ad a c, & præterea data G, expoſita eſt æqualis minimæ C earum, quæ inter circumferentias K f, t c interijciuntur, immo ſi ipſa G exponeretur minor minima, ſequeretur dimidiam differentiam rectarum F, & G, minorem fieri rectam a i, quod quidem aduerſus conſtructionem Problematis, inſtaret; nam cum in circulo, cuius diameter æqualis eſt ipſi dimidiæ differentiæ, aptanda ſit ex præcepto Poriſmatis recta æqualis a i, id fieri non poſſet, ſi ipſa dimidia differentia minor eſſet quam a i. Similiter ſi ratio a d ad a f maior eſſet, ratione a g ad a c, & recta G exponeretur minor minima, ſequeretur aut dimidiam differentiam rectarum F & G minorem fieri recta a i, quod quidem conſtructionem Problematis eadem ratione impediret, aut terminum indicantem quæſitam a e maiorem fieri recta a f, quod pariter conſtructioni, ſed alia ratione, aduerſaretur; nam à puncto a ad circumferentiam k f non poſſet duci recta æqualis D ipſi termino, vt Poriſma fieri præcipit, ſi ipſe terminus maior eſſet, quàm a f. Similis quoque inſtantia conſtructioni occurreret, ſi data G exponeretur maior maxima, ſiue ratio a d ad a f, maior ſit ratione a g ad a c, ſiue non maior: nam terminus indicans a e quæſitam fieret, vel minor minore rectarum a K, a f, vel maior maiore: Itaque à puncto a ad circumferentiam K f, non poſſet duci recta æqualis ipſi termino, vt Poriſma fieri iubet. Hæc omnia ſuis locis demonſtrabuntur. Ad deſtruendas igitur huiuſmodi inſtantias præfigi debet Problemati Determinatio, ne data G maximam

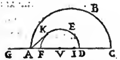
A ximam ſuperet, neue à minima ſuperetur. Itaque oſtendendum eſt, quæ ſit maxima, quæue minima, ſed quo clarius, atque facilius id fiat prius ſequens Lemma demonſtrabo.

Lemma IV.

Sint duo ſemicirculi A B C, D E F, quales in præſenti Caſu ponuntur, & contingat recta A K ſemicirculum D E F in K, & ex centro circuli, quod ſit V ponatur V G æqualis V C, & * fiat vt A G ad A C, ita quadratum A K ad quadratum A I. Dico ſi ratio A D ad A F maior eſt ratione A G ad A C, & rectam A I maiorem eſſe maiore rectarum A F, A k, & ſi æqualis æqualem, & ſi minor minorem, maiorem autem minore. Probl. 1 huius

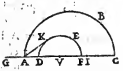
B

Sit primum ratio A D ad A F maior ratione A G ad A C, ergo duo ſunt Caſus, aut enim F C intercepta eſt inter conuexam vnius ſemicirculi circumferentiam, & cauam alterius, aut inter cauam vtriuſque. ſit primum intercepta inter vtriuſq; cauam, erit A K maior, quàm A F. Quoniam igitur eſt vt A G ad A C, minor nempe ad maiorem, ita quadratum A k ad quadratum A I ex poſitione, erit quadratum A k, minus quadrato A I, vnde & recta A k minor, quam recta A I. Recta igitur A I maior eſt maiore rectarum A F, A k.



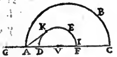
Deinde ſit F C intercepta inter conuexam circumferentiam, & cauam erit A F maior, quàm A k, & quoniam ratio A D ad A F ponitur maior ratione A G ad A C vt autem A G, A C, ita eſt quadratum A K ad quadratum A I, ergo ratio A D ad A F maior erit ratione quadrati A k ad quadratum A I, ſed vt A D ad A F prima videlicet trium proportionalium A D, A K, A F ad tertiam, ita eſt quadratum ſecundæ A k ad quadratum A F tertiæ, ergo ratio quadrati A k ad quadratum A F maior erit, ratione quadrati A k ad quadratum A I; quare quadratum A I * maius erit quadrato A F, & conſequenter recta A I maior, quam recta A F, quod primum. 10 quinti

C



D

Sed ſit ratio A D ad A F eadem, quæ A G ad A C, ergo eadem erit, quæ quadrati A k ad quadratum A I, ſed vt A D ad A F, ita eſt quadratum A K ad quadratum A F, vt demonſtrauimus ergo quadratum A I quadrato A F æquale erit, quare & recta A I, æqualis rectæ A F, quod eſt ſecundum.



Denique ſit ratio A D ad A F minor ratione A G ad A C, ergo minor erit & ratione quadrati A k ad quadratum A I; ſed vt A D ad A F, ita oſtenſum eſt quadratum A k ad quadratum A F, ergo ratio quoque quadrati A K ad quadratum A F



mi-

A G ad A C, ita erit quadratum A k ad rectangulum Y A k, ſed vt A G ad A C, ita ponitur quadratum A k ad quadratum A I ergo rectangulum Y A K quadrato A I æquale erit, quod eſt quartum. A

Similiter quoniam ſupra oſtenſa ſunt ſimilia triangula A G H, A C S, erit
1 ſexti vt A G ad A C, ita A H ad A S, ſed vt A H, ad A S, * ita eſt rectangulum, E A H ad rectangulum E A S, eandem enim habent altitudinem E A, ergo
36 tertij vt A G ad A C, ita erit rectangulum E A H; hoc eſt * quadratum A K, ad rectangulum E A S, ſed vt A G ad A C, ita ponitur quadratum A k ad quadratum A I, ergo rectangulũ E A S æquale erit quadrato A I quod eſt quintum.

Poſtremo quoniam parallelæ ſunt k D, x y, erunt anguli A D K, A X Y æquales, & æquales anguli A K D, A Y k, & ideo ſimilia triangula A D K,
17 ſexti A X Y; vt igitur A D ad A k, ita erit A X ad A Y; ſed vt A D ad A K * ita eſt B
36 tertij A K ad A F; rectangulum enim F A D * æquatur quadrato A k, ergo vt A X ad A Y, ita erit A K ad A F; vnde rectangulum F A X ſub extremis, æquale erit rectangulo Y A k ſub medijs, ſed rectangulum Y A K æquale eſt quadrato A I, quarto loco demonſtrauimus, ergo & rectangulum F A X eidem quadrato A I æquale erit, quod poſtremo loco erat oſtendendum.

Corollarium.

Ex demonſtratis patet rectangula Y A k, E A S, F A X æqualia eſſe, oſtenſum eſt enim vnumquodque eorum æquari quadrato A I. C

Problema I I.

Datis duobus ſemicirculis in directum baſes habentibus, inter eorum circumferentias ponere rectam lineam magnitudine datam, quæ ad vnius ſemicirculorum angulum pertingat.

Hoc Problema multos Caſus habet, eoſque omnes in ſecundo libro mei Apollonij Rediuiui in tria capita congeſtos abſolui. nunc octo ex principalibus in exemplum Reſolutionis & Compoſitionis explicabo, omiſſis ijs in quibus dati duo ſemicirculi ſe inuicem ſecant aut tangunt, ij enim Caſus ad illorum ſimilitudinem, & reſoluentur & componentur.

Caſus primus. D

Primum vergant dati duo ſemicirculi ad eandem partem, neutro reliquum includente.

Sint itaque dati duo ſemicirculi a b c, d e f, vt dictum eſt. data autem recta linea G. & ducatur a k contingens ſemicirculum d e f in k; ipſum vero A B C ſecans in t. Oportet inter circumferentias t c, k f ponere rectam lineam æqualem ipſi G, ita vt ad punctum a pertingat. Quamuis autem ex hac ſemicirculorum poſitione duo Caſus oriantur, aut enim po-

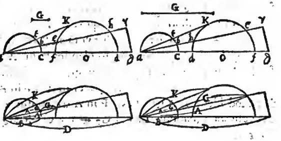
A ponenda eſt illa magnitudine data inter conuexam vtriuſque ſemicirculi circumferentiam, aut inter conuexam vnius, & cauam alterius, tamen vna, eademque reſolutione vtrique ſatisfit.

Reſolutio.

FActum iam ſit ducta nimirum recta a b e habens ſegmentum b e æquale datæ G, & producatur a d in g, vt o g recta ex centro circuli d e f, quod ſit o ſit æqualis o c, & in a e productam ſectamque à circumferentia k d in h ducatur perpendicularis g r, & connectatur c b, eaque eidem a e perpendicularis erit, quoniam angulus a b c in ſemicirculo rectus

B eſt, quare * æquales erunt h r, e b. Lem. 1.

Quoniã igitur datæ ſunt a c, a g, b e, a k prima ſit B, ſecunda D, tertia G, quarta K, vt in figuris ad Reſolutionem pertinētibus deſignatũ eſt, & quæratur a e, ea eſto A: ergo a b erit A -- G, &



C cum ſint anguli a b c, a r g recti, & ideo æquales parallelæ erunt b c, r g, & ob id ſimilia triangula a b c, a r g, quare vt a c, ad a g, ita erit a b ad a r; hoc eſt in figuris Reſolutionis, vt B ad D ita A -- G ad $\frac{D \text{ in } A - D \text{ in } G}{B}$, atque adeo a r erit $\frac{D \text{ in } A - D \text{ in } G}{B}$, à qua ſi auferatur recta h r, cui æqualis eſt e b, reliqua a h erit $\frac{D \text{ in } A - D \text{ in } G}{B} - G$; ſed rectangulum e a h æquale eſt quadrato a K, ergo

$$\frac{D \text{ in } AQ - D \text{ in } G \text{ in } A}{B} - G \text{ in } A \text{ æquabitur } KQ$$

Ducantur omnia in B, vt fractio euaneſcat, ergo

$$D \text{ in } AQ - D \text{ in } G \text{ in } A - B \text{ in } G \text{ in } A \text{ æquabitur } KQ \text{ in } B.$$

Applicentur omnia ad D, vt poteſtas æquationis nempe A Q ex ſe ſubſi-

D ſtat, ergo

$$AQ - G \text{ in } A - \frac{B \text{ in } G \text{ in } A}{D} \text{ æquabitur } \frac{KQ \text{ in } B}{D}$$

Præcipere autem vt omnia ducantur in B, ac deinde producta applicentur ad D, perinde eſt ac ſi dicatur fiat vt D ad B, ita vtraque æqualitatis pars ſeparatim ad alias partes, harum namque partium altera quidem eſſet A Q -- G in A -- $\frac{B \text{ in } G \text{ in } A}{D}$, altera vero $\frac{KQ \text{ in } B}{D}$ eadem nempe partes, quæ ex illa ductione, & applicatione procreantur, nam vtrobique eadem eſt operatio exemplo res fiet illuſtrior.

$$\frac{D \text{ in } AQ - D \text{ in } G \text{ in } A}{B} - G \text{ in } A \text{ æquetur } KQ$$

& fiat vt D ad B ita $\frac{D \text{ in } AQ - D \text{ in } G \text{ in } A}{B} - G$ in A ad alia plana, ea erunt A Q -- G

in

in A -- $\frac{B \text{ in } G \text{ in } A}{D}$ nam A
$\frac{D \text{ in } A Q -- D \text{ in } G \text{ in } A}{B}$ -- G in A ducitur in B, & productum quod eſt D in A Q -- D in G in A -- B in G in A applicatur ad D, ex eaque applicatione oritur A Q -- G in A -- $\frac{B \text{ in } G \text{ in } A}{D}$.

Similiter fiat, vt D ad B, ita K Q ad aliud planum id erit $\frac{k Q \text{ in } B}{D}$ tota igitur hæc progreſſio fit per plana non autem per ſolida, & in eandem inciditur æquationem. Hoc monuimus quoniam in demonſtratione, quæ ordinanda eſt per regreſſum Reſolutionis procedetur per proportionem planorum, non autem per æqualitatem ſolidorum; neque enim opus erit plana in longitudines ducere, ſolidaque ex huiuſmodi ductu facta, ad alias longitudines applicare, vt rurſus ad plana deueniant, cum in æqualitatem eorundem planorum incidatur per proportionem planorum progrediendo. B

Vt autem clarior exiſtat æquatio, faciliuſque explicetur, tranſmutentur fractiones in integras magnitudines nempe $\frac{k Q \text{ in } B}{D}$ eſto Z Q, ſi enim fiat vt D ad B, ita K Q ad aliud quadratum quod ſit Z Q, erit Z Q idem quod $\frac{k Q \text{ in } B}{D}$. Similiter $\frac{B \text{ in } G}{D}$ eſto F: nam ſi fiat vt D ad B, ita G ad aliam, quæ ſit F, erit F eadem quæ $\frac{B \text{ in } g}{D}$, & per conſequens planum F in A idem erit, quod planum $\frac{B \text{ in } g \text{ in } a}{D}$. tranſmutatis itaque in integras magnitudines fractionibus.

A Q -- G in A -- F in A æquabitur Z Q

Seu quod idem eſt A Q -- G + F in A æquabitur z Q;

Et explicata æquatione L. V. (G$\frac{1}{2}$ + F $\frac{1}{2}$ Q + z Q) + G $\frac{1}{2}$ + F $\frac{1}{2}$ æquabitur A. C

Poriſma.

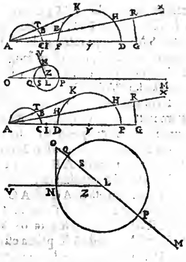
Fiat vt a g ad a c, ita quadratum a k ad aliud quadratum, quod ſit a i, & ita recta G ad aliam rectam, quæ ſit F; deinde rectæ cuius quadratum æquale eſt quadratis a i, & dimidiæ compoſitæ ex G, & F; addita eadem dimidia compoſita, fiet recta æqualis quæſitæ a e.

Datur igitur a e quæſita.

Compoſitio.

Sint dati duo ſemicirculi A B C, D E F, vt dictum eſt, data autem recta linea V z, & contingat A K ſemicirculum D E F in K ſecet vero ipſum A B C in T. Oportet inter circumferentias T C, K F ponere rectam lineam æqualem V z, ita vt ad punctum A pertingat. Duo ſunt Caſus vt in Reſolutione dictum eſt. in primo oportebit datam V z non eſſe maiorem, quàm K T, nec minorem quàm F C. in ſecundo oportebit non eſſe maiorem, quam F C, nec minorem quàm K T. Si quidem data V z ſit æqualis alteri ipſarum k T, F c: factum iam erit quod proponitur, ſi vero maior ſit minore, minor autem maiore producatur A D in D
Probl. 1 huius G, vt y G recta ex centro circuli D E F, quod ſit y, æqualis ſit y c, & fiat

vt



A vt A G ad A C,ita quadratũ A K ad aliud quadratũ quod ſit A I. Similiter fiat vt A G ad A C, ita V Z ad Z L, & V L cõpoſita ex V Z,Z L ſecetur bifariã in N, eiq; ducatur ad rectos angulos N O æqualis ipſi A I,& connectatur O L. quadratum igitur O L æquale eſt quadratis O N , N L, itaq; rectæ O L addenda eſt recta æqualis ipſi L N. ſic Poriſma fieri iubet.

Producatur ergo O L in P,vt ſit L P æqualis L N, & à puncto A ad circumferē-
B tiam k F ducatur A E æqualis O P ſecans circumferentiã T C in B, ipſam autē O P, in primo quidem caſu, maiorē eſſe quàm A F,minorē quàm A K,in ſecundo vero, minorē quàm A F, maiorē quã AK infra demonſtrabitur. Iam facta eſt conſtructio Problematis,prout Poriſma docet. Nunc oſtendendũ eſt B E æqualem eſſe VZ datæ. Producatur A E,vbi opus exigit donec ſecet circumferentiã k D in H,& centro L interuallo L N, vel L P deſcribatur circulus ſecans rectam O P in Q, & ſumatur P S æqualis V Z, reliqua S Q æqualis erit reliquæ Z L.

Et quoniam recta O N tangit circulam in N cum ſit rectus angulus
C O N L ex conſtructione ; quadratum O N * æquale erit rectangulo P O Q, 16 tertij
hoc eſt quadrato O P, minus rectangulo O P Q, ſeu minus rectangulis O P S O P S Q. Siigitur fiat vt A C ad A G,ita vtraq; æqualitatis pars ſeparatim ad alia plana, itidem manebit æqualitas in Reſolutione conuerſo modo factum eſt nempe , vt A G ad A C, ita vtraque æqualitatis pars ſeparatim ad alia plana. At quoniam eſt vt A G ad A C , ita quadratum A K ad quadratum A I ex conſtructione, hoc eſt ad quadratum O N, erit conuertendo, vt A C ad A G, ita quadratum O N ad quadratum A K. quadratum igitur A K erit vna pars æqualitatis, alterum vero ſic explorabimus.

Fiat vt A C ad A G, hoc eſt vt L Z ad Z V, ſeu quod idem eſt, vt Q S ad S P, ita O S ad aliam, quæ ſit S M, ea maior erit, quàm S P, quoniam
D & O S maior eſt, quàm Q S, ſed vt O S ad S M ita * eſt rectangulum P O S, 1 ſexti
ad rectangulum P O, S M, eandem enim habent altitudinem P O, ergo vt A C ad A G, ita erit rectangulum P O S, hoc eſt quadratum O P, minus rectangulo O P S, ad rectangulum P O, S M; ſed vt A C ad A G, hoc eſt vt Q S ad S P, ita * eſt quoque rectangulum O P, S Q ad rectangulum 1 ſexti
O P S : ſunt enim eiuſdem altitudinis O P. ergo vt quadratum O P, minus rectangulo O P S ad rectangulum P O, S M, ita erit rectangulum O P, S Q ad rectangulum O P S, hoc eſt vt totum ad totum ita ablatum ad ablatum, quare & * reliquum ad reliquum erit,vt totum ad totum ideſt & quadra- 19 quinti
tum O P minus rectangulo O P S, ac etiam minus rectangulo O P, S Q

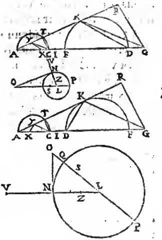
minus

minus rectangulo O P S, erit vt quadratum O P minus rectangulo O P S A
ad rectangulum P O, S M, hoc eſt vt A C ad A G. Rectangulum igitur P O, S M, minus rectangulo O P S, erit altera pars æqualitatis. Itaque quadratum A K, hoc eſt rectangulum E A H, æquale erit rectangulo P O, S M, minus rectangulo O P S, hoc eſt æquale erit rectangulo O P M; ſed æquales ſunt A E, O P, ex conſtructione ergo & A H, P M æquales erunt.

Denique connectatur B C, & ei parallela agatur G R ſecans A E productam in R, angulus igitur, A R G æqualis erit angulo A B C, & ideo rectus
Lem. 1 cum ſit rectus & ipſe A B C in ſemicirculo, quare * æquales erunt E B, H R, & poſita E x æquali A H. vel P M tota B X æqualis erit toti A R, & cum ſint æquales A E, O P, ex conſtructione, & æquales e x P M, tota A X toti O M æqualis erit. B

Et quoniam eſt vt A C ad A G, ita A B ad A R ob ſimilitudinem triangulorum A B C, A R G, & ita O S ad S M, ex conſtructione, erit vt A B ad A R, hoc eſt ad B X, ita o s S M, & componendo vt A X ad X B, ita O M ad M S; ſed A X prima oſtenſa eſt æqualis tertiæ O M, ergo & ſecunda X B æqualis erit M S quartæ, vnde ablatis æqualibus e x P M reliqua E B æqualis erit reliquæ P S, hoc eſt V Z datæ; quod erat oſtendendum. Factum eſt igitur quod oportebat.

Rudis eſt quidem hæc demonſtratio, ſed talem Reſolutio genuit, & nos noſtrum inſtitutum ſecuti, quod eſt à veſtigijs Reſolutionis in Demonſtratione non recedere, ipſam demonſtrationem per orſum reſolutionis texuimus. ſic etiam ſequentium Caſuum demonſtrationes texentur. facile autem eas ex- C
poliet, qui non ea ſe lege adſtrinxerit, vt per veſtigia Reſolutionis omnino regrediatur. quemadmodum neglectis ex parte reſolutionem veſtigijs, demonſtrationes omnium Caſuum huius Problematis in ſecundo libro noſtri Apollonij Rediuiui explicauimus.



At vero rectam O P in primo quidem Caſu maiorem eſſe quam A F, minorem quam A k, in ſecundo vero minorem quam A F, maiorem quam A k ſic demonſtrabimus.

Connectantur G K, K D, eiſque parallelæ agantur C y, y x ſecantes A T, A C in pun-
Lem. 2 ctis y x, erit * igitur vt A G ad A C, ita F C D
ad C X; ſed vt A G ad A C, ita eſt quoque V Z ad Z L ex conſtructione, ergo vt V Z ad Z L, ita erit F C ad c x, & permutando vt V Z ad F C, ita erit Z L ad c x, quare vt V Z ad F C, ita erit quoque V L hoc eſt P Q ad F x, hoc eſt vt vna antecedentium ad vnam conſequentium; ita omnes antecedentes ad omnes conſequentes, ſed V Z in primo quidem Caſu ponitur maior, quam F c, in ſecun-
do

A do vero minor, ergo & p Q in primo Caſu maior erit quam F x, in ſecundo minor.

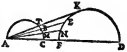
Et quoniam rectangulum F A x * æquale eſt quadrato A I, hoc eſt quadrato O N, ſeu rectangulo P O Q, proportionales erunt P O, F A, A x, O Q, ſed P Q differentia extremarum in primo quidem Caſu oſtenſa eſt maior, quam F x, differentia mediarum, ergo altera * extremarum p O, O Q, nempe ipſa p O maxima erit, & per conſequens maior quàm F A. in ſecundo vero Caſu ipſa P Q oſtenſa eſt minor quam F x, ergo altera * mediarum F A, A x, hoc eſt ipſa A F maxima erit, & per conſequens maior quam O P. (Lem. 3; Theor. 2 huius; Theor. 2 huius)

Deinde connectatur C T, eique parallela agatur G R occurrens A K B continuatæ in R, erit angulus A R G rectus, cum ſit rectus & angulus A T C in ſemicirculo, ac proinde * æquales erunt T K, k R. (Lem. 2)

Et quoniam eſt vt A G ad A C, * ita k T ad T y, & ita quoque V Z ad Z L, ex conſtructione, erit vt V Z ad Z L, ita k T ad T y, & permutando vt V Z ad k T, ita Z L ad T y, & conſequenter ita V L ad k Y, omnes videlicet antecedentes ad omnes conſequentes, ſed V Z, in primo quidem Caſu ponitur minor, quàm K T, in ſecundo vero maior, ergo & V L hoc eſt P Q in primo Caſu minor erit, quam K Y in ſecundo maior. (Lem. 3)

Et quoniam rectangulum y A k * æquale eſt quadrato A I, hoc eſt quadrato O N, ſeu rectangulo P O Q, proportionales erunt y A, Q o, o P, A k, ſed y k differentia extremarum, in primo quidem Caſu oſtenſa eſt ma- C ior, quam p Q differentia mediarum, ergo altera * extremarum y A, A k, nempe ipſa A k maxima erit, & conſequenter maior quam O P: In ſecundo vero Caſu y k oſtenſa eſt minor, quàm P Q ergo altera * mediarum Q O, O p, nempè ipſa p O erit maxima, & per conſequens maior quam A k. Recta igitur O p. in primo quidem Caſu maior eſt quàm A F, minor quàm A K, in ſecundo vero minor, quàm A F, maior quàm A K. quod erat oſtendendum. (Lem. 3; Theor. 2 huius; Theor. 2 huius)

Diximus oportere in primo quidem Caſu datam V Z non eſſe maiorem, quam K T, nec minorem quam F C: in ſecundo vero non eſſe maiorem, quàm F C, nec minorem, quàm K T. Quoniam in primo Caſu k T maxima eſt omnium, quæ ad punctum A pertinentes inter circumferentias D T C, k F interijciuntur: F C miuima: In ſecundo vero maxima eſt F C, minima K T, aliarum autem in vtroque Caſu propinquior minimæ remotiore minor eſt, idque ſic demonſtrabitur.

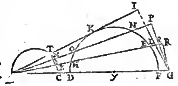


Ducatur vtrumque recta A B E ſecans circumferentias T C, K F in punctis B E. Qnoniam igitur in primo Caſu A K maior eſt, quàm A E, A T autem minor, quàm A B, reliqua T K maior erit, quàm reliqua B E, & ſic demonſtrabitur omnibus alijs maior. Maxima eſt igitur K T.

Similiter quoniam A F minor eſt, quàm A E, A C autem maior quàm A B,

AB, reliqua CF minor erit, quàm reliqua BE: Eademque ratione demonſtrabitur omnibus alijs minor. minima eſt igitur omnium FC. A

Rurſus ducatur alia recta AMN ſecans circumferentias TC, KF in punctis MN, ſitque recta MN minimæ CF propinquior, quàm BE. Quoniam igitur AN minor, eſt quàm AE, AM autem maior quam AB reliqua MN, minor erit quàm reliqua BE. Propinquior igitur minimæ, minor eſt remotiore.



In ſecundo autem Caſu ſumatur ex centro circuli DEF, quod ſit y recta yG æqualis yc, & connectatur CB eique parallela agatur GR ſecans AE productam in R, quàm etiam ſecet circumferentiam kD in H. Angulus igitur ARG æqualis erit angulo ABC, ſed rectus eſt ABC B

Lem. 1 in ſemicirculo ergo & ARG rectus erit, quare* æquales erunt EB, HR; & AG maior erit quam AR, ſed AD minor eſt quam AH, ergo reliqua DG, hoc eſt FC, maior erit quam reliqua HR. & ſic oſtendetur ipſa FC maior omnibus alijs. Maxima eſt igitur FC.

Deinde connectatur CT, & ei parallela agatur GI ſecans Ak productam in I, ipſam vero AR in L, angulus AIG æqualis erit angulo ATC

Lem. 1 & ideo rectus, cum ſit rectus & ipſe ATC in ſemicirculo, quare* æquales TK, KI, & AI minor erit quam AL, & multo minor quam AR, ſed AK maior eſt quàm AH, ergo reliqua KI ſeu kT minor erit, quàm reliqua HR, hoc eſt quam EB, & ſic ipſa KT oſtendetur omnibus alijs minor. Itaque minima eſt KT. C

Poſtremo ducatur alia recta AMN ſecans circumferentias TC, KF in punctis MN, circumferentiam vero kD in O, ſitque recta MN minimæ KT propinquior quam EB, & connectatur CM, cui parallela agatur GP ſecans AN productam in P, ipſam vero AR in Q. angulus igitur APG æqualis erit angulo AMC, & ideo rectus, cum ſit rectus & AMC

Lem. 1 in ſemicirculo, vnde æquales* erunt MN, OP, & AP minor erit quam AQ, & multo minor quam AR, ſed AO maior eſt, quàm AH, ergo reliqua AP ſeu MN, minor erit, quàm reliqua HR. hoc eſt quam BE. Propinquior igitur minimæ minor eſt remotiore. Quare manifeſta eſt Determinatio. D

Caſus Secundus.

Sed vergentibus ad eandem partem datis duobus ſemicirculis, maior includat minorem, & recta ponenda pertineat ad angulum ſemicirculi maioris, à quo quidem angulo ſemicirculus minor plus diſtet, quàm à reliquo.

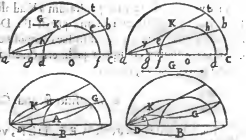
Sint igitur dati duo ſemicirculi abc, def, quales ponuntur, data autem recta linea G, & contingat ak ſemicirculum def in K, ipſum

A ſum vero a b c ſecet in t. Oportet inter circumferentias t c, k f ponere rectam lineam æqualem ipſi G, ita vt ad punctum a pertineat. Hic quoque duplex oritur Caſus, aut enim ponenda eſt data recta inter cauam vnius & conuexam alterius ſemicirculi circumferentiam, aut inter cauam vtriuſque. vnica tamen Reſolutione vtrique caſui ſatisfit.

Reſolutio.

Poſita iam ſit recta linea e b æqualis datæ G, eaque ad punctum a pertineat, quemadmodum Problema exigit, & ex centro circuli d e f, quod ſit o ponatur o g æqualis o c, & recta a e b ſecet circumferentiam k d in h, ipſique a b ducatur perpendicularis g r, & iungatur c b;
B ea quoque eidem a b perpendicularis erit, angulus enim a b c in ſemicirculo rectus eſt vnde * æquales erunt h r, e b. Theor. huius

Quoniam igitur datæ ſunt a c, a g, b e, a K, prima ſit B, ſecunda D, tertia G, quarta K, vt in figuris ad Reſolutionem pertinentibus deſignatum eſt, & quæratur a e, ea eſto A, ergo a b erit A ✣ G, & cum ſint ſimilia triangula a b c, a r g, anguli enim a b c, a r g ſunt æquales, quia recti, & angulus a communis vtrique triangulo, erit vt a c ad a g, ita a b ad a r, hoc eſt in figuris
C reſolutionis, vt B ad D, ita A ✣ G ad $\frac{D \text{ in } A \dagger D \text{ in } G}{B}$, atque adeo a r erit $\frac{D \text{ in } A \dagger D \text{ in } G}{B}$, cui addita r h, quæ æqualis eſt ipſi e b tota a h erit $\frac{D \text{ in } A \dagger D \text{ in } G}{B}$ ✣ G, ſed rectangulum e a h * æquale eſt quadrato A K, ergo 36 tertij



$\frac{D \text{ in } A Q \dagger D \text{ in } G \text{ in } A}{B}$ ✣ G in A æquabitur k Q.

Ducantur omnia in B, vt fractio euaneſcat. ergo

D in A Q † D in G in A † B in G in A æquabitur K Q in B.

Et applicentur omnia ad D, vt Poteſtas æquationis, nempe A Q ex ſe ſubſiſtat. ergo
D
A Q ✣ G in A ✣ $\frac{B \text{ in } G \text{ in } A}{D}$ æquabitur $\frac{K Q \text{ in } B}{D}$.

Ductio hæc, & applicatio vtramq; æqualitatis partẽ trãſmutant in alias partes ibidem æquales, reſolutionemq. ad æquationem ſecundũ artis pręcepta perducunt. idem fieret ſi operatio per proportionẽ inſtitueretur, hoc modo. Fiat vt D ad B, ita vtraq; æqualitatis pars ſeparatim ad alias partes, nam & hæ quidẽ partes æquales erunt eædẽq. quæ ex operatione ductionis, & applicationis procreantur. Hoc monuimus queãdmodũ in antecedẽtis caſus reſolutione factum eſt, quoniã in demonſtratione inſtituenda, regreſſus qui fieri debet reſolutionis veſtigia repetendo, fiet non per æqualitatem ſolidorum, ſed per proportionem

planorum, vt factum eſt in compoſitione antecedentis Caſus, & ne eadem in omnibus Caſibus repetenda ſint, eadem dicta eſſe intelligantur in ſimilibus ſequentium Caſuum locis. A

Sed vt æquatio facilius explicetur, transmutentur fractiones in integras magnitudines, vt in Reſolutione antecedentis Caſus factum eſt: nempe $\frac{KQ \text{ in } B}{D}$ eſto Z Q, nam ſi fiat, vt D ad B, ita K Q ad aliud quadratum quod ſit Z Q, erit Z Q idem quod $\frac{KQ \text{ in } B}{D}$. Similiter $\frac{B \text{ in } G}{D}$ eſto F, nam ſi fiat, vt D ad B, ita G ad alium quæ ſit F, erit F eademque quæ $\frac{B \text{ in } G}{D}$, & ideo planum F in A idem erit quod planum $\frac{B \text{ in } G \text{ in } A}{D}$. Facta igitur tranſmutatione fractionum in integras magnitudines,

A Q + G in A + F in A æquabitur Z Q.

Vel A Q + G + F in A æquabitur Z Q. B

Et explicata æquatione L. V. (G $\frac{1}{2}$ + F quad. + Z Q) − G $\frac{1}{2}$ − F $\frac{1}{2}$ æquabitur A

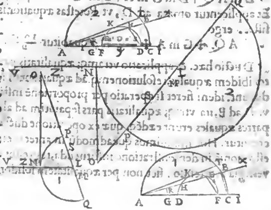
Poriſma.

Fiat vt a g ad a c, ita quadratum a K ad aliud quadratum, quod ſit a i, & ita recta G ad aliam rectam, quæ ſit F. Deinde rectæ, cuius quadratum æquale eſt quadratis a i, & dimidiæ compoſitæ ex G, & F dematur eadem dimidia compoſita, reliqua æqualis erit quæſitæ a e.

Datur ergo a e quæſita. C

Compoſitio ſecundi Caſus.

Sint dati duo ſemicirculi A B C, D E F, vt dictum eſt, data autem recta linea V Z, & contingat A K ſemicirculum D E F in K, ſecet vero alterum A B C in T. Oportet inter circumferentias T C, K F ponere rectam lineam æqualem V Z, ita vt ad punctum A pertingat. Duplex eſt Caſus, vt dictum eſt in Reſolutione. In primo quidem oportebit datam V z non eſſe maiorem quam K T, nec minorem quam F C, in ſecundo vero non eſſe maiorem quã F C nec minorem quam K T.



Siquidem V Z ſit æqualis alteri ipſarum k T, F C, factum iam erit, quod Proponebatur; ſi vero maior ſit minore, minor autem maiore, ponatur ex centro circuli D E F quod ſit y recta y G æqualis y c, & fiat vt A G ad A c, ita quadratum A k ad aliud quadratũ quod D

Digitized by Google

A quod ſit A I. ſimiliter fiat vt A G ad A C, ita V Z ad Z L, & V L compoſita ex V Z, Z L ſecetur bifariam in N, eique ad rectos angulos ducatur N O, quæ ſit æqualis A I, & connectatur O L. Quadratum igitur O L æquale eſt quadratis O N, N L: itaque rectæ O L detrahenda eſt recta æqualis ipſi L N. ſic Poriſma fieri iubet. Centro igitur L intervallo L N deſcribatur circulus ſecans O L in P, ipſamque continuatam in Q. infra demonſtrabimus rectam O P, in primo quidem Caſu minorem eſſe, quàm A F, maiorem quam A K: in ſecundo vero maiorem eſſe, quam A F; minorem quam A K. Itaque poterit à puncto A ad circumferentiam k F duci recta A E æqualis O P. ducatur ergo A E, & producatur donec ſecet circumferentiam T C in B. Facta eſt igitur conſtructio quemadmodum Po-
B riſma docet. Nunc oſtendam E B æqualem eſſe V Z datæ. Producatur A E, vbi res poſtulat ad circumferentiam K D in H, & ſumatur P S æqualis V Z, reliqua S Q æqualis erit reliquæ Z L, eſt enim P Q æqualis V L.

Et quoniam recta O N tangit circulum in N cum ſit rectus angulus O N L ex conſtructione, quadratum O N * æquale erit rectangulo P O Q, hoc eſt quadrato O P, vna cum rectangulo O P Q, ſeu vna cum rectangulis O P S, O P S Q. Si igitur fiat vt A C ad A G, ita vtraque æqualitatis pars ſeparatim ad alia plana, itidem manebit æqualitas. In Reſolutione conuerſo modo factum eſt, nempe vt A G ad A C, ita vtraque æqualitatis pars ad alia plana. *36 tertij*

C At quoniam eſt vt A G ad A C, ita quadratum A K ad quadratum A I, ex conſtructione, hoc eſt ad quadratum O N, erit conuertendo, vt A C ad A G, ita quadratum O N ad quadratum A K, quadratum igitur A k erit vna pars æqualitatis, alteram vero ſic inueniemus. Fiat vt A C ad A G, hoc eſt vt L Z ad Z V, ſeu quod idem eſt, vt Q S ad S P, ita O S ad aliam, quæ ſit S M: vt autem O S ad S M, ita * eſt rectangulum P O S ad rectangulum P O, S M; ſunt enim eiuſdem altitudinis P O, ergo vt A C ad A G, ita erit rectangulum P O S, hoc eſt quadratum O P, plus rectangulo O P S, ad rectangulum P O, S M. *1 ſexti*

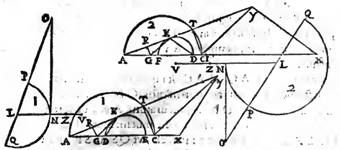
Rurſus vt A C ad A G, hoc eſt vt Q S ad S P, ita eſt rectangulum O P, S Q ad rectangulum O P S, cum ſint eiuſdem altitudinis O P, ergo vt
D quadratum O P, plus rectangulo O P S, ad rectangulum P O, S M, ita erit rectangulum O P, S Q ad rectangulum O P S, & ita quoque * omnes antecedentes ad omnes conſequentes, nempe vt quadratum O P, plus rectangulo O P S ad rectangulum P O, S M, hoc eſt vt A C ad A G, ita quadratum O P vnà cum rectangulis O P S, O P, S Q ad rectangulum P O, S M vna cum rectangulo O P S. Rectangulum igitur P O, S M, vnà cum rectangulo O P S, erit altera pars æqualitatis. Itaque quadratum A k, hoc eſt * rectangulum E A H æquale erit rectangulo P O, S M, vnà cum rectangulo O P S hoc eſt, æquale erit rectangulo O P M, ſed æquales ſunt A E, O P ex conſtructione, ergo & A H, P M æquales erunt. *1 quinti* *36 tertij*

Deniquc connectatur B C, & ei parallela agatur G R ſecans A H in R, A
angulus igitur A R G æqualis erit angulo A B C, & ideo rectus, cum ſit
Lem. 1 rectus & ipſe A B C in ſemicirculo, quare * æquales erunt E B, H R, &
poſita B x æquali A R, tota E x æqualis erit toti A H, vel P M, & cum
ſint æquales A E, O P, ex conſtructione, & æquales e x, P M, tota A x
toti O M æqualis erit.

Et quoniam eſt vt A C ad A G, ita A B ad A R, ob ſimilitudinem triangulorum A B C, A R G, & ita O S ad S M, ex conſtructione, erit vt A B ad A R, hoc eſt ad B x, ita O S ad S M, & componendo vt A x ad x B, ita O M ad M S, ſed prima A x oſtenſa eſt æqualis tertiæ O M, ergo & ſecunda x B æqualis erit M S quartæ, atque ablatis æqualibus x B, M S ab æqualibus e x, P M, reliqua E B reliquæ P S, hoc eſt V Z datæ, æqualis erit, quod erat oſtendendum. Factum eſt igitur quod oportebat. B

At vero rectam O P in, primo quidem Caſu minorem eſſe, quam A F, maiorem quam A K: in ſecundo vero maiorem quàm A F, minorem quam A K, ſic demonſtrabitur.

Connectantur G k, K D, eiſque parallelæ agantur c y, y x ſecantes A T



C

Lem. 3 A C continuatas in punctis y x. erit igitur vt * A G ad A C, ita F C ad C x, ſed vt A G, ad A C, ita eſt quoque V Z ad, Z L, ex conſtructione, ergo vt V Z ad Z L, ita erit F C, ad C x, & permutando vt V Z ad F C, ita erit Z L ad c x, quare & * ita omnes antecedentes ad omnes conſequentes, hoc eſt ita V L, vel P Q ad F x. ſed V Z in primo caſu ponitur maior, quam F C: in ſecundo minor, ergo & P Q in primo Caſu maior erit quam F x, in ſecundo minor. D

12 quinti

Lem 5. Et quoniam rectangulum F A x * æquale eſt quadrato A I, hoc eſt quadrato O N, ſeu * rectangulo P O Q, * proportionales erunt P O, F A, A x, O Q, ſed P Q differentia extremarum, in primo quidem Caſu oſtenſa eſt maior, quam F x differentia mediarum, ergo altera * extremarum P O, O Q, nempe ipſa P O minima erit, & per conſequens minor quam A F. In ſecundo vero Caſu ipſa P Q oſtenſa eſt minor, quàm F x, ergo altera * mediarum F A, A x, hoc eſt ipſa A F, minima erit, & conſequenter minor quam O P.

36 tertij, 16 ſexti, Theor. 8 huius, Theor. 8 huius

Iam connectatur C T, eique parallela agatur G R ſecans A K in R,

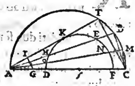
erit

A erit angulus A R G æqualis angulo A T C, & ideo rectus, cum ſit rectus
& angulus A T C in ſemicirculo quare* æquales erunt T k, k R. Lem. 3.
Et quoniam eſt vt A G ad, A C, * ita k T ad T y, & ita quoque V Z ad Lem. 1.
Z L, ex conſtructione, erit, vt V Z ad Z L ita k T ad T y, & permutando
vt V Z ad k T, ita erit Z L ad T y, & conſequenter ita* quoque V L ad 12 quinti
K y, omnes videlicet antecedentes ad omnes conſequentes, & rurſus con-
uertendo vt V Z ad V L, ita k T ad k y ſed V Z in primo caſu ponitur
minor, quam k T, in ſecundo maior, ergo, & V L, hoc eſt P Q in primo
Caſu minor erit, quam K y, in ſecundo maior.

Poſtremo quoniam rectangulum y A K* æquale eſt quadrato A I, hoc Lem. 3
eſt quadrato O N ſeu* rectangulo Q o P, proportionales erunt y A, Q o 36 tertij
B o P, A K, ſed y K differentia extremarum. in primo quidem Caſu oſtenſa
eſt maior, quàm P Q differentia mediarum, ergo altera* extremarum y A, Theor. 2 huius
A k nempe ipſa A K minima erit, & conſequenter minor, quam O P. In
ſecundo vero Caſu y k oſtenſa eſt minor, quàm P Q, ergo altera* media- Theor. 2 huius
rum Q O, o P, nempe, ipſa O P minima erit, & per conſequens minor
quàm A k. Recta igitur O P in primo Caſu minor eſt, quàm A F, ma-
ior quam A k, in ſecundo minor quàm A K, maior quàm A F. quod
erat oſtendendum.

Diximus oportere in primo quidem Caſu datam V Z non eſſe maiorem,
quàm k T, nec minorẽ, quam F C, in ſecundo vero non eſſe maiorem, quàm
F C, nec minorem, quam k T, nam in primo Caſu k T maxima eſt om-
C nium quæ ad punctum A pertinentes inter circumferentias T C, k F inter-
ijciuntur, F C minima. In ſecundo autem maxima eſt F C, minima k T.
aliarum autem propinquior minimæ, remotiore minor eſt. idque ſic de-
monſtrabitur.

In primo Caſu ducatur vtrumque recta A E B ſecans circumferentias K F,
T C in punctis E B, circumferentiam vero K D
in H, & ex centro circuli D E F, quod ſit y ſu-
matur y G æqualis y c, & connectantur C B,
C T, eiſque parallelæ agantur G R, G I, quarum
G R ſecet rectam A B in R, altera vero G I ſecet
vtramque A B, A T in punctis Q I. Æquales



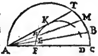
D igitur erunt anguli A T C, A I G, & æquales quoque anguli A B C, A R G
ſed recti ſunt A T C, A B C in ſemicirculo, ergo & anguli A I G, A R G
recti erunt, ac proinde* æquales IK, KT, &* æquales R H, E B. Et quoniam Lem. 2
A k maior eſt, quàm A H, A I autem minor, quàm A Q, & multo minor
quam A R, reliqua I K maior erit, quàm reliqua R H, hoc eſt K T, maior
quam E B & ſic ipſa K T oſtendetur omnibus alijs maior. Maxima eſt igi-
tur K T.

Æque quoniam A D minor eſt, quàm A H, A G autem maior quàm
A R reliqua G D minor erit, quàm reliqua R H, hoc eſt F C minor, quàm
E B. Minima eſt igitur F C.

Sed ducatur alia recta A N M ſecans circumferentias K F, T C in punctis N M; circumferentiam vero k D in O, ſitque N M ipſi F C propinquior, quàm E B, & connectatur C M, cui parallela agatur G P ſecans rectam A M in P, quam etiam ſecet G R in L. angulus igitur A P G æqualis erit angulo A M C, ſed rectus eſt A M C in ſemicirculo, ergo & A P G rectus erit, ac proinde* æquales erunt P O, N M. Et quoniam A O minor eſt, quàm A H, ipſa autem A L maior, quàm A R, & A P multo maior, ergo reliqua P O hoc eſt N M minor erit, quàm reliqua R H, hoc eſt quàm E B. Propinquior igitur minimæ minor eſt remotiore. A

Lem. 1

In ſecundo autem Caſu ducatur recta A E B ſecans circumferentias k F, T C in punctis E B. Quoniam igitur A C maior eſt, quàm A B, A F autem minor, quàm A E, reliqua F C maior erit, quàm reliqua E B. Maxima eſt igitur omnium F C. B



Similiter quoniam A T minor, eſt quàm A B; A K autem maior, quàm A E reliqua K T minor erit, quàm reliqua E B. Minima eſt igitur omnium k T.

Poſtremò ducatur alia recta A N M ſecans circumferentias k F, T C in punctis N M, & ſit N M ipſi k T propinquior, quàm E B. Quoniam igitur A M minor eſt, quàm A B, & A N maior, quàm A E, reliqua N M minor erit, quàm reliqua E B, hoc eſt propinquior minimæ minor remotiore. Quare manifeſta eſt determinatio. C

Caſus Tertius.

RVrſus vergant ad eamdem partem dati duo ſemicirculi, maior minorem includens, & recta ponenda pertineat ad angulum ſemicirculi maioris, ſed ab eo angulo ſemicirculus minor minus diſtet, quàm à reliquo.

Sint igitur dati duo ſemicirculi a b c, d e f, quales ponuntur; data autem recta linea G, & ducatur A K contingens ſemicirculum d e f in K; ipſum vero a b c ſecans in t. Oportet inter circumferentias t c, K f ponere rectam lineam æqualem ipſi G, ita vt ad punctum a pertineat. Et hic Caſus in duos alios Caſus diuiditur, aut enim ponenda eſt ea recta inter cauam circumferentiam vnius ſemicirculi, & conuexam alterius, aut inter cauas vtriuſque, tamen vterque vno eodemque modo reſoluitur. D

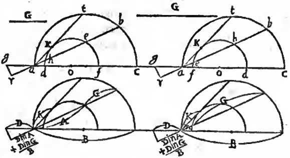
Reſolutio.

SIt iam poſita recta linea e b æqualis datæ G, vt Problema exigit, & ex centro circuli d e f, quod ſit O, ponatur O g æqualis o c, & recta a e b ſecet circumferentiam K d in h, & ducatur g r perpendicularis ad b a productam, & connectatur c b. angulus igitur a b c in ſemicirculo rectus eſt, ac proinde h r *æqualis e b.

Lem. 1

Quo-

A Quoniam igitur datæ ſunt a c, a g, b e, a k. prima ſit B, ſecunda D, tertia G, quarta K, vt in figuris ad Reſolutionem pertinentibus deſignatũ eſt, & quæratur a c. eſtò illa A, ergo recta A B erit A + G, & cùm ſint ſimilia triangula a b c, a r g, anguli enim a b c,
B a r g ſunt recti, &



ideo æquales, & æquales quoque anguli ad a, quia ſunt ad verticem, erit vt a c ad a g ita a b ad a r, hoc eſt in figuris ad reſolutionem pertinentibus, vt B ad D, ita A + G ad $\frac{D \text{ in } A + D \text{ in } G}{B}$, atque adeo a r erit $\frac{D \text{ in } A + D \text{ in } G}{B}$, quæ ſi auferatur à recta r h æquali ipſi e b, remanebit a h, itaque a h erit G -- $\frac{D \text{ in } A + D \text{ in } G}{B}$, ſed rectangulum e a h* æquale eſt quadrato A k, ergo 16 ſexti

$$G \text{ in } A -- \frac{D \text{ in } A Q + D \text{ in } G \text{ in } A}{B} \text{ æquabitur } k Q$$

Ducantur omnia in B, vt fractio euaneſcat, ergo

$$B \text{ in } G \text{ in } A -- D \text{ in } G \text{ in } A -- D \text{ in } A Q \text{ æquabitur } K Q \text{ in } B$$

G in A -- $\frac{D \text{ in } A Q + D \text{ in } G \text{ in } A}{B}$ ducto in B alicui videbitur productum debere eſſe B
C in G in A -- D in A Q + D in G in A (non autem vt nos expoſuimus) quod verum non eſt; nam cum à G in A auferenda ſit tota fractio $\frac{D \text{ in } A Q + D \text{ in } G \text{ in } A}{B}$ à producto quoque B in G in A auferri debet totum productum fractionis, quod eſt D in A Q + D in G in A. Itaque G in A -- $\frac{D \text{ in } A Q + D \text{ in } G \text{ in } A}{B}$ ducto in B, productum erit B in G in A -- D in A Q -- D in G in A, quod animaduertiſſe fuerit operæ pretium.

Denique applicentur omnia ad D, vt A Q, Poteſtas nempe æquationis ex ſe ſubſiſtat, ergo

$$\frac{B \text{ in } G \text{ in } A}{D} -- G \text{ in } A -- A Q \text{ æquabitur } \frac{k Q \text{ in } B}{D}$$

Ea, quæ de huiuſmodi ductione, & applicatione in Reſolutionibus duorum præcedentium Caſuum in ſimili loco dicta ſunt, hic quoque dicta eſſe intel-
D ligantur ob rationes ibidem allatas.

Sed vt æquatio facilius explicetur, tranſmutentur fractiones in integras magnitudines, vt in Reſolutionibus præcedentium Caſuum factum eſt, hoc eſt fiat vt D ad B, ita K Q ad aliud quadratum, quod ſit Z Q, erit Z Q idem quod $\frac{k Q \text{ in } B}{D}$. Similiter fiat vt D ad B, ita G ad aliam, quæ ſit F, erit F eadem quæ $\frac{B \text{ in } G}{D}$, atque adeo planum F in A idem erit, quod planũ $\frac{B \text{ in } G \text{ in } A}{D}$ facta igitur tranſmutatione.

$$F \text{ in } A --- G \text{ in } A --- A Q \text{ æquabitur } Z Q$$

Vel F -- G in A -- A Q æquabitur Z Q

Et explicata æquatione $F \frac{1}{2} G \frac{1}{2}$ -- L. V. ($F \frac{1}{2}$ -- $G \frac{1}{2}$ Q -- Z Q) æquabitur A

Vel

Vel $F\frac{1}{2} - G\frac{1}{2} + L.V.(F\frac{1}{2} - G\frac{1}{2}Q - ZQ)$ æquabitur A A

In hac æquatione A explicabilis eſt de duobus terminis, quorum non ſemper vterque indicat a e quæſitam, ſed alter tantum, interdum minor, interdum maior, ſed quo Caſu terminus minor indicet ipſam quæſitam, quoue terminus maior, quoue etiam vterque ſuo loco dicetur.

Poriſma.

Fiat vt a g ad a c, ita quadratum a k ad aliud quadratum, quod ſit a i, & ita recta G ad aliam rectam, quæ ſit F, deinde dimidiæ differentiæ, qua F ſuperat ipſam G, dempta recta, cuius quadratum æquale eſt exceſſui, quo quadratum eiuſdem dimidiæ differentiæ ſuperat quadratum a i, reliqua erit terminus minor. B

Vel eidem dimidiæ differentiæ addita eadem recta fiet terminus maior.

Scholium.

Ex Poriſmate apparet dimidiam differentiam, qua F ſuperat G, non eſſe minorem recta a i, eo quod quadratum ipſius dimidiæ differentiæ non eſt minus, quadrato a i, & licet in Poriſmate appareat ipſum quadratum a i ſuperari à quadrato dimidiæ differentiæ, non tamen poteſt dici abſolute, quadratum dimidiæ differentiæ maius eſſe quadrato a i, affirmari autem debet non eſſe minus; nam quadratum dimidiæ differentiæ nonnumquam præſtat quadrato a i nihilo, idque contingit cum ratio a d ad a f, non eſt maior ratione a g, ad a c, & præterea data G, expoſita eſt æqualis minimæ C earum, quæ inter circumferentias K f, t c interijciuntur, immo ſi ipſa G exponeretur minor minima, ſequeretur dimidiam differentiam rectarum F, & G, minorem fieri rectam a i, quod quidem aduerſus conſtructionem Problematis, inſtaret; nam cum in circulo, cuius diameter æqualis eſt ipſi dimidiæ differentiæ, aptanda ſit ex præcepto Poriſmatis recta æqualis a i, id fieri non poſſet, ſi ipſa dimidia differentia minor eſſet quam a i. Similiter ſi ratio a d ad a f maior eſſet, ratione a g ad a c, & recta G exponeretur minor minima, ſequeretur aut dimidiam differentiam rectarum F & G minorem fieri recta a i, quod quidem conſtructionem Problematis eadem ratione impediret, aut terminum indicantem quæſitam a e maiorem fieri recta a f, quod pariter conſtructioni, ſed alia ratione, aduerſaretur; nam à puncto a ad circumferentiam k f non poſſet duci recta æqualis D ipſi termino, vt Poriſma fieri præcipit, ſi ipſe terminus maior eſſet, quàm a f. Similis quoque inſtantia conſtructioni occurreret, ſi data G exponeretur maior maxima, ſiue ratio a d ad a f, maior ſit ratione a g ad a c, ſiue non maior: nam terminus indicans a e quæſitam fieret, vel minor minore rectarum a K, a f, vel maior maiore: Itaque à puncto a ad circumferentiam K f, non poſſet duci recta æqualis ipſi termino, vt Poriſma fieri iubet. Hæc omnia ſuis locis demonſtrabuntur. Ad deſtruendas igitur huiuſmodi inſtantias præfigi debet Problemati Determinatio, ne data G maximam

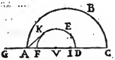
A ximam ſuperet, neue à minima ſuperetur. Itaque oſtendendum eſt, quæ ſit maxima, quæue minima, ſed quo clarius, atque facilius id fiat prius ſequens Lemma demonſtrabo.

Lemma IV.

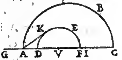
Sint duo ſemicirculi A B C, D E F, quales in præſenti Caſu ponuntur, & contingat recta A K ſemicirculum D E F in K, & ex centro circuli, quod ſit V ponatur V G æqualis V C, & * fiat vt A G ad A C, ita quadratum A K ad quadratum A I. Dico ſi ratio A D ad A F maior eſt ratione A G ad A C, & rectam A I maiorem eſſe maiore rectarum A F, A k, & ſi æqualis æqualem, & ſi minor minorem, maiorem autem minore. Probl. 1 huius

B

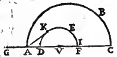
Sit primum ratio A D ad A F maior ratione A G ad A C, ergo duo ſunt Caſus, aut enim F C intercepta eſt inter conuexam vnius ſemicirculi circumferentiam, & cauam alterius, aut inter cauam vtriuſque. ſit primum intercepta inter vtriuſq; cauam, erit A K maior, quàm A F. Quoniam igitur eſt vt A G ad A C, minor nempe ad maiorem, ita quadratum A k ad quadratum A I ex poſitione, erit quadratum A k, minus quadrato A I, vnde & recta A k minor, quam recta A I. Recta igitur A I maior eſt maiore rectarum A F, A k.



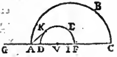
Deinde ſit F C intercepta inter conuexam circumferentiam, & cauam erit A F maior, quàm A k, & quoniam ratio A D ad A F ponitur maior
C ratione A G ad A C vt autem A G, A C, ita eſt quadratum A K ad quadratum A I, ergo ratio A D ad A F maior erit ratione quadrati A k ad quadratum A I, ſed vt A D ad A F prima videlicet trium proportionalium A D, A K, A F ad tertiam, ita eſt quadratum ſecundæ A k ad quadratum A F tertiæ, ergo ratio quadrati A k ad quadratum A F maior erit, ratione quadrati A k ad quadratum A I; quare quadratum A I * maius erit quadrato A F, & conſequenter recta A I maior, quam recta A F, quod primum. 10 quinti



Sed ſit ratio A D ad A F eadem, quæ A G ad
D A C, ergo eadem erit, quæ quadrati A k ad quadratum A I, ſed vt A D ad A F, ita eſt quadratum A K ad quadratum A F, vt demonſtrauimus ergo quadratum A I quadrato A F æquale erit, quare & recta A I, æqualis rectæ A F, quod eſt ſecundum.



Denique ſit ratio A D ad A F minor ratione A G ad A C, ergo minor erit & ratione quadrati A k ad quadratum A I; ſed vt A D ad A F, ita oſtenſum eſt quadratum A k ad quadratum A F, ergo ratio quoque quadrati A K ad quadratum A F



mi-

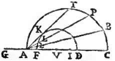
19 quinti minor erit ratione quadrati A k ad quadratum A I, quare * quadratum A I minus erit, quadrato A F, & conſequenter recta A I minor, quàm recta A F; quod eſt tertium. A

Et quoniam eſt vt A G ad A C ita quadratum A k ad quadratum A I, A G autem minor, quàm A C erit & quadratum A k minus quadrato A I, quare & recta A K minor, quàm recta A I; recta igitur A I maior eſt minore rectarum A F, A k, quod vltimo loco erat oſtendendum.

Lemma V.

Iiſdem poſitis ſit ratio A D ad A F non minor ratione A G ad A C. Dico F C maximam eſſe omnium quæ à puncto A ductæ inter cauas circumferentias k F, T C interijciuntur, minimam k T, earum vero quæ inter conuexam circumferentiam K F, & cauam T C interijciuntur, maximam eſſe K T, minimam F C. Aliarum autem propinquiorem minimæ remotiore maiorem eſſe. B

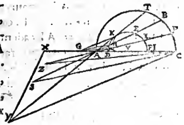
Dvcantur enim vtrumque recta linea A E B ſecans circumferentias K F, T C in punctis E B, & ſit primum F C interiecta inter cauas circumferentias K F, T C. Quoniam igitur A C maior eſt, quàm A B, A F autem minor, quàm A E, reliqua F C maior erit, quam reliqua E B, & ſic oſtendetur omnibus alijs maior. Maxima eſt igitur F C. C



Æque quoniam A T minor eſt, quàm A B ex vero maior quam A E reliqua K T minor erit, quàm reliqua E B, atque eadem ratione oſtendetur omnibus alijs minor. Minima eſt igitur K T.

Rurſus ducatur alia recta A L P ſecans circumferentias k F, T C in punctis L P, & ſit L P minimæ K T propinquior, quam E B erit igitur A P, minor, quam A B, ſed A L maior eſt quam A E, ergo reliqua L P minor erit, quam reliqua E B, nempe propinquior minimæ minor remotiore.

Sed ſit F C interiecta inter cauam circumferentiam T C, & conuexam K F, & connectantur G k, k D, eiſque parallelæ agantur c y, y x ſecantes T A, C A productas in punctis y x; erit igitur re- D



Lem. 3 ctangulum F A x * æquale quadrato A I, & recta A I, ex antecedente Lemmate, non minor quam A F; quare neque A x minor erit ipſa A F, alioquin rectangulum F A x minus eſſet quadrato A I.

Corol. Lem. 3 16 ſexti Et quoniam rectangulum F A x * æquale eſt rectangulo y A K * erit vt A K ad A F, ita A x ad A y, ſed A k minor eſt, quàm A F, ergo & A x minor erit quam A y, ſed A x oſtenſa eſt non minor quàm A F, ergo &

A F

A A E minor erit quam A y, atque A K multo minor. quare A y maxima erit quatuor proportionalium A K, A F, A x, A y; minima vero A K, atque adeo y k compoſita ex maxima, & minima * maior, quàm x F compoſita ex reliquis. 25 quinti

Et quoniam eſt * vt A G ad A C, ita k T ad T y, & ita F G ad ç x; Lem. 3 erit vt k T ad T y, ita F G ad ç x, & conuertendo vt y T ad T k, ita x ç ad ç F, & diuidendo vt y k ad k T, ita x F ad F ç; ſed y k prima oſtenſa eſt maior, quàm x F tertia, ergo & ſecunda k T maior erit, quàm F ç quarta.

Secet autem recta E B circumferentiam k D in H, & iungatur G H, cui parallela agatur C S occurrens B A continuatæ in S. rectangulum igi-
B tur y A K * æquale erit rectangulo S A E; quare vt * A k ad A E, ita erit A S ad A I, ſed A K minor eſt, quàm A E, ergo & A S minor erit quam A y, eſt autem & A F minor quam A y, vt demonſtrauimus, ergo A E multo minor erit, atque A K multo minor. quare A y maxima erit quatuor proportionalium A k, A E, A S, A y, minima vero A k, atque adeo y k compoſita ex maxima, & minima maior erit quam S e compoſita ex reliquis. Corol. Lem. 1 16 ſexti 25 quinti

Et quoniam eſt vt A G ad A C, ita E B ad B S, & ita k T ad T y, Lem. 3 erit vt K T ad T y, ita E B ad B S, & conuertendo vt y T ad T k, ita S B ad B E, & diuidendo, vt y k ad K T, ita S e ad e B; ſed y k oſtenſa eſt maior, quam S e, ergo & K T maior erit, quàm e B. Atque eadem ratione oſtenderetur ipſa K T omnibus alijs maior. Maxima eſt igitur k T.

C Deinde quoniam * æqualia ſunt rectangula E A x, & I A S, erit vt * E A ad A F, ita A x ad A S, ſed A E minor eſt, quàm A F, ergo & A x minor erit, quam A S. ſed A x oſtenſa eſt minor quàm A y, ergo & A F minor erit, quam A S, atque A E multo minor. itaque A S maxima erit quatuor proportionalium A E, A F, A X, A S, minima vero A E, atque adeo S e compoſita ex maxima, & minima maior erit quàm x F compoſita ex reliquis. Corol. Lem. 3 16 ſexti 25 quinti

Et quoniam eſt vt A G ad A C, ita E B ad B S, & ita F C ad ç x, Lem. 3 erit F ç ad ç x, vt E B ad B S; & conuertendo vt x ç ad ç F, ita S B ad B E, & diuidendo vt x F ad F ç, ita S e ad e B; ſed x F oſtenſa eſt minor, quàm S e, ergo & F ç minor erit, quàm E B; atque * demonſtrabitur
D omnibus alijs minor. Minima eſt igitur F ç.

Sed ducatur alia recta A L P ſecans circumferentias k F, T ç in punctis L P, circumferentiam vero K D in Q, & ſit L P minimæ F ç propinquior, quàm E B, & connectatur G Q, cui parallela agatur c Z occurrens P A continuatæ in Z. rectangula igitur L A Z, E A S æqualia erunt, quare vt A E ad A L, ita erit A S ad A Z, ſed A L maior eſt, quàm A E, ergo & A S maior erit, quam A Z. Et quoniam rectangulum E A S * æquale eſt quadrato A I, erit vt A E ad A I, erit * vt A E ad A I, ita A I ad A S, ſed A E minor eſt, quàm A I, cum ipſa A I non ſit * minor, quàm A F, ergo & A I minor erit, quam A S. Itaque ipſa A S maior Corol. Lem. 3 16 ſexti Lem. 1 17 ſexti Lem. 4

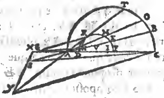
erit,

erit, quàm A L, & multo maior, quàm A E, eſt quoque maior quàm A
A Z vt demonſtrauimus, ergo ipſa A S maxima erit quatuor proportiona-
Theor. 1 huius lium A L, A E, Aſ, A Z, & *conſequenter A E minima, vnde S E com-
21 quinti poſita ex maxima, & minima, *maior erit quam Z L compoſita ex reli-
quis; hoc eſt Z L minor quam S E.

Lem. 1 Et quoniam eſt vt A G ad A C, *ita E B ad B S, & ita *L P ad P Z, erit vt L P ad P Z, ita E B ad B S, & conuertendo vt Z P ad P L, ita S B ad B E, & diuidendo vt Z L ad L P, ita S E ad E B, ſed Z L oſtenſa eſt minor, quàm S e, ergo & L P minor erit, quàm e B, propinquior igitur minimæ minor eſt remotiore. Quare conſtat propoſitum.

Lemma VI. B

Rurſus iiſdem poſitis. ſit autem ratio A D ad A F minor ratione A G ad
Lem. 4 A C, ergo A I* minor erit, quàm A F, maior autem, quàm A k. à puncto igitur A ad circumferentiam K F, ducatur A M æqualis A I, & producatur ad circumferentiam T C in O. Dico maiorem rectarum K T, F C maximam eſſe omnium, quæ à puncto A ductæ inter circumferentias K F, T c interijciuntur. Minimam vero M O. Aliarum autem propinquiorem minimæ, remotiore, ex eadem parte, minorem eſſe.



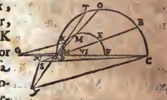
Ducatur enim à puncto A vtrumque recta linea A E B ſecans circumferentias K F, T C in punctis E B; circumferentiam vero k D in H, & connectatur G H, G K, k D, quibus parallelæ ducantur c S, c y, y x ſecantes E A, K A, F A productas in punctis S y x, & ſit primum K T maior, quàm F C. quoniam C
igitur eſt* vt A G ad A C, ita F C ad c x, &* ita K T ad T y; erit K T ad T y, vt F C, ad c x; & diuidendo, erit T k ad k y, vt c F ad F x;
14 quinti ſed k T ponitur maior, quàm F C. ergo & k y quam F x* maior erit.
Corol. Lem. 3 16 ſexti Et quoniam *æqualia ſunt rectangula y A K, F A x: erit vt* A y ad A F, ita A x ad A k: ſed k y compoſita ex extremis A y, A K, oſtenſa D
Theor. 2 huius eſt maior, quàm F x, compoſita ex medijs, ergo altera* extremarum A y, A k, maxima erit altera minima: ſed A K non eſt maxima, quia minor eſt, quàm A F, ergo minima erit, & conſequenter A y maxima. Itaque
Corol. Lem. 3 16 ſexti A y maior erit, quàm A F, & multo maior, quàm A E: Et quoniam* æqualia ſunt rectangula y A K, E A S, erit* vt A k ad A E, ita A S ad A y: ſed A k minor eſt, quàm A E, ergo & A S minor erit, quàm A y. Cum igitur A y maior ſit, quàm A S, & maior, quàm A E, vt demonſtraui, ac etiam maior, quam A k, erit ipſa A y maxima quatuor pro-
Theor. 2 huius portionalium A k, AE, A S, A y; *minima vero A k, vnde y k com-

po-

A poſita ex maxima, & minima, * maior erit quàm S e compoſita ex reliquis.

Et quoniam eſt, vt A G ad A C, * ita E B ad B S, & * ita k T ad T y, erit K T ad T y, vt E B ad BS, & conuertendo, vt y T ad T k, ita S B ad B E: & diuidendo, vt y k ad k T, ita S e ad E B, ſed y k oſtenſa eſt maior, quàm S e, ergo & k T quàm E B maior erit, & ſic demonſtrabitur omnibus alijs maior. Maxima eſt igitur K T. Lem. 1

Sed ſit F C maior, quàm K T: quoniam igitur eſt vt A G ad A C, * ita Fc ad C x, & * ita k T ad T y; erit F c ad C x, vt k T ad T y: & diuidendo, vt c F ad F x, ita erit T K ad K y, ſed c F ponitur maior, Lem. 1

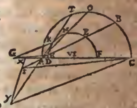


B quàm T K, ergo & F x maior erit, quàm K y, ſed F x compoſita eſt ex extremis quatuor proportionalium A F, A y, A k, A x, ipſa vero k y ex medijs (conſtat autem eos proportionales eſſe, ex eo quod * æqualia ſunt rectangula F A X, y A k) ergo altera * extremarum A F, A X maxima erit, altera minima: ſed A F non eſt minima, cum ſit maior, quàm A k, ergo maxima erit: vnde A X minima: itaque A X minor erit quàm A K, & multo minor, quàm A E. Lem. 1 Theor. 8 huius

Et quoniam æqualia ſunt rectangula F A X, E A S, erit vt A F ad A E, C maior nempe ad minorem, ita A S ad A X, quare & A S maior erit, quàm A X: ſed A X oſtenſa eſt minor, quàm A E, & conſequenter multo minor eſt, quàm A F, ergo quatuor proportionalium A F, A E, A S, A X minima erit A X: * quare A F maxima, vnde X F compoſita ex maxima, & minima, * maior erit, quàm S e compoſita ex reliquis. Theor. 8 huius

Et quoniam eſt, vt A G ad A C, * ita F c ad c x, & ita E B ad B S, erit F c ad c x vt E B ad BS, & conuertendo, vt x c ad c F, ita erit S B ad B E, & diuidendo vt x F ad F c, ita S e ad E b; ſed x F oſtenſa eſt maior, quàm S e; ergo & F c, quàm E B maior erit. eademq. ratione oſtendetur maior omnibus alijs. quare maxima eſt F c. Lem. 1

Sed ſint æquales K T, F c: quoniam igitur eſt D vt AG ad AC, * ita F c ad c x, & * ita K T ad T y; erit F c ad c x, vt k T ad T y: ſed F c ponitur æqualis K T, ergo & c x æqualis erit T y; quare ablatis æqualibus F C, K T, reliquæ x F, y k, æquales erunt: ſed x F compoſita eſt ex extremis quatuor proportionalium F A, A y, A k, A x, ipſa vero y k ex medijs, conſtat autem eas * proportionales eſſe ex eo, quod * rectangula F A x, y A k ſunt æqualia; ergo * maior extrema maiori mediæ, minor minori æqualis erit. itaque A F extrema æqualis erit alteri mediarum y A, A k; ſed non eſt æqualis ipſi A K; Lem. 1



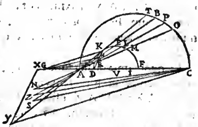
O hæc

hæc enim tangit circulum DEF; illa vero ſecat; ergo ipſa AF æqualis A erit Ay.

Et quoniam * æqualia ſunt rectangula yAk, EAS; erit Ay ad AE, Corol. lem. 1 vt AS ad AK; ſed Ay, cum ſit æqualis ipſi AF, maior eſt, quam AE, ergo & AS maior erit, quam Ak, vnde quatuor proportionalium Ay, Theor. 2 huius AE, AS, AK, minima erit AK; & per * conſequens maxima Ay, 25 quinti itaque yK compoſita ex maxima, & minima * & maior erit, quàm Se compoſita ex reliquis.

Poſtremo quoniam eſt vt AG ad AC, ita EB ad BS & ita kT ad Ty; erit kT ad Ty, vt EB ad BS: & conuertendo, vt yT ad TK, ita SB ad Be: & diuidendo, vt yk ad kT, ita erit Se ad eB; ſed yk oſtenſa eſt maior quam Se, ergo & KT maior erit, quam eB. B

Atque eadem ratione oſtendetur maior omnibus alijs. quare & FC, cum ſit æqualis ipſi kT, erit quoque omnibus maior: itaque vtraque maxima erit. Maior igitur rectarum KT, FC, maxima eſt omnium, quæ ad punctum A pertinent, & inter circumferentias KF, TC interijciuntur. quod eſt primum.



Deinde ſecet recta AM circumferentiam kD in R, & iungatur GR, eique parallela agatur CN ſecans MA productam in N. Rectangulum igi- Lem. 5 tur MAN * æquale erit quadrato AI; hoc eſt quadrato AM ſunt enim æquales AI, AM, ex conſtructione, quare AM æqualis erit ipſi AN. & cum C ſit rectangulum FAx * æquale qua- Lem. 9 17 ſexti drato AI, hoc eſt quadrato AM, * proportionales erunt AF, AM, Ax ſunt autem & inæqualis, quia AF maior eſt, quàm AM, ergo xF compoſita ex extremis, maior erit quàm dupla media, hoc eſt, quam MN. Et Lem. 5 quoniam eſt, vt AG ad AC, * ita FC ad Cx, & * ita MO ad ON; erit FC ad Cx, vt MO ad ON: & conuertendo, vt xc ad CF, ita NO ad OM: & diuidendo, vt xF ad FC, ita erit NM ad MO; ſed xF oſtenſa eſt maior, quàm NM, ergo & FC maior erit, quàm MO.

Lem. 9 17 ſexti Æque quoniam rectangulum yAk * æquale eſt quadrato AI, hoc eſt D quadrato AM, * proportionales erunt Ak, AM, Ay: ſunt autem & inæquales; yk compoſita ex extremis maior erit, quàm MN, media videlicet du- Lem. 8 pla. Et quoniam eſt, vt AG ad AC, * ita kT ad Ty, & * ita MO ad ON: erit KT ad Ty, vt MO ad ON, & conuertendo vt yT ad Tk, ita NO ad OM, & diuidendo, vt yK ad kT, ita erit NM ad MO: ſed yk oſtenſa eſt maior, quam NM, ergo & kT maior erit, quàm MO.

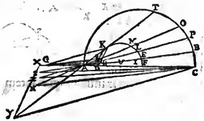
Lem. 9 17 ſexti Eadem ratione quoniam rectangulum EAS * æquale eſt quadrato AI, hoc eſt quadrato AM, * proportionales erunt Ae, AM, AS, ſunt autem & inæquales. ergo SE, compoſita ex extremis, maior erit quàm

dupla

Digitized by Google

A dupla media; hoc eſt, quàm NM. Et quoniam eſt vt AG ad AC, * ita Lem. 3
EB ad BS, & * ita MO ad ON, erit EB ad BS, vt MO ad ON: & conuertendo, vt. Se ad EB, ita NO ad OM; & diuidendo, vt Se ad eB, ita erit NM ad MO: ſed Se maior eſt, quàm NM, vt demonſtrauimus, ergo & EB maior erit, quàm MO. Atque eadem ratione oſtendemus omnes alias maiores eſſe ipſi MO. Minima eſt igitur MO omnium quæ ad punctum A pertinentes inter circumferentias kF, TC interijciuntur. quod eſt ſecundum.

Poſtremo ducatur alia recta ALP ſecans circumferentias kF, TC in punctis LP, ſitque LP, EB, ex eadem parte minimæ MO, quarum LP ipſi MO ſit propinquior, quàm EB, & recta AP ſecet circumferentiam
B kD in Q, & iungatur GK, eique parallela agatur CZ occurrens PA continuatæ in Z. * æqualia erunt rectangula LAZ, EAS; quare vt * AL Corol. Lem. 1 16 ſexti
ad AE, ita erit AS ad AZ. ſiquidem AL propinquior eſt centro V, quàm AE, ſic argumentor, ſed AL maior eſt, quàm AE, ergo & AS maior erit, quàm Az. Et quoniam rectangulum EAS * æquale eſt quadrato AI, hoc eſt quadrato AM, * proportionales erunt AE, AM, AS; Lem. 1 17 ſexti
ſed AE minor eſt, quàm AM, ergo & AM minor erit quàm AS: itaque AS maior erit, quàm AL, & multo maior quam AE eſt quoque maior, quam Az, vt demonſtrauimus; ipſa igitur AS maxima erit quatuor proportionalium AL, AE, AS, Az, & * conſequenter AE minima; vnde SE compoſita ex maxima, & minima maior erit, quàm zL Theor. 1 huius
C compoſita ex reliquis, hoc eſt zL minor, quàm Se.



Si vero AL remotior eſt à centro V, quàm AE, argumentor in hunc modũ, ſed AL minor eſt, quàm AE: ergo & AS minor erit, quam Az. Et quoniam rectangulum EAS * æquale eſt quadrato AI, vel AM: * proportionales erunt AE, AM, AS. ſed AE maior eſt, quàm AM, ergo & AM maior erit, quàm AS. Lem. 1 17 ſexti
quare AS minor erit, quàm AL, & multo minor quam AE; atque eſt
D minor, quàm Az, vt demonſtrauimus. itaque AS minima erit quatuor proportionalium AL, AE, AS, Az, & * conſequenter AE maxima, Theor. 1 huius
quare SE compoſita ex maxima, & minima, * maior erit quàm zL, compoſita ex reliquis, quod etiam demonſtrauimus & ſupra. 25 quinti

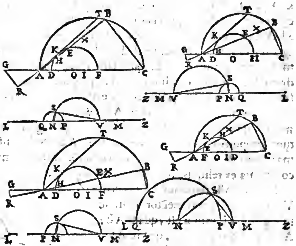
At quoniam in vtroque Caſu eſt, vt AG ad AC, ita * EB ad BS & Lem. 3
ita * LP ad Pz, erit vt LP ad Pz, ita EB ad BS; & conuertendo vt zP ad PL, ita SB ad Be; & diuidendo, vt zL ad LP, ita Se ad eB; ſed zL oſtenſa eſt minor, quàm Se, ergo & LP minor erit, quàm EB, hoc eſt propinquior minimæ, minor remotiore ex eadem parte. Quod tertio loco erat oſtendendum.

Corollarium. A

CVm igitur propinquiores minimæ remotioribus ex eadem parte minores ſint, manifeſtum eſt KT maximam eſſe omnium, quæ inter circumferentias KM, TO interijciuntur. Earum verò quæ interijciuntur inter circumferentias MF, OC maximam eſſe FC.

Compoſitio tertij Caſus.

SInt dati duo ſemicirculi ABC, DEF, vt dictum eſt; data autem recta linea VZ, & cõtingat A k ſemicirculũ DEF in k; ſemicirculum vero ABC ſecet in T. Oportet inter circũferentias TC, KF ponere rectam lineã æqualem VZ, ita vt ad punctum A pertineat. Oportet autem ipſam VZ non eſſe maiorem maxima rectarum, quæ ad punctum A pertinentes inter circumferentias TC, KF interijciuntur, B C



neque minorem minima, quæ autem ſit maxima, quæue minima, iam eſt demonſtratum.

Si igitur data VZ ſit æqualis maximæ, factum iam erit, quod proponitur, etenim maxima eſt ea, quæ maior eſt rectarum kT, FC, ſi vero ſit æqualis minimæ, minimaq. ſit vel FC, vel KT itidem factum erit, quod proponitur. Si autem neutra ipſarum FC, kT ſit minima inuenta, minima Problemati ſatisfiet, inuentio autem minime patet ex Lemmate ſexto. D
Sed ſi VZ minor ſit maxima, maior autem minima, ponatur ex centro circuli DEF, quod ſit O recta OG æqualis OC, & * fiat vt AG ad AC, ita quadratum AK ad aliud quadratum, quod ſit AI. Similiter fiat, vt AG ad AC, ita VZ ad aliam, quæ ſit ZL; & ſit ipſarum Vz, zL differentia LV, quæ ſecetur bifariam in N: Cum igitur a quadrato NV debeat auferri quadratum AI, vt Poriſma iubet; deſcribatur in VN ſemicirculus, in quo accommodetur VS æqualis AI infra demonſtrabimus ipſam AI minorem eſſe, quàm VN, & iungatur SN: Quadratum igitur Nv ſuperat

Probl. 1 huius

qua-

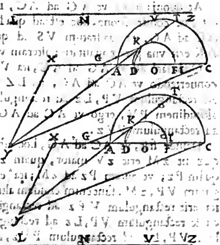
A quadratum S V, quadrato S N, cum ſit rectus angulus V S N in ſemi-
circulo: itaque rectæ V N auferenda eſt vel addenda recta æqualis N S;
ſic Poriſma fieri iubet; auferatur igitur, vel addatur prout ſequentia
præcepta docebunt; eaque ſic diminuta, vel aucta ſit V P, ea non erit mi-
nior minore reſtarum A F, A k, nec maior maiore, vt tria ſequentia Lem-
mata oſtendent; itaque poterit à puncto A ad circumferentiam K F duci
recta A E æqualis V P. ducatur igitur A E, & producatur ad circumferen-
tiam T C in B. Dico E B Problema efficere.
Secet enim B A circumferentiam k D in H, & centro N interuallo
N P deſcribatur circulus ſecans V L in Q, is circulus tanget rectam S V
in S, ac proinde quadratum V S, æquale erit rectangulo P V Q, vel
B V P L, ſeu quod idem eſt rectangulo V P, L Z minus rectangulo V P Z.
Si igitur fiat, vt A C ad A G, ita vtraque æqualitatis pars ſeparatim ad
alia plana, itidem manebit inter ea plana æqualitas.
At quoniam eſt vt A G ad A C, ita quadratum A K ad quadratum
A I, ex conſtructione, hoc eſt ad quadratum V S; erit conuertendo vt
A C ad A G, ita quadratum V S ad quadratum A K; quadratum igitur
A K erit vna pars æqualitatis; alteram vero ſic explorabimus.
Quoniam eſt vt A G ad A C, ita V Z ad Z L, ex conſtructione, erit
conuertendo vt A C ad A G, ita L Z ad z V: vt autem L z ad z V[1] ita 1 sext.
eſt rectangulum V P, L z ad rectangulum P V z, eandem enim habent
altitudinem P V, ergo vt A C ad A G, ita erit rectangulum V P, L z
C ad rectangulum P V z.
Deinde fiat, vt A C ad A G, hoc eſt vt L z ad z V, ita P z ad aliam,
quæ ſit z M erit z V maior, quam z M, quoniam & L z maior eſt,
quàm P z; vt autem P z ad z M; ita[1] eſt rectangulum V P Z ad rectan- 1 sext.
gulum V P, z M; ſunt enim eiuſdem altitudinis V P, ergo vt A C ad A G,
ita erit rectangulum V P z ad rectangulum V P, z M; ſed ita oſtenſum
eſt & rectangulum V P, L z ad rectangulum P V z; ergo vt rectangu-
lum V P, L z ad rectangulum P V z, ita erit rectangulum V P z ad re-
ctangulum V P, z M, hoc eſt vt totum ad totum, ita ablatum ad ablatum
quare & reliquum ad reliquum erit, vt totum ad totum, id eſt & rectangu-
lum V P, L z minus rectangulo V P z. ad rectangulum P V z minus re-
D ctangulo V P, z M[2] erit vt rectangulum V P, L z ad rectangulum P V z, 19 quint.
hoc eſt vt A C ad A G. Itaque rectangulum P V z minus rectangulo V P,
z M erit altera pars æqualitatis.
Quadratum igitur A K, hoc eſt rectangulum E A H æquale erit re-
ctangulo P V z, minus rectangulo P V, z M, hoc eſt æquale erit rectan-
gulo P V M, ſed P V æqualis eſt A E, ex conſtructione; ergo & P V M
æqualis erit A H.
Denique connectatur B C, & ei parallela agatur G R ſecans E A con-
tinuatam in R; angulus igitur A R G æqualis erit angulo A B C, &
ideo rectus cum ſit rectus, & ipſe A B C in ſemicirculo; quare æquales lem.

erunt E B, H R, & ſumpta E x, æquali E H, vel V M, reliqua x B æqualis erit reliquæ A R, & cum ſint æquales A E, V P, & æquales E X, V M tota A X toti P M æqualis erit. A

Et quoniam ſimilia ſunt triangula A B C, A R G, anguli enim A B C, A R G ſunt æquales, quia recti, hic ex conſtructione, ille ex vi ſemicirculi. Atque anguli B A C, R A G ad verticem ſunt æquales, ideo vt A C ad A G, ita erit A B ad A R, ſed vt A C ad A G, ita eſt quoque P Z ad Z M, ex conſtructione, ergo vt A B ad A R, hoc eſt ad B X, ita erit P Z ad Z M, & diuidendo vt A x ad x B, ita erit P M ad M Z, ſed A x oſtenſa eſt æqualis P M, ergo & x B æqualis erit M Z, ſed E x æqualis eſt V M, ex conſtructione, ergo tota E B æqualis erit toti V Z. Poſita eſt igitur inter circumferentias k F, T C recta E B æqualis V Z datæ, B
eaque ad punctum A pertinet, quod erat faciendum.

At vero rectam A I minorem eſſe, quàm V N ſic demonſtrabimus.

Duo ſunt Caſus, aut enim A D ad A F minorem rationem habet quam A G ad A C, aut non minorem, primum habeat non minorem & F C ſic intercepta inter conuexam circumferentiam K F, & cauam T c, ergo A I
Lem. 4 non * erit minor, quàm A F, at-
Lem. 5 que F c * minima erit omnium interceptarum inter circumferentias k F, T c. C

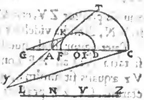


Connectantur autem G k, k D, eiſque parallelæ agantur c y, y x ſecantes T A, C A productas in punctis y x: rectangulum igitur
Lem. 3 F A x * æquale eſt quadrato A I:
Lem. 3 quare * proportionales ſunt F A, A I, A x vnde F x compoſita ex extremis, non erit minor, quàm dupla media A I.

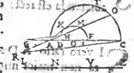
Et quoniam eſt vt A G ad A C * ita F C ad c x, & ita V Z ad Z L ex D
conſtructione, erit F c ad c x, vt V Z ad Z L, & diuidendo vt c F ad F x, ita erit Z V ad V L, ſed C F cum ſit omnium interceptarum minima minor eſt, quàm Z V, ponitur enim Z V maior minima, ergo & F x minor erit, quàm V L: ſed F x oſtenſa eſt maior, quàm A I dupla, ergo A I dupla minor erit, quàm V L, & conſequenter ſimpla A I minor quàm V N dimidia videlicet ipſius V L.

Lem. 5 Sed ſit F C intercepta inter cauas circumferentias k F, T C, ergo k T * minima erit omnium interceptarum inter circumferentias K F, T C. Connectatur autem G K, & ei parallela agatur c y occurrens K A productæ in y.

Re.



A Rectangulum igitur y A K* æquale erit quadrato A I; & ideo* proportionales erunt y A, A I, A K; ſunt autem & inæquales, quia A I* maior eſt, quam A K, ergo y k compoſita ex extremis maior erit, quàm A I dupla; Et quoniam eſt vt A G ad A C* ita K T ad T y; & ita quoque V z ad z L, ex conſtructione, erit K T ad T y vt V z, z L; & diuidendo erit vt T K ad k y, ita z V ad V L, ſed T K cum ſit omnium interceptarum minima minor eſt, quàm z V, ergo & K y minor erit, quam V L, ſed k y oſtenſa eſt maior, quàm dupla A I, ergo A I dupla minor erit, quàm V L & conſequenter A I B ſimpla minor, quàm V N dimidia videlicet ipſius V L. Lem. 3 17 ſexti Lem. 4 Lem. 3



Sed habeat A D ad A F minorem rationem, quàm A G ad A C, ergo A I* minor erit, quam A F, maior autem quàm A K, itaque poterit à puncto A ad circumferentiam K F duci recta æqualis A I. ducatur ergo, eaque ſit A M, quæ producta ſecet circumferentiam T c in O; erit M O* minima omnium, quæ inter circumferentias, k F, T C intercipiuntur. Secet autem recta A M circumferentiam K D in H, & connectatur G H, eique parallela agatur G R, occurrens M A continuatæ in R. Rectangulum igitur M A R* æquale erit quadrato A I, hoc eſt quadrato A M quare C æquales erunt A R, A M. Lem. 4 Lem. 6 Lem. 3

Et quoniam eſt vt A G ad A C,* ita M O, ad O R; & ita V z ad z L ex conſtructione, erit M O ad O R, vt V z ad z L; & diuidendo erit vt O M ad M R, ita z V ad V L, ſed O M, cum ſit omnium interceptarum minima, minor eſt, quàm z V ponitur enim z V maior minima; ergo erit & M R minor, quàm V L, & conſequenter A M, vel A I minor, quam V N, dimidia videlicet minor quàm dimidia. Quare conſtat propoſitum. Lem. 3

Scholium.

Si autem exiſtente ratione A D ad A F non maiori quam A G ad A C data V z ſit æqualis minimæ interceptarum, erit & A I æqualis V N, idD que ita oſtendemus.

Primum ſit ratio A D ad A F eadem, quæ A G ad A C, ergo F C* minima erit interceptarum & A I* æqualis A F, & cùm ſit rectangulum F A x* æquale quadrato A I, erit & A x æqualis A I, atque adeo tota F x dupla ipſius A I; & quoniam oſtenſæ ſunt ſupra, proportionales C F, F x, z V, V L, prima autem c F æqualis eſt z V tertiæ, ponitur enim z V æqualis minimæ, ergo & ſecunda F x æqualis erit V L quartæ, & conſequenter A I æqualis V N, dimidia videlicet dimidiæ. Lem. 3 Lem. 4 Lem. 3

Sed ſit ratio A D ad A F minor ratione A G ad A C. Quoniam igitur oſtenſæ ſunt proportionales O M, M R, z V, V L, & O M minima

æqua-

æqualis ponitur Z V, erit & M R æqualis V L; vnde & A M vel A I æqualis V N, dimidia videlicet dimidiæ. A

Patet igitur illud, quod in Scholio per Reſolutionem monuimus; nempe ſi ratio A D ad A F non ſit maior ratione A G ad A C, & præterea data V z æqualis ſit minimæ, quadratum V N, dimidiæ videlicet differentiæ rectarum, L z, z V præſtare quadrato A I nihilo: id eſt alterum alteri æquale eſſe.

Quo autem Caſu rectæ V N auferenda ſit recta æqualis N S, quoue addenda; ratio his conſtat præceptis.

Præceptum primum.

SI ratio A D ad A F non ſit minor ratione A G ad A C, rectæ V N auferenda eſt recta æqualis N S. B

Præceptum I I.

SI vero ratio A D ad A F minor ſit ratione A G ad A C, & V Z data non maior minore rectarum K T, F C, rectæ V N poterit ſiue addi, ſiue auferri recta æqualis N S: in hoc enim Caſu recta æqualis datæ V z poteſt optari inter circumferentias k F, T C ex vtraq; parte minimæ, & ideo duobus modis Problema abſolui. Nam ſi auferatur, aptabitur ea recta è regione K T, ſi vero addatur aptabitur è regione F C.

Præceptum I I I.

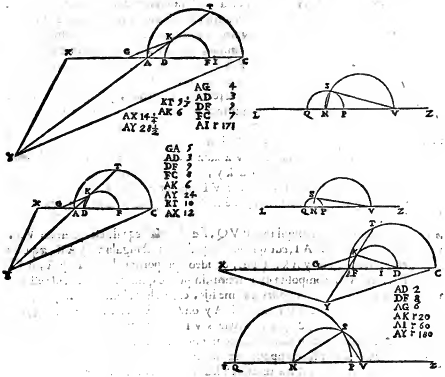
QVod ſi V Z data maior ſit minore rectarum K T, F C; recta ipſi V Z æqualis poterit aptari inter circumferentias k F, T C ex vna tantum parte minimæ, nempe è regione maioris rectarum K T, F C, ergo exiſtente k T maiore, quàm F C, rectæ V N auferenda eſt recta æqualis N S exiſtente minore, addenda. C

Nunc oſtendendum eſt rectam V P ſumptam quemadmodum præcepta docent non eſſe maiorem maiore rectarum A F, A k, nec minorem minore quo pertinent tria quæ ſequuntur Lemmata.

Lemma V I I.

Sit ratio A D ad A F non minor ratione A G ad A C. Dico V P æqualem differentiæ rectarum V N, N S minorem eſſe maiore rectarum A F, A k maiore autem minore. D

AVt enim recta F C intercipitur inter conuexam circumferentiam k F, & cauam T C; quo Caſu A F maior eſt, quàm A k, aut inter vtramque cauam, & A F minor eſt, quàm A K. Primo Caſu k T maxima eſt omnium, quæ inter circumferentias k F, T C interijciuntur, minima vero F C, itaque V Z data minor eſt quàm k T, maior autem, quàm F C ponitur enim V Z minor maxima, maior minima,



A nima. Secundo Caſu* minima eſt KT, maxima FC, vnde VZ data maior, eſt quam kT, minor quàm FC. Lem. 8

Connectantur autem Gk, KD, eiſque parallelæ agantur cy, yx ſecantes kA, CA continuatas in punctis yx. Quoniam igitur eſt vt AG ad AC, *ita FC ad Cx, & ita VZ ad ZL, ex conſtructione, erit VZ ad ZL, vt Fc ad Cx: & diuidendo, vt ZV ad VL, ita erit CF ad Fx; ſed ZV in primo quidem Caſu ponitur maior, quàm CF; ergo & VL maior erit, quàm Fx. in ſecundo vero Caſu ponitur ZV minor, quàm FC ergo & VL minor erit, quàm Fx. Lem. 8

Et quoniam æquales ſunt LN, NV, ex conſtructione, & æquales quoque NP, NQ, vt ſemidiametri, ergo fiunt quoque æquales LP, VQ:
B quare rectangulum PVQ æquale erit rectangulo VPL ſed rectangulum PVQ* æquale eſt quadrato VS, hoc eſt quadrato AI, cui quoque * æquale eſt rectangulum FAx, ergo rectangulum VLP æquale erit rectangulo FAx quare proportionales erunt VP, Fx, Ax, PL. in primo quidem Caſu ſic argumentor; ſed VL compoſita ex extremis oſtenſa eſt maior 16. eiuſ Lem. 3

ior

ior, quàm Fx compoſita ex medijs; ergo altera * extremarum VP, PL A
maxima erit, altera minima, ſed VP non eſt maxima, quia oſtenſa eſt
minor, quàm PL, ergo minima erit, atque adeo minor quàm AF.

In ſecundo autem Caſu argumentor hoc modo, ſed VL compoſita ex
extremis VP, PL oſtenſa eſt minor, quàm Fx compoſita ex medijs FA
Theor. 2 huius Ax, ergo altera * mediarum FA, Ax maxima erit, altera minima, ſed
AF non eſt maxima, quia minor eſt, quàm Ax, nam cum rectangulum
Lem. 5 Lem. 4 FAx * æquale ſit quadrato AI, & recta AI * maior, quàm AF, erit Ax
multo maior, ergo ipſa AF minima erit, atque adeo VP maior, quàm
AF.

Lem. 3 Rurſus quoniam eſt vt AG ad AC, * ita KT ad Ty, & ita VZ ad
zL, ex conſtructione, erit vt Vz ad zL, ita KT ad Ty; & diuidendo, B
vt zV ad VL, ita erit Tk ad ky; ſed zV in primo quidem Caſu po-
nitur minor, quàm Tk; ergo & VL minor erit, quàm ky; in ſecundo
vero Caſu zV ponitur maior, quàm Tk, ergo & VL, maior erit quàm
Ky.

38 tertij Et quoniam rectangulum PVQ, ſeu VPL * æquale eſt quadrato VS,
Lem. 8 hoc eſt quadrato AI, cui quoque * æquale eſt rectangulum yAK, æqualia
16 ſexti erunt rectangula yAk, VPL, & ideo * proportionales VP, yA, AK,
PL, ſed VL compoſita ex extremis, in primo quidem Caſu oſtenſa eſt mi-
Theor. 2 huius nor, quàm ky compoſita ex medijs, ergo altera * mediarum yA, Ak
maxima erit, altera minima ſed Ay oſtenſa eſt maior, quàm Ak; ergo
Ak erit minima, & per conſequens VP maior, quam Ak. C

In ſecundo autem Caſu VL compoſita ex extremis VP, FL, oſtenſa eſt
Theor. 1 huius maior, quàm yK compoſita ex medijs; ergo altera * extremarum VP,
PL maxima erit, altera minima; ſed VP minor eſt quàm PL; ergo ip-
ſa VP minima erit, atque adeo minor, quàm Ak. Exiſtente igitur ra-
tione AD ad AF, non minori, quàm AG ad AC, recta VP æqualis
differentiæ rectarum VN, NS, minor eſt maiore rectarum AF, AK,
maior minore, quod erat oſtendendum.

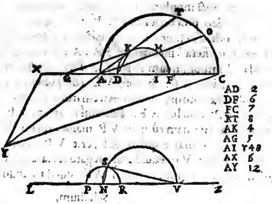
Lemma VIII.

Sit ratio AD ad AF minor ratione AG ad AC, & data Vz non ma-
ior minore rectarum KT, FC. Dico neque differentiam rectarum D
VN, NS, neque compoſitam ex ijſdem minorem eſſe, quàm AK, aut
maiorem, quàm AF.

Connectantur enim Gk, kD quibus parallelæ agantur cy, yx ſe-
cantes TA, CA productas in punctis yx, & ſit primum VP
æqualis differentiæ rectarum VN, NS.

Lem. 8 Quoniam igitur eſt vt AG ad AC, * ita kT ad Ty, & ita quoque VZ ad
ZL ex conſtructione erit, vt VZ ad ZL, ita KT ad Ty: & diuidendo,
vt ZV ad VL, ita erit TK ad Ky, ſed ZV non eſt maior, quàm Tk,

po-



A ponitur enim Z V non maior minore rectarũ K T, F C; ergo neque V L maior erit quàm K y. & cum ſit rectangulum y A K * æquale quadrato A I, & recta A I, * maior, quàm A K erit A y multo maior. lem. 3 lem. 4

Et quoniam rectangulum P V Q, hoc eſt

B V P L (ſunt enim æquales V Q, P L) * æquale eſt quadrato V S, hoc 3. tertij

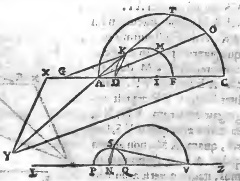
eſt quadrato A I, cui quoque * æquale eſt rectangulum y A k; ideo æqualia erunt rectangula V P L, y A K, & ideo proportionales V P, y A, A K lem. 3

P L: ſed V L compoſita ex extremis oſtenſa eſt non maior, quàm k y, compoſita ex medijs, ergo ſi eſt minor, erit altera * mediarum y A, A k maxima, altera minima; ſed A y oſtenſa eſt maior, quàm A K ergo A K minima erit, & per conſequens V P maior, quàm A K. Si vero V L compoſita ex extremis æqualis eſt y K compoſitæ ex medijs, minor extremarum minori mediarum, * æqualis erit: hoc eſt V P æqualis A k. Theor. 8 huius Theor. 8 huius

C Ipſam autem V P minorem eſſe, quàm A F patet; nam cum ſit V P minor, quàm V S hoc eſt, quam A I, ipſa autem A I * minor, quam A F erit V P multo minor. Recta igitur V P æqualis differentiæ rectarum V N, N S non eſt minor, quàm A K, nec maior, quàm A F: quod eſt primum. lem. 4

Sed ſit V P æqualis aggregato rectarum V N, N S.

Quoniam igitur eſt vt A G ad A C, * ita F C ad C x, & ita quoque V Z ad Z L, ex conſtructione, erit vt V Z ad Z L ita F C ad C x; & diuidendo vt Z V ad V L, ita C F ad F x; ſed Z V non eſt maior quàm C F: ponitur enim Z V non maior minore rectarum K T, F C, ergo neque V L lem. 3



D maior erit, quàm F x. Et cum ſit rectangulum F A x * æquale quadrato A I, & recta A I * minor, quàm A F, erit A x multo minor. lem. 3 lem. 4

Et quoniam rectangulum P V Z, hoc eſt V P L (ſunt enim æquales V Q, P L) * æquale eſt quadrato V S, hoc eſt quadrato A I, cui quoque * lem. 3 lem. 3

æqua-

æquale eſt rectangulum F A x: ipſa rectangula V P L, F A x æqualia erunt, & ideo proportionales V P, F A, A x, P L: ſed V L compoſita ex extremis oſtenſa eſt non maior, quàm F x compoſita ex medijs, ergo ſi eſt minor, erit altera * mediarum F A, A x maxima, altera minima; ſed A x oſtenſa eſt minor, quàm A F: ergo F A maxima erit, & conſequenter V P minor, quàm A F. Si vero V L compoſita ex extremis æqualis eſt F x compoſitæ ex medijs, * maior extremarum maiori mediarum æqualis erit, hoc eſt V P æqualis A F. Eſſe autem ipſam V P maiorem, quàm A k, manifeſtum eſt; nam cùm ſit V P maior, quàm V S, hoc eſt, quàm A I; ipſa autem A I maior quàm A k; erit V P, multo maior. A

Theor. 4 huius

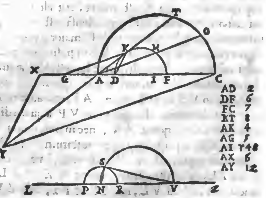
Lem. 3 huius

Recta igitur V P æqualis aggregato rectarum V N, N S non eſt maior quàm A F, nec minor, quàm A K. quod ſecundo loco erat oſtendendum; B

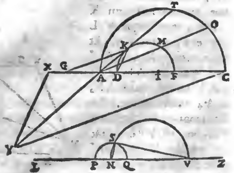
Scholium.

Ex demonſtratis patet, cum A D ad A F minorem rationem habet, quàm A G ad A C, data autem V Z non eſt maior minore rectarum k T, F C; Problema duobus modis abſolui poſſe. Nam ſi à puncto A ad circuferentiam K F ducatur recta A M æqualis A I, & producatur donec ſecet circumferentiá T C in O, erit M O * minima omnium, quæ inter circumferentias K F, T C interijciuntur, & ſumpta V P æquali differentiæ rectarum V N, N S, ea minor erit, quá V S hoc eſt, quàm A I, vel A M, non autem quàm A K, vt demonſtrauimus: itaque poterit à puncto A ad circumferentiam k M duci recta A E æqualis V P. Similiter ſumpta V P æquali aggregato rectarum V N, N S, ea maior erit, quàm V S, hoc eſt, quàm A M, non autem quàm A F, vt demonſtrauimus; itaque poterit à puncto A ad circumferentiam M F du-

Lem. 6



C



D

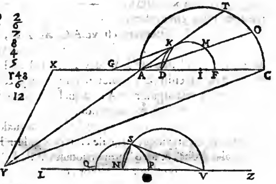
A duci recta AE æqualis ipſi VP. Igitur ſi AE ducatur æqualis differentiæ rectarum VN, NS, aptabitur recta datæ Vz æqualis inter circumferentias KM, TO; ſi vero ducatur AL æqualis aggregato ipſarum VN, NS, aptabitur ea recta inter circumferentias MF, OC, atque adeo poterit aptari ex vtraque parte minimæ MO, ac proinde Problema duobus modis abſolui. quod in præcepto ſecundo monuimus.

Lemma IX.

Rurſus ſit ratio AD ad AF minor ratione AG ad AC, data autem VZ ſit maior minore rectarum KT, FC, & à puncto A ad circumferentiam kF ducatur AM æqualis AI, & producatur ad circumferentiam TC
B in O, eſt autem AI* minor, quàm AF, & maior quam Ak. Dico ſi KT maior ſit, quàm FC, differentiam rectarum VN, NS maiorem eſſe, quàm AK, minorem quam AM; ſin minor, compoſitam ex VN, NS, minorem eſſe, quàm AE, maiorem, quàm AM. Lem. 4

Connectantur enim Gk, kD, quibus parallelæ agantur Cy, yx ſecantes TA, CA productas in punctis yx, & ſit primum VP æqualis differentiæ rectarum VN, NS.

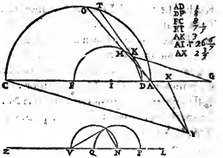
AD	2
DF	6
FC	7
KT	8
AK	4
AG	5
AI	r48
AX	6
AY	12



C & kT maior, quã FC, ergo ipſa kT maxima erit omnium interceptarum inter circumferentias KF, TC: quare recta datæ VZ æqualis poterit aptari inter circumferentias kM, TO, non etiam inter circumferentias MF, OC, cum ſit
D VZ maior, quam FC, ex poſitione, ipſaq. FC* maxima omnium interceptarum inter circumferentias MF, OC: Quoniam igitur eſt vt AG ad AC, *ita KT ad Ty, & ita quoque VZ ad ZL ex conſtructione, erit vt VZ ad ZL, ita kT ad Ty; & diuidendo, vt ZV ad VL, ita TK ad ky: ſed ZV minor eſt, quàm Tk; ponitur enim ZV minor maxima, ergo & VL minor erit, quàm ky, & cum ſit rectangulum yAK* æquale quadrato AI, & recta AI* maior, quàm Ak, erit Ay multo maior. Corol. Lem. 6 lem. 5 lem. 5 Lem. 4

Et quoniam rectangulum PVQ hoc eſt VPL (ſunt enim æquales VQ, PL)* æquale eſt quadrato VS, vel quadrato AI, cui quoque* æquale eſt rectangulum yAk, æqualia erunt rectangula VPL, yAk, & tertij lem. 5

ideo* proportionales V P, y A, A K, P L, ſed V L compoſita ex extremis A
Theor. 2 huius. oſtenſa eſt minor, quam k y compoſita ex medijs, ergo altera* mediarum y A, A k maxima erit, altera minima; ſed A y oſtenſa eſt maior, quàm A k ergo A k minima erit, & conſequenter V P maior, quàm A k. Quod autem ipſa V P minor ſit, quàm A M patet ex eo, quod ea minor eſt quàm V S, ipſique V S æqualis A I, vel A M, ex conſtructione. Exiſtente igitur k T maiore, quàm F C, recta V P differentia rectarum V N, N S maior eſt, quàm A K, minor autem quam A M. quod eſt primum.



Sed ſit V P æqualis compoſitæ ex V N, N S, & K T minor, Lem. 6 quam F C, ergo F C* maxima eſt omnium interceptarum inter circumferentias k F, T C, quare recta datæ V Z æqualis poterit aptari inter circumferentias M F, O C, non etiam inter circumferentias k M, T O cum ſit V Z maior quam k T ex poſitione, Corol. Lem. 6 ipſaque k T* maxima omnium interceptarum inter circumferen- B
lem. 3 tias k M, T O. Et quoniam eſt vt A G ad A C,* ita F C ad C X, & ita quoque V Z ad Z L, ex conſtructione, erit vt V Z ad Z L, ita F C ad c x; & diuidendo, vt Z V ad V L, ita C F ad F x: ſed Z V minor eſt C quàm C F ponitur enim Z V minor maxima, ergo & V L minor erit, quam lem. 3 F x, & cum ſit rectangulum F A x* æquale quadrato A I, & recta A I* mi- Lem. 4 nor, quàm A F, erit A x multo minor.

36 tertij Et quoniam rectangulum P V Q, vel V P L* æquale eſt quadrato V S, hoc lem. 3 eſt quadrato A I, cui quoque* æquale eſt rectangulum F A x rectangula V P L 16 ſexti F A x æqualia erunt, & ideo* proportionales V P, F A, A x, P L, ſed V L compoſita ex extremis oſtenſa eſt minor, quàm F x compoſita ex medijs ergo Theor. 2 huius altera* mediarum F A, A x maxima erit, altera minima; ſed A x oſtenſa eſt minor, quàm F A, ergo ipſa F A maxima erit, quare V P minor, quàm A F. Ipſam autem V P maiorem eſſe, quàm A M manifeſtum eſt: nam ea maior eſt quam V S, V S autem æqualis A I, vel A M, ex conſtructione. Exiſtente igi- D tur K T minorem, quam F C recta V P æqualis compoſitæ ex V N, N S minor eſt, quàm A F, maior autem quam A M. quod ſecundo loco erat oſtendendum, quare conſtat propoſitum.

Plerumque accidit vt Reſolutio Problematis incidat in æquationem de duobus terminis explicabilem, ex quibus vnus tantum ſolutioni Problematis idoneus ſit, quippe non ſemper vterque indicat id quod quæritur, ſed alter tantum, interdum minor, interdum maior. Dicendum eſt igitur quomodo terminus quæſitum indicans dignoſcatur.

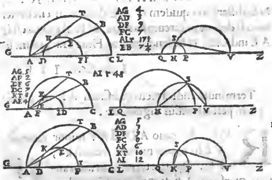
Dignoſcitur terminus quæſitum indicans ipſa terminorum, prout Po-

A Poriſma præcipit, exhibitione: nam exhibitis illis terminis, ſi vnus tantum idoneus eſt ſolutioni Problematis, alter in conſtruendo Problemate manifeſto ſe oſtendit, aut maiorem quæſito, aut minorem, aut etiam alia via conſtructioni aduerſantem: is ergo reijciendus; ſumendus autem alter pro indice quæſiti; ſi vero vterque terminus ſolutioni idoneus eſt, quia vero non indicat eundem quæſitum vterque, ſunt enim eo Caſu duæ magnitudines, de quibus poteſt quæri, altera minor, altera maior: Ideo ſi de minore quæritur ſumendus eſt pro indice quæſiti terminus minor, ſi verò de maiore ſumendus maior. Hæc omnia exemplis fient euidentiora.

Propoſitio I.

B Terminum quæſitam A E indicantem in ſemicirculis ad primum præceptum pertinentibus dignoſcere.

Sit ratio A D ad A F non minor ratione A G ad A C. Oportet terminum indicantem quæſitam A E dignoſcere. Reſumantur compoſitionis figuræ ad huiuſmodi Caſum pertinẽtes. Quoniam igitur termini de quibus Æquatio explicabilis eſt ſunt V P differentia rectarum V N, N S, & V Q aggregatum earundem, manifeſtum eſt alterum



C eorum quæſitam A E indicare. Et quoniam ratio A D ad A F ponitur non minor ratione A G ad A C, recta A I non erit* minor maiore rectarum A F, A k, vnde A E quæſita minor erit, quam A I, hoc eſt quam V S, & multo minor quam V Q: ipſa igitur V Q non indicat quæſitam A E, ergo eam indicat V P. Itaque exiſtente ratione A D ad A F, non minore quam A G ad A C, differentia rectarum V N, N S indicat D A E quæſitam. Agnitus eſt igitur terminus quæſitam A E indicans, vt faciendum erat. Hinc præceptum primum conſtitutum eſt.

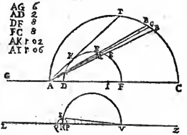
* lem. 4

Propoſitio II.

Terminum quæſitam A E indicantem in ſemicirculis ad ſecundum Præceptum pertinentibus dignoſcere.

Sit ratio A D ad A F minor ratione A G ad A C, & data V Z non ſit maior minore rectarum K T, F C. Oportet terminum quæſitam A E indicantem dignoſcere. Reſumatur Compoſitionis figura ad huiuſmodi ca-

ſum pertinens. Quoniam igitur termini, de quibus æquatio explicabilis eſt ſunt V P minor, V Q maior, manifeſtũ eſt alterum eorum indicare quæſitam A E. Ducatur à puncto A ad circumferentiam K F recta A M æqualis A I, hoc lem. 4 poteſt fieri, eſt enim A I* minor quàm A F, maior autem quam A k. Aut igitur quæſita A E deſinit in circumferẽtia M K, aut in circumferentia M F. Si in M K, ea erit minor quam A M, hoc eſt quam A I, ſeu V S, & multo minor, quàm V Q aggregatum rectarum V N, N S. Recta igitur V Q non indicat A E quæſitam, ergo eam indicat V P differentia ipſarum V N, N S. A B

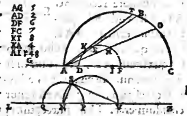


Si verò quæſita A E deſinit in circumferentia M F, ea maior eſt, quã A M, hoc eſt quam A I, vel V S, & multo maior quàm V P. recta igitur V P non indicat A E, quæſitum ergo eam indicat V Q. Si igitur ratio A D ad A F minor ſit ratione A G ad A C, & data V Z non ſit maior minore rectarũ K T, F C indicabit quæſitam A E, tum differentia, tum aggregatum rectarum V N N S, differentia quidem ſi A E deſinit in circumferentia k M, aggregatum vero ſi deſinit in circumferentia M F. Agnitus eſt igitur terminus quæſitum A E indicans, vt faciendum erat. Hinc præceptum ſecundum cõſtitutum eſt.

Propoſitio III. C

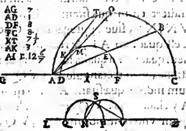
Terminum indicantem quæſitam A E in ſemicirculis ad tertium præceptum pertinentibus dignoſcere.

RVrſus ſit ratio A D ad A F minor ratione A G ad A C, data autem V Z ſit maior minore rectarũ k T, F C. Oportet terminum indicantem quæſitam A E dignoſcere. Fiat cõſtructio vt ſupra, & producatur A M ad circumferentiam T C in O. erit M O* minima lem. 6 omnium interceptarum inter circumferẽtias k F, T C; manifeſtum eſt igitur rectã datæ V Z æqualẽ poſſe aptari inter circumferentias ſemicirculum ex vna tantum parte minimæ, nempe è regione maioris rectarum K T, F C. Itaque ſit primum k T maior quam F C, ergo recta æqualis datæ V z poteſt aptari inter circumferentias K M, T O, non etiam inter circumferentias M F, O C cum ſit V z maior quam F C, ipſaque F C Corol. lem. 6 * maxima omnium, quæ inter circumferentias M F, O C interijciuntur: itaque A E quæſita deſinit in circumferentia K M, & ideo minor eſt quam A M, hoc eſt quam A I, ſeu quam A S, & multo minor quàm V Q, quæ eſt æqualis aggregato rectarum V N, N S. Recta igitur V Q non indicat quæſitam A E, D



A A E, ergo eam indicat V P æqualis differentiæ ipſarum V N, N S.

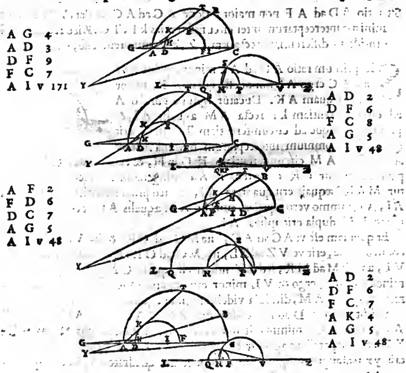
Sed ſit F C maior, quàm K T, ergo recta æqualis datæ V z poteſt aptari inter circumferentias M F, O C, non autem inter circumferentias k M, T O. Itaque A E quæſita deſinit in circumferentia M F, & ideo maior eſt, quàm A M, hoc eſt quam A I, ſeu quàm V S, atque multo maior, quàm V P. Ipſa igitur V P nõ indicat quæſitam A E, ergo eam indicat recta V Q. Si igitur ratio A D ad A F minor ſit ratione A G ad A C, data autem V z maior minore rectarum K T,



B F C, differentiam rectarum V N, N S, exiſtente K T maiore, quam F C indicabit A E quæſitam, exiſtente vero minore, aggregatum. Agnitus eſt igitur terminus quæſitam A E indicans vt faciendum erat. Hinc præceptum tertium conſtitutum eſt.

Oſtenſa ratione qua ſciri poſſit vter terminorum de quibus Æquatio explicabilis eſt, indicet A E quæſitam, conſentaneum eſt oſtendere, indicante vno terminorum quæſitam A E quid indicet terminus alter.

Reſumantur compoſitionis figuræ & connectatur G H eique paral-



lela agatur c y occurreus B A continuatæ in y. Duos terminos Poriſma A conſtituit, de quibus A E explicabilis eſt; vnum quidem differentiam rectarum V N, N S, alterum verò aggregatum earundem. Dico igitur indicante vno terminorum quæſitam A E alterum rectæ A y indicem eſſe. Indicet enim quæſitam A E terminus V P, ſiue ſit differentia rectarum

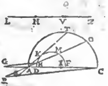
Lem. 3 V N, N S, ſiue aggregatum. Quoniam igitur rectangulum E A y * æqua-

16 tertij le eſt quadrato A I, & rectangulum P V Q * æquale quadrato V S, quæ quidem quadrata æqualia ſunt, quia & rectæ A I, V S æquales ſunt ex constructione; ideo rectangulum P V Q æquale erit rectangulo E A y, ſed V P, cum indicet quæſitam A E, æqualis eſt ipſi A E, ergo & V Q æqualis erit A y. itaque ipſa V Q, quæ eſt alter terminus indicat rectam A y. Indicante igitur vno terminorum V P, V Q, quæſitam A E alter rectam A y indicat B quod erat oſtendendum.

Expoſitis quæ ad conſtructionem pertinent non alienum videtur inſtantias conſtructioni aduerſantes, & vnde ipſæ oriantur indicare, quod in Scholio poſt Reſolutionem monuimus: quo circa tres ſequentes propoſitiones proferuntur.

Propoſitio I.

Sit ratio A D ad A F non maior ratione A G ad A C, & data V Z ſit minor minima interceptarum inter circumferentias k F, T C. Dico rectam V N dimidiam differentiam rectarum L Z, Z V minorem eſſe, quam A I. C



Lem. 6 Sit primum ratio A D ad A k minor, quàm A G ad A C ergo A I minor eſt, quàm A F, maior autem quam A K. Ducatur igitur à puncto A ad circumferentiam k F recta A M æqualis A I, & producatur vſque ad circumferentiam T C in O; erit

lem. 6 igitur * M O omnium interceptarum minima. Secet autem recta A M circumferentiam K D in H, & connectatur G H, eique parallela agatur C R occurrens M A continuatæ in R. rectangulum igi-

lem. 8 tur M A R * æquale erit quadrato A I, & ideo proportionales erunt M A, A I, A R: immo vero æquales, cum ſit A M æqualis A I, ex conſtructione; quare R M dupla erit ipſius A I. D

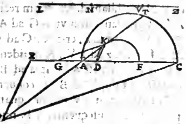
Lem. 3 Et quoniam eſt vt A G ad A C, * ita M O ad O R, & ita V Z ad Z L ex conſtructione, erit vt V Z ad Z L, ita M O ad O R: & diuidendo vt Z V ad V L, ita O M ad M R, ſed Z V minor eſt, quàm O M, ponitur enim Z V minor minima, ergo & V L minor erit, quàm M R; atque adeo & V N minor, quàm A M, dimidia videlicet minor, quàm dimidia.

lem. 4 Lem. 5 Sed ſit ratio A D ad A F eadem quæ A G ad A C, ergo A I * æqualis eſt A F, atque F C * minima eſt interceptarum. Connectantur autem G K, K D, eiſque parallelæ agantur c y, y x ſecantes k A, F A continuatas in pun-

lem. 8 ctis y x rectangulum igitur F A x * æquale erit quadrato A I, hoc eſt quadra-

to

A to $\wedge$ F: vnde æquales erunt F A, $\wedge$ x, ac proinde F x dupla erit ipſius $\wedge$ F, vel $\wedge$ I.



Et quoniam eſt vt $\wedge$ G ad $\wedge$ C, ita V Z ad Z L, ex conſtructione, & * ita F C ad c x erit V Z ad Z L, vt F c ad c x. & diuidendo vt Z V ad V L, ita C F ad F x, ſed Z V cum ſit minor minima minor eſt quàm C F, ergo & V L minor erit quàm F x: vnde & V N minor, quàm A I; dimidia videlicet minor, quàm dimidia. Lem. 3

B

Scholium.

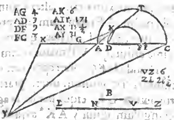
Ex his conſtat cum ratio A D ad A F non eſt maior, quàm A G ad A C inſtantiam conſtructioni aduerſantem oriri ex data V Z deficiente à minima. nam eo Caſu neceſſe eſt, quod V N (dimidia differentia rectarum L Z, Z V minor ſit quàm A I, & ob id recta ipſi A I æqualis non poſſit aptari in circulo, cuius diameter eſt V N, prout Poriſma fieri iubet; atque adeo conſtructio Problematis perfici non poſſit.

Propoſitio I I.

C Sed ſit ratio A D ad A F maior ratione A G ad A C, & data V Z ſit minor minima interceptarum inter circumferentias K F, T C. Dico aut dimidiam differentiam rectarum L Z, Z V minorem eſſe, quàm A I, aut terminum indicantem quæſitam A E, maiorem eſſe maiore rectarum A F, A k.

Duplex eſt Caſus, aut enim F C intercepta eſt inter cauam circumferentiam T C, & conuexam K F, & ideo A F maior eſt, quam A k, aut inter cauam vtramque, & ideo A K maior, quàm A F. Sit primum intercepta inter cauam & conuexam; ergo F C * minima eſt omnium interceptarum inter dictas circumferentias. Connectantur autem G k, k D, eiſque parallelæ agantur c y, y x ſecantes A K, F A continuatas in punctis y, x. rectangulum igitur F A x * æquale erit quadrato A I; quare* proportionales erunt F A, A I, A x; ſunt autem inæquales, quia A I, * maior eſt, quàm A F. ergo F x compoſita ex extremis maior erit, quàm dupla media. Fiat igitur vt x F ad F c, ita dupla A I ad aliam, quæ ſit B: ea minor erit quàm F C, cum ſit & A I dupla minor, quam F K. Lem. 6 lem 8 17 ſexti lem 4

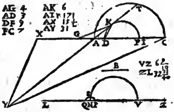
D



Sit primum V Z minor, quam B, ea multo minor erit, quam F C. Dico

co V N dimidiam differentiam rectarum L Z, z V, minorem eſſe, quàm A
A I. Quoniam enim vt A G ad A C ita eſt V z ad z L, ex conſtructione,
lem. 3 &* ita F C ad C x, erit vt F C ad C x, ita V z ad z L, & conuertendo vt x c
ad C F ita L z ad z V; & diuidendo vt x F ad F C, ita L V ad V z; ſed
x F ad F C, ita eſt A I dupla ad B, ex conſtructione, ergo vt L V ad V z,
ita erit A I dupla ad B, & conuertendo vt z V ad V L, ita B ad duplam
A I; ſed ponitur z V minor, quàm B, ergo & V L minor erit, quàm du-
pla A I, & conſequenter V N minor, quàm ſimpla A I, quod eſt primum.

Sed ſit V z non minor, quàm B, minor autem quàm F C. Eadem ratione quà ſupra, iiſdemque verbis oſtendemus, vt Z V ad V L, ita eſſe B ad duplam A I; ſed ponitur z V non minor, quàm B; ergo neque V L minor erit quàm A I dupla; idcirco nec V N minor quàm A I ſimpla. B

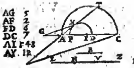


In circulo igitur circa diametrum V N de-
ſcripto poterit aptari recta æqualis A I. aptetur ergo, eaque ſit V S, & con-
nectatur N S, cui æqualis e x, N V auferatur N P; reliqua V P indicat A E
quæſitam ſic habetur in Poriſmate, per cuius rationem texuimus conſtructio-
nem Problematis. Dico igitur ipſam V P maiorem eſſe, quàm A F. Quo-
lem. 3 niam enim vt A G ad A C, ita eſt V z ad z L ex conſtructione, &* ita F C
ad C X, erit vt F c ad c x, ita V z ad z L. & diuidendo vt C F ad F x ita erit
z V ad V L, ſed C F ponitur maior quam z V, ergo & F x maior erit C
quam V L.

Deſcribatur autem ex centro N ad interuallum N S, vel N P circulus ſe-
35 ſexti cans N L in Q. rectangulum igitur P V Q* æquale erit quadrato V S, hoc
eſt quadrato A I, ſed rectangulum quidem P V Q æquale eſt rectangulo
lem. 3 V P L; ſunt enim æquales V P, P L, quadratum vero A I* æquale rectangulo
F A x, ergo rectangulum F A x rectangulo V P L æquale erit, quare*
16 ſexti proportionales erunt F A, V P, P L, A X; ſed F x compoſita ex extre-
Theor. 1 huius mis oſtenſa eſt maior, quàm V L compoſita ex medijs, ergo altera* extre-
marum maxima erit, altera minima; ſed A x non eſt minima, quia maior
eſt, quàm A F; nam cum ſint proportionales F A, A I, A X, vt oſtenſum
lem. 4 eſt ſupra, & A I* maior, quàm A F, erit A x multo maior, ergo A F mi- D
nima erit; itaque V P maior quàm A F quod ſecundo loco erat oſtendendum.
lem. 5 Deinde ſit F C intercepta inter cauas circumferentias T C, k F, ergo k T*
minima erit omnium interceptarum inter dictas circumferentias. connecta-
tur autem G K, eique parallela agatur c y ſecans k A continuatam in y. re-
lem. 3 17 ſexti ctangulum igitur y A K* æquale erit quadrato A I; quare* proportionales
lem. 4 erunt y A, A I, A K; ſunt autem inæquales, quia A I* maior eſt, quàm A K,
ergo y k compoſita ex extremis maior erit quam dupla media A I. Fiat igi-
tur vt y K ad k T, ita dupla A I ad aliam, quæ ſit B. ea minor erit, quàm k T,
cum ſit & A I dupla minor, quàm y k.

Pri-

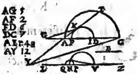
A Primum igitur ſit V Z data minor, quam B. ea multo minor erit, quam K T. Dico V N dimidiam differentiam rectarum L Z, Z V minorem eſſe, quàm A I. Quoniam enim vt A G ad A C, ita eſt V Z ad Z L ex conſtructione, & * ita K T



lem. 1

ad T y, erit vt k T ad T y, ita V Z ad Z L: & conuertendo vt y T ad T k, ita L Z ad Z V: & diuidendo, vt y k ad K T, ita L V ad V Z: ſed vt y K ad K T, ita eſt A I dupla ad B, ergo vt L V ad V z, ita erit A I dupla ad B; & conuertendo, vt Z V ad V L, ita B ad duplam A I; ſed Z V ponitur minor quam B, ergo & V L minor erit, quàm A I dupla, vnde & V N minor, quàm A I ſimpla, quod eſt primum.

B Sed ſit data V Z non minor, quàm B, minor autem quàm k T: eadem ratione qua ſupra iiſdemque prorſus verbis oſtendemus, vt z V ad V L ita eſſe B ad duplam A I, ſed z V ponitur non minor, quam B, ergo neque V L minor erit, quàm A I



dupla, atque adeo nec V N minor quam A I ſimpla. in circulo igitur cuius diameter V N aptetur recta V S æqualis A I, & connectatur N S, & ex N V abſcindatur N P æqualis N S; reliqua V P indicat A E quæſitam: ſic enunciatum eſt in Poriſmate. Dico igitur ipſam V P maiorem eſſe, quàm A k.

Quoniam enim vt A G ad A C, ita eſt V z ad z L ex conſtructione, & * ita k T ad T y, erit vt k T ad T y, ita V z ad z L, & diuidendo vt T k ad K y, ita erit z V ad V L ſed T k ponitur maior, quàm z V, ergo & k y maior erit, quàm V L. lem. 1

C

Deſcribatur autem circulus ſub N centro interuallo N S, vel N P ſecans N L in Q: rectangulum igitur P V Q hoc eſt V P L * æquale erit quadrato V S, hoc eſt quadrato A I, ſeu quod idem eſt * rectangulo y A k, quare * proportionales erunt y A, V P, P L, A k, ſed y K compoſita ex extremis, oſtenſa eſt maior, quam V L compoſita ex medijs, ergo altera * extremarum y A; A K maxima erit, altera minima, ſed A y non eſt minima, quia maior eſt quàm A K, nam cum ſint proportionales y A, A I, A K, & A I maior quam A k, vt demonſtratum eſt, vtrumque erit A y multo maior ergo A k minima erit, quare V P maior quam A k. quod ſecundo loco erat oſtendendum. 14 tertij lem. 1 16 ſexti Theor. 2 huius

D

Scholium.

Exiſtente igitur ratione A D ad A F maiore, quàm A G ad A C, manifeſtum eſt ex data V z minore minima interceptarum, alteram è duabus inſtantijs conſtructioni aduerſantibus oriri; oritur enim prima inſtantia cum V N dimidia differentia rectarum L z, z V minor eſt, quàm A I; nam recta æqualis ipſi A I non poteſt aptari in circulo circa diametrum V N deſcripto, quemadmodum Poriſma fieri iubet, & ideo Problema conſtitui non poteſt.

Cum

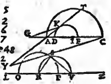
Cum autem V N non eſt minor, quàm A I, prædicta inſtantia locum non habet, verum altera ſurgit; nam recta V P fit maior in primo quidem Caſu quàm A F, in ſecundo verò quàm A K; itaque recta æqualis ipſi V P, non poteſt à puncto A ad circumferentiam K F duci, vt Poriſma præcipit, atque adeo conſtructio Problematis perfici nequit. A

Propoſitio III.

Sed in quacumque ratione extiterint, A D ad A F, & A G ad A C. ſit data V z maior maxima interceptarum inter circumferentias K F, T C. Dico differentiam quidem rectarum V N, N S minorem eſſe minore rectarum A F, A K, compoſitam verò ex iiſdem maiorem maiore. B

Sit V P differentia rectarum V N, N S, compoſita autem ex ipſis V Q, & connectantur G k, K D, quibus parallelæ agantur c y, y x ſecantes k A, F A productas in punctis y x. Aut igitur F C intercepta eſt inter conuexam circumferentiam k F, & cauam T C aut inter vtramque cauam. Primum ſit intercepta inter conuexam, & cauam, ergo A F maior erit, quam A k. Et quoniam eſt vt A G ad A C ita K T ad T y, & ita A z ad z L, ex conſtructione, erit vt V z ad z L ita k T ad A y, & diuidendo vt z V ad V L, ita T k ad K y, ſed z V maior eſt, quam T K, ponitur enim z V maior maxima, ergo & V L maior erit, quàm k y. C

AG	5
AD	2
DF	6
FC	7
AI	P48
AY	12



lem. 3

36 tertij lem. 3 Et quoniam rectangulum P V Q, vel V P L æquale eſt quadrato V S, & rectangulum y A k æquale quadrato A I, quæ quidem quadrata æqualia ſunt, cum ſint æquales & rectæ V S, A I ex conſtructione, ideo rectangula

16 ſexti V P L, y A K æqualia erunt, & ideo proportionales V P, y A, A K, P L; ſed V L compoſita ex extremis, oſtenſa eſt maior, quam y K compoſita ex

Theor. 3 huius medijs, ergo altera extremarum V P, P L maxima erit, altera minima, ſed cùm ſit V P minor, quam P L, ipſa V P minima, & per conſequens minor quàm A K.

lem. 3 Rurſus quoniam eſt A G ad A C, ita F c ad c x, & ita V z ad z L ex conſtructione, erit vt V z ad Z L, ita F c ad c x; & diuidendo vt z V ad V L, ita C F ad F x: ſed z V cum ſit maior maxima, maior eſt quam C F, ergo & V L maior erit quam F x. D

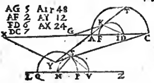
36 tertij Lem. 3 Et quoniam rectangulum P V Q, vel V Q L æquale eſt quadrato V S, hoc eſt quadrato A I, cui æquale eſt & rectangulũ F A x rectangulum V Q L

16 ſexti rectangulo F A x æquale erit, quare proportionales erunt V Q, F A, A x, Q L, ſed V L compoſita ex extremis oſtenſa eſt maior, quàm F x compoſita

Theor. 3 huius ex medijs, ergo altera extremarum V Q, Q L maxima erit, altera minima; ſed V Q maior eſt, quàm Q L ergo ipſa V Q maxima erit, & per conſequens maior quàm A F.

Sed ſit F C intercepta inter cauas circumferentias K F, T C, ergo A F

minor



A minor erit, quàm A K, & quoniam eſt vt A G ad A C,* ita F C ad c x, & ita V z ad Z L ex conſtructione, erit vt V Z ad z L ita F C ad c x: & diuidendo vt z V ad V L, ita C F ad F x: ſed z V maior eſt, quàm C F ea enim ponitur maior maxima; ergo & V L maior erit, quàm F x.

Et quoniam rectangulum P V Q, hoc eſt V P L* æquale eſt quadrato V S, (16 tertij) vel quadrato A I, cui* æquale eſt, & rectangulum F A x rectangula V P L, (ιεm. 1) F A x æqualia erunt, & ideo proportionales V P, F A; A x, P L; ſed V L compoſita ex extremis oſtenſa eſt maior, quam F x compoſita ex medijs, ergo altera* extremarum maxima erit altera minima, ſed V P minor eſt, quam (Theor. 1 huius)

B P L, ergo ipſa V P minima erit, & per conſequens minor, quam A F.

Rectam autem V Q maiorem eſſe, quàm A k manifeſtum eſt; nam cum ſit vt A G ad A C minor nempe ad maiorem, ita quadratum A K ad quadratum A I, ex conſtructione, erit & quadratum A K minus quadrato A I, vnde & recta A k minor, quàm recta A I hoc eſt quam recta V S, & multo minor quam recta V Q.

Exiſtente igitur V Z maiore maxima interceptarum differentia rectarum V N, N S minor eſt minore rectarum A F, A k; compoſita vero ex ijſdem V N, N S maior maiore. quod erat oſtendendum.

Scholium.

C Conſtat igitur inſtantiam conſtructioni aduerſantem oriri ex data VZ excedente maximam interceptarum, cum eo Caſu neceſſe ſit, vt recta V P quæſitam A E indicans vel minor ſit minore rectarum A F, A k, vel maior maiore, & ideo recta æqualis ipſi V P non poſſit à puncto A ad circumferentiam K F duci, quemadmodum Poriſma fieri præcipit, & propterea conſtructio problematis perfici non poſſit.

Caſus quartus.

Sed vergant ad diuerſas partes dati duo ſemicirculi neutro reliquum includente etiamſi complerentur.

D SInt igitur tales duo ſemicirculi a b c, d e f. data autem recta linea G, & ducatur A k contingens ſemicirculum d e f in K; ipſum vero a b c ſecans in T. Oportet inter circumferentias t c, k f ponere rectam lineam æqualem ipſi G, ita vt ad punctum A pertineant.

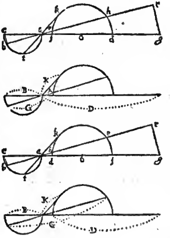
Hic quoque Caſus in duos alios Caſus diuiditur: in primo quidem ponenda eſt ea recta inter cauam circumferentiam vnius ſemicirculi, & conuexam alterius; in ſecundo vero ponenda eſt inter cauas vtriuſque.

Re-

Reſolutio. A

SIt iam poſita recta linea b a e æqualis datæ G, vt impetratum eſt, & ex centro circuli d e f, quod ſit O ponatur o g æqualis o c, & recta b a e etiam producta ſecet circumferentiam k d in h, & ducatur g r ipſi b e productæ ad rectos angulos, & connectatur c b angulus igitur a b c in ſe-
Lem 3. micirculo rectus eſt, ac proinde h r* æqualis c b.

Et quoniam datæ ſunt a c, a g, b e, a k; prima ſit B, ſecunda D, tertia G, quarta k, vt in figuris ad Reſolutionem pertinentibus: & quæratur a e, eſto illa A, ergo recta a b erit G -- A, & cum ſint ſimilia triangula a b c, a r g; anguli enim a b c, a r g ſunt æquales, quia recti; hic ex constructione, ille ex vi ſemicirculi, & æquales quoque b a c, r a o, quia ſunt ad verticem, erit vt a c, ad a g, ita a b ad a r. hoc eſt in figuris ad Reſolutionem pertinentibus, vt B ad D, ita G -- A ad $\frac{D \text{ in } G - D \text{ in } A}{B}$, atque adeo a r erit $\frac{D \text{ in } G - D \text{ in } A}{B}$, à qua ſi abſcindatur recta h r æqualis ipſi c b, remanebit a h, quæ ideo erit $\frac{D \text{ in } G - D \text{ in } A}{B}$ -- G; ſed rectangulum e a h æquale eſt quadrato a k, ergo



B

C

$$\frac{D \text{ in } G \text{ in } A - D \text{ in } AQ}{B} - G \text{ in } A \text{ æquabitur } KQ$$

Ducantur omnia in B; ergo

D in G in A -- B in G in A -- D in A Q æquabitur K Q in B.

Et applicentur omnia ad D, vt A Q ex ſe ſubſiſtat, ergo G in A -- $\frac{B \text{ in } G \text{ in } A}{D}$ -- A Q æquabitur $\frac{KQ \text{ in } B}{D}$

Sed vt æquatio facilius explicetur, tranſmutentur fractiones in integras magnitudines, vt in Reſolutionibus præcedentium Caſuum factum eſt, nempe fiat vt D ad B, ita K Q ad aliud quadratum quod ſit Z Q, erit Z Q idem quod $\frac{KQ \text{ in } B}{D}$. Similiter fiat vt D ad B, ita G ad aliam, quæ ſit F, erit F eadem quæ $\frac{B \text{ in } G}{D}$, atque adeo planum F in A idem erit, quod planum $\frac{B \text{ in } G \text{ in } A}{D}$ facta D igitur tranſmutatione.

G in A -- F in A -- A Q æquabitur Z Q.

hoc eſt G -- F in A -- A Q æquabitur Z Q.

Et explicata æquatione G $\frac{1}{2}$ -- F $\frac{1}{2}$ + L. V. (G $\frac{1}{2}$ -- F $\frac{1}{2}$ Q -- Z Q) æquabitur A

Vel G $\frac{1}{2}$ -- F $\frac{1}{2}$ -- L. V. (G $\frac{1}{2}$ -- F $\frac{1}{2}$ Q -- Z Q) æquabitur A.

In hac quoque æquatione A explicabilis eſt de duobus terminis, maiore, & minore; ſed quo Caſu terminus maior indicet quæſitam a e, quoue terminus minor quoue etiam vterque ſuo loco dicetur.

Po-

A

Poriſma.

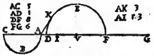
Fiat vt a g ad a c, ita quadratum a k ad aliud quadratum, quod ſit a i, & ita recta G ad aliam rectam, quæ ſit F. deinde dimidiæ differentiæ, qua G ſuperat ipſam F, addita recta, cuius quadratum æquale eſt exceſſui, quo quadratum eiuſdem dimidiæ differentiæ ſuperat quadratum a i, fiet terminus maior. Vel eidem dimidiæ differentiæ dempta eadem recta, reliqua erit terminus minor.

Antequam conſtructio fiat oſtendendæ ſunt maxima, & minima rectarum, quæ ad punctum a pertinentes, inter circumferentias K f, t c intercipiuntur, idque vt data G poſſit determinari, ne maximam ſuperaret, neue à
B minima ſuperaretur. ſed prius ſequens Lemma demonſtrabo, quò facilius, ac clarius ea, quæ ſequuntur demonſtrentur.

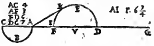
Lemma X.

Sint duo ſemicirculi A B C, D E F, quales in præſenti Caſu ponuntur, & contingat recta A K ſemicirculum D E F in K, & ex centro circuli D E F, quod ſit V ponatur V G æqualis V C, & fiat vt A G ad A C, ita quadratum A K ad quadratum A I. Dico ſi ratio A D ad A F minor ſit ratione A G ad AC, & rectam A I minorem eſſe minore rectarum A F, A k, & ſi æqualis æqualem, & ſi maior maiorem: at minorem maiore.

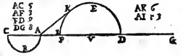
C Sit primum ratio A D ad A F minor ratione A G ad A C. aut igitur recta FC intercepta eſt inter cauas vtriuſque ſemicirculi circumferentias, aut inter cauam vnius, & conuexam alterius. Sit primum intercepta inter cauas. Quoniam igitur eſt, vt A G ad A C, maior nempe ad minorem, ita quadratum A K ad quadratum A I ex conſtructione, quadratum AK maius erit quadrato A I, vnde & recta A k maior, quàm recta A I.



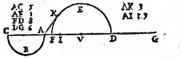
Deinde ſit F C intercepta inter cauam, & conuexam circumferentiam. Quoniam igitur ratio A D ad A F ponitur minor ratione A G ad A C, vt autem
D A G ad A C, ita eſt quadratum A K ad quadratum A I, ergo ratio A D ad A F minor erit ratione quadrati A k ad quadratum A I, ſed vt A D ad A F prima videlicet trium proportionalium A D, A k, A F ad tertiam, ita eſt quadratum ſecundæ A k ad quadratum A F tertiæ, ergo ratio quadrati A k ad quadratum A f, minor erit ratione quadrati A k ad quadratum A I: quare quadratum A I* minus erit quadrato A F, & per conſequens recta A I minor, quàm recta A f; recta igitur A I minor eſt minore rectarum A f, A k, quod eſt primum. *x quint.



Deinde ſit ratio A D ad A F eadem, quæ A G ad A C, ergo eadem erit,



quæ quadrati A K ad quadratum A I, ſed vt A D ad A F, ita eſt quadratum A K ad quadratum A F, vt demonſtrauimus: ergo quadratum A I quadrato A F æquale erit, quare & recta A I æqualis rectæ A F, quod eſt ſecundum. A

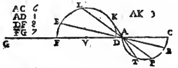


Poſtremo ſit ratio A D ad A F maior ratione A G ad A C, ergo maior erit & ratione quadrati A K ad quadratum A I; ſed vt A D ad A F, ita oſtenſum eſt quadratum A K ad quadratum A F, ergo ratio quoque quadrati A k ad quadratum A F maior erit ratione quadrati A K ad quadratum A I; quare quadratum A I maius erit quadrato A F, & B conſequenter recta A I maior, quam recta A F: quod eſt tertium.

Denique quoniam eſt vt A G ad A C maior nempe ad minorem, ita quadratum A K ad quadratum A I; quadratum A K maius erit quadrato A I: vnde & recta A K maior quam recta A I. Recta igitur A I minor eſt maiore rectarum A F, A K; quod vltimo loco erat oſtendendum

Lemma X I.

Iiſdem poſitis. ſit ratio A D ad A F non maior ratione A G ad A C. Dico K T maximam eſſe omnium, quæ per punctum A ductæ inter conuexam circumferentiam k F, & cauam T C intercipiuntur, minimam F C; earum vero quæ inter cauas circumferentias intercipiuntur, minimam eſſe k T, maximam F C. Aliarum autem vtroque Caſu propinquiorem minimæ remotiore maiorem eſſe. C



10 quinti DVcatur enim per A vtcumque recta linea E A B ſecans circumferentias K F, T C in punctis E B & ſit primum F C intercepta inter cauas circumferentias K F, T C. Quoniam igitur A C maior eſt, quam A B, & A F maior quam A E tota C F maior erit, quam tota B E, & ſic oſtendetur omnibus alijs maior. Maxima eſt igitur F C. D

Pari ratione quoniam A T minor eſt, quàm A B, & A k minor quam A E, tota K T minor erit, quàm tota E B, atque eadem ratione oſtendetur omnibus alijs minor. Minima eſt igitur K T.

Rurſus ducatur per A alia recta L A P ſecans circumferentias k F, T C in punctis L P, ſitque L P minimæ k T propinquior, quam E B; erit A P minor quam A B, & A L minor quam A E, atque adeo tota P L minor, quam tota B E, hoc eſt propinquior minimæ. minor remotiore.

Sed



A Sed ſit F C intercepta inter cauam circumferentiam T C, & conuexam K F, & connectantur G k, k D, quibus parallelæ agantur c y, y x ſecantes A T, A C in punctis y x. rectangulum igitur F A X * æquale erit quadrato A I, ſed recta A I ex antecedente Lemmate non eſt maior quàm A F, ergo neque A x maior erit quam ipſa A F, alioquin rectangulum F A X maius eſſet quadrato A I. lem. 1

Et quoniam rectangulum F A x * æquale eſt rectangulo y A k, erit vt A K ad A F, ita A x ad A y; ſed A k maior eſt, quàm A F, ergo & A x maior erit quàm A y; ſed A x oſtenſa eſt non maior, quàm A F, ergo & Corol. lem. 3 16 ſexti
B A F maior erit quàm A y, atque A K multo maior. itaque quatuor proportionalium A K, A F, A x, A y minima erit A y, & * conſequenter maxima A K, atque adeo y k compoſita ex maxima & minima maior, quàm F x compoſita ex reliquis. Theor. 1 huius 25 quinti

Et quoniam eſt vt A G ad A C, * ita F x ad C x, & ita k T ad T y, erit vt K T ad T y, ita F x ad C x: & permutando vt k T ad F C, ita T y ad C x videlicet vt tota ad totam, ita ablata ad ablatam; quare & reliqua y k ad reliquam X F, erit vt tota k T ad F C totam, ſed y K oſtenſa eſt maior quàm X F, ergo & k T maior erit, quàm F C. lem. 1

Producatur autem B E donec ſecet circumferentiam k D in H, & connectatur G H, cui parallela agatur C S ſecans ipſam A B in S. rectangu- Corol. lem. 3 16 ſexti
C lum igitur y A k * æquale erit rectangulo S A E; quare vt A K * ad A E, ita erit A S ad A y; ſed A k maior eſt, quam A E, ergo & A S maior erit quam A y: eſt autem & A F maior, quam A y, vt demonſtrauimus, ergo A E multo maior erit, atque A K multo maior. Sic igitur quatuor proportionalium A k, A E, A S, A y minima eſt A y, maxima vero A K, vnde y K compoſita ex maxima & minima * maior, quam S E compoſita ex reliquis. 25 quinti

Et quoniam eſt vt A G ad A C, * ita E B ad B S, & * ita k T ad T y, erit vt K T ad T y, ita E B ad B S: & permutando vt k T ad E B, ita T y ad B S videlicet vt tota ad totam, ita ablata ad ablatam: quare & * reliqua y K ad reliquam S E erit, vt k T ad E B; ſed y k oſtenſa eſt maior, quàm S E, Lem. 1
D ergo k T maior erit, quam E B, eademque ratione oſtendetur ipſa K T omnibus alijs maior. Maxima eſt igitur omnium K T.

Deinde quoniam rectangulum F A x * æquale eſt rectangulo E a S, erit vt A E ad A F, ita A X ad A S; ſed A E maior eſt, quam A F, ergo & A X maior erit, quam A S; ſed a X oſtenſa eſt non maior, quam A F, ergo & A F maior erit, quam a S, atque a E multo maior. itaque quatuor proportionalium a E, a F, a x, a S maxima eſt a S, minima vero a E, atque adeo S E compoſita ex maxima, & minima * maior, quàm x F compoſita ex reliquis. Corol. Lem. 3 16 ſexti 25 quinti

Et quoniam eſt vt a G ad a C, * ita E B ad B S, & ita F G ad c x, erit F C lem. 1

E B ad B S, ita F C ad c x, & permutando vt E B ad F C, ita B S ad c x. videlicet vt tota ad totam, ita ablata ad ablatam; quare & reliqua S E ad reliquam X F erit vt E B ad F C; ſed S E oſtenſa eſt maior, quàm X F, ergo & E B maior erit, quam F C; & ſic quæcumque alia demonſtrabitur maior, quàm ipſa F C. Minima eſt igitur F C. **A**

Sed ducatur per A alia recta P A L ſecans circumferentias T C, k F in punctis P L, circumferentiam vero K D in Q, & ſit P L minimæ C F propinquior, quàm E B, & connectatur G Q, & ei parallela agatur C Z ſecans Coroll. Lem. 3 xvi ſexti rectam P A in Z. Rectangula igitur L A Z, E A S æqualia erunt, & ideo proportionales A L, A E, A S, A Z; ſed A L minor eſt quam A E; ergo & A S minor erit, quam A Z.

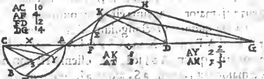
Lem. 1 17 ſexti Et quoniam rectangulum E A S æquale eſt quadrato A I, erunt proportionales A E, A I, A S, ſed A E maior eſt, quam A L, cum ipſa A I non Lem. 10 ſit maior, quàm A F; ergo & A I maior erit, quam A S; itaque ipſa A S minor erit quàm A L, & multo minor, quam A z: eſt etiam minor quam A Z, vt demonſtrauimus, ergo ipſa A S minima erit quatuor proportionalium A L, A E, A S, A z. quare A E maxima, atque S E compoſita ex maxima, & minima maior erit, quam z L compoſita ex reliquis, hoc eſt z L minor, quam S E. **B**

Et quoniam eſt vt A G ad A C, ita E B ad B S, & ita L P ad P z, erit vt L P ad P z, ita E B ad B S, & per conuerſionem rationis vt P L ad L z; ita B E ad E S, & conuertendo vt Z L ad L P, ita S E ad E B, ſed z L oſtenſa eſt minor, quam S E, ergo & L P minor erit, quam E B, hoc eſt propinquior minimæ minor remotiore. quare conſtat propoſitum. **C**

Lemma XII.

Rurſus iiſdem poſitis: ſit autem ratio A D ad A F maior ratione A G ad A C, ergo A I maior erit, quàm A F, minor autem, quàm A k, itaque ducatur à puncto A ad circumferentiam K F recta A M æqualis A I, eaque producatur ad circumferentiam T C in O. Dico maiorem rectarum k T, F C maximam eſſe omniũ, quæ per A tranſeunt, & inter circumferentias k F, T C interijciuntur, minimam vero M O. Aliarum autem propinquiorem minimæ remotiore ex eadem parte, minorem eſſe. **D**

Lem. 10



DVcatur enim per A vtcũq; recta B A E ſecans circũferentias K F, T C in punctis E B; circũferentiam vero K D in N, & connectantur G H, G k, K D, quibus parallelæ agantur c s, c y, y x, ſecantes A B, A T, A C in punctis ſ y x, & ſit primum k T maior, Lem. 3 quàm F c. Quoniam igitur eſt, vt A G ad A C, ita F c ad c x, & ita k T ad T y; erit k T ad T y, vt F c ad c x, & per conuerſionem rationis

erit

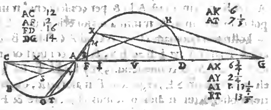
A erit, vt K T ad k y, ita F C ad F X; ſed k T ponitur maior, quam F C, ergo & K y maior erit quam F x.

Et quoniam æqualia ſunt rectangula y A k, F A X, * proportionales erunt Corol. lem. y A, A F, A X, A k, ſed K y compoſita ex extremis oſtenſa eſt maior, quam F x compoſita ex medijs, ergo * altera extremarum y A, A k maxima erit, 16 sexti altera minima; ſed A K non eſt minima, quia maior eſt, quàm A F, ergo maxima erit, & per conſequens A y minima. itaque A y minor eſt, quam A F, & multo minor, quam A E.

Similiter quoniam * æqualia ſunt rectangula E A S, k A y, erit * vt Corol. lem. E A ad A k, ita A y ad A S; ſed A E minor eſt, quàm A K, ergo 16 sexti & A y minor erit, quàm A S. cum igitur A y minor ſit quam A S, &
B minor quam A E, vt demonſtraui, & multo minor, quàm A k, erit ipſa A y minima quatuor proportionalium E A, A k, A y, A S; * maxima vero Theor. 1 huius A K, vnde y K compoſita ex maxima & minima * maior erit, quam S E compoſita ex reliquis.

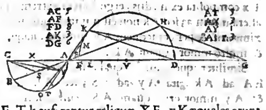
Et quoniam eſt vt A G ad A C * ita E B ad B S, & ita k T ad T y, erit lem. 3 k T ad T y, vt E B ad B S; & per conuerſionē rationis vt K T ad K y, ita erit E B ad E S: & conuertendo vt y k ad K T, ita S E ad E B; ſed y K oſtenſa eſt maior, quàm S E; ergo & K T maior erit, quam E B; & ſic demonſtrabitur omnibus alijs maior. Maxima eſt igitur omnium K T.

Sed ſit F C maior, quā k T. Quoniā igitur eſt vt
C A G ad A C, * ita F C ad C x, & * ita K T ad T y, erit vt F C ad c x, ita K T ad T y, & per conuerſionem rationis vt F C ad F x, ita k T ad k y; ſed F C ponitur maior, quàm k T, ergo & F x maior erit, quam K y; ſed ipſa F x compoſita eſt ex extremis quatuor proportionalium A F, A y, A K, A x; ipſa vero K y ex medijs (conſtat autem eas proportionales eſſe ex eo, quod æqualia ſunt rectangula F A x, y A K) ergo * altera extremarum A F, A x maxima erit, altera Theor. 1 huius
D minima, ſed A F non eſt maxima, quia minor eſt, quam A K, ergo minima erit, vnde A x maxima itaque A x maior erit, quàm A k, & multo maior quam A E. Et quoniam * æqualia ſunt rectangula E A S, F A x, erit * Corol. lem. 16 sexti vt A E ad A F maior nempe ad minorem, ita A x ad A S, quare & A x maior erit, quàm A S, ſed ipſa A x oſtenſa maior, quam A E, & ideo multo maior, quam A F, ergo quatuor proportionalium E A, A F, A x, A S maxima erit A x, vnde A F minima, atque adeo x F compoſita ex maxima, & minima maior, quam S e compoſita ex reliquis.



Et quoniam eſt vt A G ad A C, * ita F C ad c x, & ita E B ad B S, lem. 3 erit vt F C ad c x, ita E B ad E S, & per conuerſionē rationis vt F C ad F x; ita

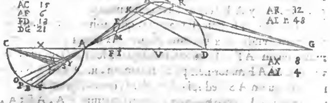
F B ad A S; & conuertendo vt X F ad F C, ita erit S E ad E B, ſed X F oſten- A
ſa eſt maior, quam S E, ergo & F C, quam E B maior erit. Eademque ra-
tione oſtendetur omnibus alijs maior. Maxima eſt igitur omnium F C.



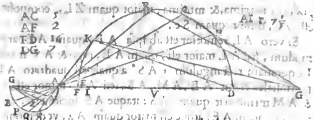
Sed ſint æquales k T, F C. Quoniam igitur eſt
lem. 3. vt A G ad A C, * ita F C
ad C X, & * ita K T ad
T y erit F C ad C x, vt
K T ad T y, ſed propo-
nuntur æquales F C, k T,
ergo æquales erunt & C x,
T y, quæ ſi ab æqualibus C F, T k auferantur reliquæ X F, y K æquales erunt B
ſed X F compoſita eſt ex extremis quatuor proportionalium F A, A y, A k,
A x; ipſa vero y K ex medijs, conſtat autem eas proportionales eſſe ex eo
Corol. Lem. 1 Theor. 5 huius quod * rectangula F A x, y A K ſunt æqualia, ergo * maior extrema maiori
mediæ, minor minori æqualis erit; ſed A F extrema non eſt æqualis mediæ
A k, hæc enim tangit circulum D E I, illa vero ſecat ergo æqualis erit
ipſi A y.

Corol. Lem. 3 16 ſexti Et quoniam * æqualia ſunt rectangula y A K, F A S, erit vt * A y ad A E,
ita A S ad A K; ſed A y cum ſit æqualis A F minor eſt, quàm A E, ergo
& A S minor erit, quàm A k, vnde quatuor proportionalium A y, A E,
Theor. 2 huius A S, A K maxima erit A k, & per conſequens * minima A y; itaque y k com-
poſita ex maxima, & minima maior erit, quàm S E compoſita ex reliquis. C

lem. 3 Poſtremo quoniam eſt vt A G ad A C * ita E B ad B S, & ita k T ad T y,
erit k T ad T y, vt E B ad B S, & per conuerſionem rationis vt k T ad K y,
ita E B ad E S; & conuertendo, vt y k ad k T, ita S e ad E B; ſed y K oſtenſa
eſt maior quam S E, ergo & k T maior erit, quàm E B. Atque eadem ra-
tione oſtendetur maior omnibus alijs. quare & F C, cum ſit æqualis ipſi
k T, erit quoque omnibus maior; itaque vtraque maxima erit. Maior igi-
tur rectarum k T, F C maxima eſt omnium quæ per A ducuntur, & inter
circumferentias k F, T C interijciuntur. quod eſt primum.



Deinde ſe-
cer O M pro-
ducta circum-
ferêtiam K D
in R, & con-
nectatur G R,
eique paralle-
la agatur C N
lem. 3 ſecans rectam O M in N. Rectangulum igitur M A N * æquale erit quadra-
to A I, hoc eſt quadrato A M, ſunt enim æquales A I, A M, quare A M
lem. 3 æqualis erit ipſi A N, & cum rectangulum F A x * æquale ſit quadrato A I,
17 ſexti ſeu quadrato A M, * proportionales erunt A F, A M, A x, ſunt autem &
in-



A inæquales; ergo x F compoſita ex extremis maior erit, quàm dupla media, hoc eſt quam MN. Et quoniam eſt vt A G ad A C* ita F C ad C x, & ita* lem. 3
M O ad O N, erit F C ad c x vt M O ad O N, & per conuerſionem rationis vt F C ad F x, ita M O ad M N; & conuertendo vt x F ad F c, ita N M
B ad M O; ſed x F oſtenſa eſt maior, quam M N, ergo & F c maior erit, quam M O; Æque quoniam rectangulum y A K* æquale eſt quadrato A I, lem. 3 17 ſexti
hoc eſt quadrato A M, *proportionales erunt A k, A M, A y, ſunt autem & inæquales, quare y K compoſita ex extremis, maior erit, quam M N media videlicet dupla; & quoniam eſt vt A G ad A C, *ita k T ad T y, & ita* M O ad O N, erit K T ad T y, vt M O ad O N; & per conuerſionem rationis, vt K T ad K y, ita erit N O ad M N: & conuertendo, vt y k ad K T, ita N M ad M O; ſed y k oſtenſa eſt maior, quàm M N, ergo & K T maior erit, quàm M O.

Eadem ratione quoniam rectangulum E A S* æquale eſt quadrato A I, lem. 1 xvij ſexti
hoc eſt quadrato A M, proportionales erunt A E, A M, A S, ſunt autem
C & inæquales, ergo S E compoſita ex extremis maior erit, quàm dupla media, hoc eſt quam N M. Et quoniam eſt, vt A G ad A C,* ita E B ad B S, Lem. 1
&* ita M O ad O N, erit vt E B ad B S, ita M O ad O N: & per conuerſionem rationis vt E B ad E S, ita M O ad M N; & conuertendo vt S E ad E B, ita N M ad M O; ſed S E oſtenſa eſt maior, quam N M, ergo & E B maior erit, quàm M O, Atque eadem ratione oſtendemus omnes alias maiores eſſe ipſa M O: Minima eſt igitur M O omnium, quæ per A ducuntur, & inter circumferentias K F, T C interijciuntur, quod eſt ſecundum. Poſtremo ducatur per A alia recta P A L ſecans circumferentias T C, k F in punctis P L, ſintque P L, B E ex eadem parte minima M O, & ſit P L ipſi M O propinquior, quàm B E, & producatur P L
D ad circumferentiam k D in Q, & iungatur G Q, eique parallela agatur C Z ſecans P A in Z, *æqualia erunt rectangula L A Z, E A S, & ideo Corol. Lem. 1 xvi ſexti
proportionales A L, A E, A S, A Z: ſi quidem A L propinquior eſt rectæ A F. ſic argumentor, ſed A L minor eſt, quàm A E, ergo & A S minor erit, quam A Z. Et quoniam rectangulum E A S* æquale eſt quadrato A I, lem. 1 xvij ſexti
hoc eſt quadrato A M,* proportionales erunt A E, A M, A S, ſed A E maior eſt, quàm A M, ergo & A M maior erit quam A S, itaque A S minor erit, quàm A L, & multo minor, quàm A E: eſt quoque minor, quam A Z, vt proxime demonſtrauimus, ergo ipſa A S minima erit quatuor proportionalium A L, A E, A S, A Z; maxima vero A E, atque S E, com-

po-

poſita ex maxima, & minima, maior quam Z L, compoſita ex reliquis, hoc A
eſt z L, minor quam S e.

Si vero A L remotior eſt ab ipſa A F, quam A E, argumentor in hunc modum, ſed A L maior eſt, quam A E, ergo & A S maior erit, quam A z. Et quoniam rectangulum E A S* æquale eſt quadrato A I, vel A M, proportionales erunt A E, A M, A S; ſed A E minor eſt, quam A M, ergo & A M minor erit quam A S: itaque A S maior erit, quam A L, & multo maior quam A E: atque eſt maior quam A z, vt demonſtrauimus, ergo ipſa A S maxima erit quatuor proportionalium A L, A E, A S; A z, &* conſequenter A E minima atque adeo S e compoſita ex maxima & minima maior, quam z L compoſita ex reliquis, hoc eſt z L minor, quam S e. quod etiam demonſtrauimus & ſupra. B

Theor. 1 huius

Et quoniam in vtroque Caſu eſt vt A G ad A C, *ita E B ad B S, & ita L P ad P z, erit vt L P ad P z, ita E B ad B S, & per conuerſionem rationis vt P L ad L z, ita B E ad E S; & conuertendo vt z L ad L P, ita S E ad E B; ſed z L oſtenſa eſt minor, quam S E, ergo & L P minor erit, quàm E B, hoc eſt propinquior minimæ minor remotiore, quod tertio loco erat oſtendendum.

Lem. 1

Corollarium.

Cum igitur propinquiores minimæ remotioribus ex eadem parte minores ſint; manifeſtum eſt K T maximam eſſe omnium, quæ inter circumferentias k M, T O interijciuntur. Earum autem, quæ interijciuntur inter circumferentias M F, O C maximam eſſe F C. C

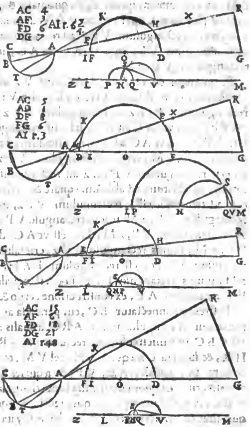
Compoſitio quarti Caſus.

Sint dati duo ſemicirculi A B C, D E F, quales in præſenti Caſu ponuntur; data autem recta linea V z, & contingat A k ſemicirculum D E F in k, ſemicirculum vero A B C ſecet in T. Oportet inter circumferentias T C, K F ponere rectam lineam æqualem V Z, ita vt ad punctum A pertineat. Oportebit autem ipſam V Z non eſſe maiorem maxima rectarum, quæ ad punctum A pertinentes, inter circumferentias T C, K F interijciuntur, neque minorem minima, quæ autem ſit maxima, quæue minima iam eſt demonſtratum. D

Si igitur data V Z ſit æqualis maximæ, factum iam erit quod proponitur; & enim maxima eſt ea, quæ maior eſt rectarum k T, F C: ſi vero ſit æqualis minimæ, minima autem ſit ea, quæ minor eſt ipſarum K T, F C: itidem factum erit quod proponitur.

Si autem neutra dictarum k T, F C ſit minima, inuenta minima Problemati ſatisfiet. inuentio autem minimæ conſtat ex Lemmate 16. Si autem V Z minor ſit maxima, maior minima, ſumatur ex centro circuli D E F, quod ſit O recta O G æqualis O C, & fiat vt A G ad A C, ita quadratum A k ad aliud quadratum, quod ſit A I. Similiter fiat vt A G ad A C, ita

V Z



A VZ ad aliam quæ ſit ZL, & ſit ipſarum VZ, ZL differentia LV, quæ ſecetur bifariam in N. Cum igitur à quadrato NV debeat auferri quadratum AI, vt Poriſma præcipit deſcribatur in VN ſemicirculus, in quo accomodetur VS æqualis AI infra demonſtrabitur ipſa AI minor, quam VN, & cõnectatur SN. Quadratum igitur NV ſuperat
B quadratum SV quadrato SN angulus enim NSV in ſemicirculo rectus eſt. Itaque rectæ VN addenda eſt, vel auferenda recta æqualis NS. ſic Poriſma fieri iubet, addatur ergo, vel auferatur prout ſequentia præcepta docebunt, eaque aucta, vel diminuta ſit VP cui æqualis ducatur à pũcto A ad circumferentiã KF
C recta AE, & producatur donec ſecet ſemicirculum ABC in B. ipſam autem VP non eſſe minorem minore rectarum AF, Ax, nec maiorem maiore, tribus quæ ſequuntur Lemmatibus manifeſtum fiet. Iam facta eſt conſtructio Problematis. Nunc oſtendemus repetendo Reſolutionis veſtigia EB æqualem eſſe VZ datæ.

Secet recta AE vel continuata, circumferentiam KD in H, & centro N interuallo NS vel NP deſcribatur circulus ſecans VL in Q. is circulus tan-
D get rectam SV in S, ac proinde quadratum SV æquale erit rectangulo PVQ, vel VPL, ſeu quod idem eſt rectangulo VPZ, minus rectangulo VP, LZ; punctum enim L eſt inter puncta PZ, nam NP cum, ſit æqualis NS, maior eſt diametro NV, hoc eſt ipſa NL: ſi igitur fiat vt AC ad AG, ita vtraque æqualitatis pars ad alias partes itidem manebit inter eas partes æqualitas. At quoniam eſt vt AG ad AC, ita quadratum AK ad quadratum AI, ex conſtructione; erit conuertendo, vt AC ad AG, ita quadratum AI, hoc eſt quadratum SV, ad quadratum AK; quadratum igitur AK erit vna pars æqualitatis, alteram vero ſic explorabimus.

Fiat vt AC ad AG, hoc eſt vt LZ ad ZV, ita PZ ad aliam, quæ ſit

ZM:

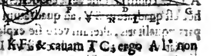
Z M: ea erit maior, quam Z V, quoniam & P Z maior eſt, quam L Z; A
cum ſit punctum L inter puncta P Z, vt demonſtrauimus. vt autem P Z ad z M, ita eſt rectangulum V P z ad rectangulum V P, z M; ſunt enim eiuſdem altitudinis V P, ergo vt A C ad A G, ita erit rectangulum V P z ad rectangulum V P, z M.

Et quoniam eſt vt A G ad A C, ita V z ad z L, ex conſtructione; erit conuertendo, vt A C ad A G, ita L z ad z V: vt autem L z ad z M, ita eſt rectangulum V P, L z ad rectangulum P V z; ſunt enim eiuſdem altitudinis V P, ergo vt A C ad A G, ita erit rectangulum V P, L z ad rectangulum P V Z; ſed vt A C ad A G, ita oſtenſum eſt rectangulum V P z ad rectangulum V P, z M, ergo vt rectangulum V P z ad rectangulum V P, z M, ita erit rectangulum V P, L z ad rectangulum P V z; nempe vt totum ad B
19 quinti totum, ita ablatum ad ablatum; quare & * reliquum ad reliquum erit vt totum ad totum, ideſt & rectangulum V P z, minus rectangulo V P, L z, ad rectangulum V P, z M minus rectangulo V P z, erit vt rectangulum V P z ad rectangulum V P, z M, hoc eſt vt A C ad A G. Itaque rectangulum V P, z M, minus rectangulo P V z, erit altera pars æqualitatis. Quadratum igitur A K hoc eſt rectangulum E A H, æquale erit rectangulo V P, z M, minus rectangulo P V z, hoc eſt æquale erit rectangulo P V M, ſed P V æqualis eſt A E, ex conſtructione, ergo & V M æqualis erit A H.

Poſtremo connectatur B C, cui parallela agatur G R occurrens A E continuatæ in R, angulus igitur A R G æqualis erit angulo A B C, ſed rectus
lem. ij. eſt A B C in ſemicirculo, ergo rectus erit & A R G; quare * æquales erunt E B, C
H R, & ſumpta E x æquali A H, vel V M; tota B x æqualis erit toti A R, & cum ſint æquales A E, V P, & æquales E x, V M, tota A x toti P M æqualis erit. Et quoniam ſimilia ſunt triangula A B C, A R G, anguli enim A B C, A R G ſunt æquales, quia recti, & æquales quoque B A C, R A G, quia ſunt ad verticem, erit vt A C ad A G, ita A B ad A R; ſed vt A C ad A G, ita eſt quoque P z ad z M, ex conſtructione, ergo vt A B ad A R, hoc eſt ad B x, ita erit P z ad z M; & permutando, vt A B ad P z, ita B x ad z M, videlicet vt pars ad partem, ita tota ad totam; quare & reliqua A x
19 quinti ad reliquam * M P erit, vt tota B x ad totam M z; ſed A x æqualis eſt M P, ex conſtructione, ergo & B X æqualis erit z M, ſed E x æqualis eſt V M ex
[illegible] conſtructione ergo & reliqua E B reliquæ V z æqualis erit. Poſita eſt igi- D
tur inter circumferentias K F, T C recta E B æqualis datæ V z, eaque ad punctum A pertinet; quod erat faciendum.

At vero rectam A I minorem eſſe, quam V N ſic demonſtrabimus.

Hanc demonſtrationem in duas partes diuidam, aut enim A D ad A F maiorem rationem habet, quam A G ad A C, aut non maiorem. primum habeat non maiorem, & F C ſit intercepta inter conuexam circumferentiam K F, & cauam T C, ergo A I non
Lem. 10



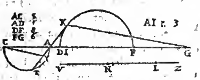
erit

A erit maior, quàm A F, atque F C* minima erit omnium interceptarum inter circumferentias K F, T C. Connectantur autem G k, K D, eiſque parallelæ agantur c y, y x ſecantes A T, A C in punctis y x. Rectangulum igitur F A x* æquale eſt quadrato A I, & ideo* proportionales F A, A I, A x, vnde F x compoſita ex extremis non erit minor, quàm dupla media A I. lem. 13 lem. 9 17 huius

Et quoniam eſt vt A G ad A C, ita V z ad z L, ex conſtructione, &* ita F c ad c x, erit vt F c ad c x, ita V z ad z L: & per conuerſionem rationis, vt C F ad F x, ita erit z V ad V L; ſed C F cum ſit omnium interceptarum minima minor eſt, quam z V: ponitur enim z V maior minima, ergo & F x minor erit, quam V L; ſed F x oſtenſa eſt maior, quam A I dupla, ergo A I dupla minor erit, quam V L, & conſequenter A I

B ſimplex minor, quam V N, dimidia videlicet ipſius V L.

Sed ſit F C intercepta inter cauas circumferentias k F, T C, ergo* k T minima eſt omnium, quæ inter dictas circumferentias intercipiuntur. Connectatur autem G k, & ei parallela agatur c y ſecans A T in y: rectan- Lem. 11



gulum igitur y A k,* æquale erit quadrato A I. & ideo* proportionales erunt y A, A I, A K; ſunt autem & inæquales, quia A I* minor, eſt quam A K; ergo y k compoſita ex extremis maior eſt, quàm A I dupla. Et quoniam eſt vt A G ad A C,* ita k T ad T y, & ita V z ad Z L, ex conſtructio- lem. 1 & lem. 1 lem. 10 Lem. 3

C ne, erit K T ad T y vt V Z ad Z L, & per conuerſionem rationis vt T K ad k y, ita erit Z V ad V L, ſed K T cum ſit omnium interceptarum minima minor eſt, quàm Z V, ergo & k y minor erit, quàm V L; ſed k y oſtenſa eſt maior, quam dupla A I, ergo A I dupla minor erit, quàm V L, & conſequenter A I ſimpla minor, quam V N dimidia videlicet ipſius V L.

Sed habeat A D ad A F maiorem rationem, quam A G ad A C ergo* A I maior erit, quam A F, minor autem, quàm A K: itaque à puncto A ad circumferentiam k F poterit duci recta æqualis A I; ducatur igitur, eaque ſit lem 10



D A M, & producta ſecet circumferentiam T C in O, ergo* M O minima eſt omnium interceptarum inter circumferentias k F, T C. Producatur quoque ipſa A M vſque ad circumferentiam k D in H, & connectatur G H, cui parallela agatur C R ſecans A O in R: rectangulum igitur M A R æquali erit quadrato A I, hoc eſt quadrato A M; quare æquales erunt A R, A M. lem. 13

Et quoniam eſt vt A G ad A C ita M O ad C R, & ita V Z ad Z L, ex conſtructione, erit vt M O ad O R, ita V Z ad Z L, & per conuerſionem rationis, vt O M ad M R, ita Z V ad V L. ſed C M cum ſit omnium interceptarum minimà, minor eſt quàm Z V ponitur enim Z V maior mi-

nima,

nima, ergo & MR minor erit, quam VL, & conſequenter AM, vel AI minor, quam VN dimidia videlicet minor, quam dimidia. quare conſtat propoſitum. A

Quo autem Caſu rectæ VN addenda ſit recta æqualis NS, quoue auferenda ratio his conſtat præceptis.

Præceptum I.

SI ratio AD ad AF non ſit maior ratione AG ad AC, rectæ VN addenda eſt recta æqualis NS.

Præceptum II.

SI ratio AD ad AF maior ſit ratione AG ad AC, data autem VZ non ſit maior minore rectarum KT, FC, rectæ VN poterit ſiue addi, ſiue auferri recta æqualis NS: in hoc enim Caſu recta æqualis datæ VZ poteſt aptari inter circumferentias kF, TC ex vtraque parte minimæ, & ideo duobus modis Problema abſolui. Nam ſi auferatur aptabitur ea recta è regione FC; ſi vero addatur aptabitur è regione kT. B

Præceptum III.

SI vero data VZ maior ſit minore rectarum kT, FC, recta ipſi VZ æqualis poterit aptari inter circumferentias kF, Tc ex vna tantum parte minimæ, nempe è regione maioris rectarum KT, Fc, itaque exiſtente kT maiore, quam FC, rectæ VN addenda eſt recta æqualis NS, exiſtente minore, auferenda. C

Reſtat vt recta VP ſumpta, quemadmodum præcepta docent, oſtendatur non minor minore rectarum AF, AK, nec maior maiore, quo circa tria Lemmata proferuntur.

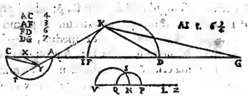
Lemma XIII.

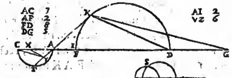
Sit ratio AD ad AF non maior ratione AG ad AC. Dico VP compoſitam ex, VN, NS maiorem eſſe minore rectarum AF, AK, minorem autem maiore.

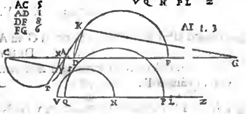
D

AVt enim recta FC intercepta eſt inter conuexam circumferentiam KF, & cauam TC: quo Caſu AF minor eſt, quam Ak; aut inter vtramque cauam, quo Caſu AF maior eſt quam AK. Primo Caſu KT *maximam eſt omnium, quæ inter circumferentias KF, TC intercipiuntur, minima vero FC, itaque VZ data minor eſt quam KT, maior quam FC, ponitur enim VZ minor maxima, maior minima. Secundo autem Caſu *minima eſt KT, maxima FC; vnde VZ data maior eſt, quam KT, minor quam FC.

Connectantur autem GK, kD, eiſque parallelæ agantur cy, yx ſecan-







A cantes A T, A C in punctis y x. Quoniam igitur eſt vt A G ad A C, ita V Z ad Z L ex conſtructione, & ita * F C ad c x, erit vt V Z ad Z L, ita F C ad c x; & per conuerſionem rationis vt Z V ad V L, ita C F ad F x, ſed z V in primo quidem Caſu ponitur maior, quàm F C, ergo & V L maior erit, quam

B F x. In ſecũdo vero Caſu ponitur Z V minor, quã c F, ergo & V L minor erit, quã Fx.

Et quoniam æquales ſunt L N, N V, ex conſtructione, & æquales quoque N P, N Q vt ſemidiametri, ideo fiunt quoque æquales L P, V Q; quare rectangulum P V Q æquale eſt rectangulo V P L, ſed rectangulum P V Q * æquale eſt quadrato V S, hoc eſt quadrato A I, cui quoque * æquale eſt rectangulum F A x, ergo rectangulum V P L æquale eſt rectangulo F A x. 36 tertij Lem. 5

C quare * proportionales ſunt V P, F A, A x, P L, in primo quidem Caſu ſic argumentor, ſed V L compoſita ex extremis oſtenſa eſt maior, quam F x compoſita ex medijs, ergo * altera extremarum V P, P L maxima erit, altera minima; ſed V P maior eſt, quam P L, ergo ipſa V P maxima erit, & conſequenter maior quam A F. 16 ſexti Theor. ij huius

In ſecundo autem Caſu argumentor in hunc modum. ſed V L compoſita ex extremis V P, P L oſtenſa eſt minor, quam F x, compoſita ex medijs. F A A x, ergo * altera mediarum F A, A x maxima erit altera minima, ſed A x maior eſt, quam A F, nam cum rectangulum F A x * æquale ſit quadrato A I, & recta A I minor, quam A F erit A x multo minor, ergo ipſa A F maxima erit, atque adeo V P, minor, quam A F, Theor. ij huius lem. 5

D Rurſus quoniam eſt vt A G ad A C, ita V Z ad Z L, ex conſtructione, & ita * K T ad T y, erit vt V z ad z L, ita K T ad T y: & per conuerſionem rationis, vt z V ad V L, ita T K ad K y, ſed z V, in primo quidem Caſu ponitur minor, quam T Q. ergo & V L minor erit, quam k y: in ſecundo vero Caſu z V ponitur maior, quam T K, ergo & V L maior erit, quam k y. lem. 9

Et quoniam rectangulum y A K * æquale eſt quadrato A I, & recta A I * minor, quam A K: erit A y multo minor. lem. 5 Lem. 10

Et quoniam rectangulum P V Q, hoc eſt V P L, * æquale eſt quadrato V S, hoc eſt quadrato A I, cui quoque * æquale eſt rectangulum y A K æqua- 36 tertij lem. 1

R lia

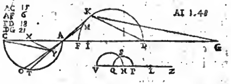
15 ſexti lia erunt rectangula y A k, V P L, & ideo* proportionales V P, y A, A K, P L. ſed V L compoſita ex extremis in primo quidem Caſu oſtenſa eſt minor, quam k y compoſita ex medijs, ergo* altera mediarum y A, A K maxima erit, altera minima ſed; A y oſtenſa eſt minor, quam A K, ergo A k maxima erit, & per conſequens V P minor, quam A K. A

Theor. 2 huius In ſecundo vero Caſu V L compoſita ex extremis V P, P L oſtenſa eſt maior, quàm K y compoſita ex medijs; ergo* altera extremarum V P, P L maxima erit, altera minima; ſed V P maior eſt, quam P L, ergo ipſa V P maxima erit, atque adeo maior, quàm A K. Exiſtente igitur ratione A D ad A F, non maiore, quam A G ad A C, recta V P compoſita ex V N, N S maior erit minore rectarum A F, A K minor maiore. quod erat oſtendendum. B

Lemma XIV.

Sit ratio A D ad A F maior ratione A G ad A C, data autem V Z non maior minore rectarum K T, F C. Dico neque compoſitam ex V N, N S, neq; differentiam earundem maiorem eſſe, quàm a k, aut minorem, quàm a F.

Sit enim V P æqualis compoſitæ ex v N, N S. v Q vero æqualis differentiæ earundem, & connectantur G k, k D, eisq. parallelæ agantur c y y x, ſecantes a T, a C in punctis y x.



Lem. 3 Quoniam igitur eſt, vt a G ad a C,* ita k T ad T y, & ita v Z ad z L, ex conſtructione, erit vt v Z ad z L, ita k T ad T y, & per conuerſionem rationis, vt Z v ad v L, ita erit T K ad K y; ſed Z v non eſt maior, quam T k, ponitur enim Z v non maior minore rectarum KT, F C, ergo neque v L maior erit, quam K Y. Et cum ſit rectangulum C

Lem. 1 lem. 10 y A K* æquale quadrato a I, & recta a I* minor, quam a K, erit a y multo minor.

Lem. 1 Et quoniam rectangulum P v Q, hoc eſt v P L ſunt enim æquales v Q, P L, æquale eſt quadrato v S, hoc eſt quadrato a I, cui quoque* æquale eſt rectan-

xvij ſexti gulum y a k, æqualia erunt rectangula v P L, y a K, & ideo* proportionales v P, y a, a k, P L, ſed v L compoſita ex extremis oſtenſa eſt non maior, quam k y, compoſita ex medijs, ergo ſi eſt minor, erit altera mediarum y a, a k maxima, altera minima; ſed A y oſtenſa eſt minor, quam a k, ergo a k maxima erit, & per conſequens V P minor quam a k. D

Theor. 1 huius Si vero V L compoſita ex extremis æqualis eſt y k compoſita ex medijs, maior* extremarum maiori mediarum æqualis erit, hoc eſt V P æqualis a k. Ipſam autem v P non eſſe minorem, quam a F manifeſtum eſt, nam cum v P,

Lem. 10 maior ſit, quã v S, hoc eſt quam a I, ipſa autẽ a I* maior, quam a F, erit v P multo maior: Recta igitur v P æqualis cõpoſitæ ex v N, N S non eſt maior quã a k,

nec

A nec minor quam A F, quod eſt primum.

Deinde quoniam V Q minor eſt quam V S hoc eſt, quam A I, ipſaque A I * minor, quàm A K; erit V Q multo minor: ſupereſt igitur vt ipſa V Q oſtendatur non minor, quam a F: id autem ita fit maniſeſtum. lem. 10

Quoniam enim vt a G ad a C * ita eſt F C, ad C x, & ita quoque V Z ad Z L, ex conſtructione, erit vt V Z ad Z L, ita F C ad c x, & per conuerſionem rationis vt Z V ad V L, ita C F ad F x; ſed Z V non eſt maior, quam C F: ponitur enim Z V non maior minore rectarum K T, F C, ergo neque V L maior erit, quàm F x. Et cum rectangulum F A x * æquale ſit quadrato a I, & recta a I * maior, quam F a; erit A x multo maior. lem. 8 Lem. 1 lem. 10

Et quoniam rectangulum Q V P, vel V Q L; ſunt enim æquales V P, B Q L, * æquale eſt quadrato V S, hoc eſt quadrato a I, cui quoque æquale eſt rectangulum F A x, ipſa rectangula V Q L, F A x æqualia erunt, & ideo * proportionales V Q, F a, A x, Q L: ſed V L compoſita ex extremis oſtenſa eſt non maior, quàm F x compoſita ex medijs, ergo * ſi eſt minor, erit * altera mediarum F A, A x maxima, altera minima; ſed A x oſtenſa eſt maior, quàm F A, ergo ipſa F A minima erit, & conſequenter V Q maior, quam A F. Si vero V L compoſita ex extremis æqualis eſt F x compoſitæ ex medijs, minor extremarum * minori mediarum æqualis erit, hoc eſt V Q æqualis A F. Recta igitur V Q differentia rectarum V N, N S non eſt minor, quàm A F, nec maior, quam A K, quod ſecundo loco erat oſtendendum. 36 tertij 16 ſexti Theor. 2 huius Theor. 8 huius

C

Scholium.

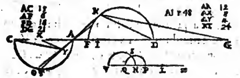
Ex demonſtratis igitur manifeſtum eſt ſi A D ad A F maiorem rationem habeat, quàm a G ad a C. data autem V Z non ſit maior minore rectarum k T, F C, Problema duobus modis abſolui poſſe; nam ſi à puncto A ad circumferentiam k F ducatur recta a M æqualis a I, & producatur ad circumferentiam T C in O, erit * M O minima omnium, quæ inter circumferentias k F, T C interijciuntur. Et cum V P compoſita ex V N, N S oſtenſa ſit maior, quàm a I, hoc eſt quam a M, non autem quam a k; poterit à puncto A ad circumferentiam K M duci recta a E, æqualis V P. Similiter cum V Q differentia rectarum V N, N S oſtenſa ſit minor, quàm D a M, non autem quàm a F, poterit à puncto A ad circumferentiam M F duci recta a E æqualis V Q. Itaque ſi à puncto A ad circumferentiam K F ducatur a E æqualis V P compoſitæ ex V N, N S, aptabitur recta datæ V Z æqualis inter circumferentias K M, T O. Si vero ducatur a E æqualis V Q differentiæ ipſarum V N, N S aptabitur ea recta inter circumferentias M F, O C, atque adeo poterit aptari ex vtraque parte minimæ M O, & ideo Problema duobus modis abſolui, quod in præcepto ſecundo monuimus. lem. 11

Lemma X V.

A

Rurſus ſit ratio AD ad AF maior ratione AG ad AC. Sed data VZ ſit maior minore rectarum KT, FC, & à puncto A ad circumferentiam KF ducatur AM æqualis AI, & producatur ad circumferentiam TC
lem. 4 in O est* autem AI maior, quam AF, minor autem quam AK. Dico ſi KT maior ſit, quam FC, compoſitam ex VN, NS minorem eſſe, quã Ak, maiorem quam AM; ſin minor, differentiam rectarum VN, NS maiorem eſſe, quam AF, minorem quam AM.

SIt enim VP æqualis compoſitæ ex VN, NS, VQ vero æqualis differentiæ earundem, & cõnectantur GK, kD, eiſque parallelæ agantur cy, yx ſecantes AT, AC in punctis yx, & ſit primum kT maior quàm FC, ergo ipſa KT* maxima eſt omnium interceptarum inter circumferentias KF, TC; quare recta ipſi VZ æqualis poterit aptari inter circumferentias KM, TO, non etiam inter circumferentias MF, OC, cum ſit VZ maior quam FC, expoſitione, ipſaq. FC * maxima omnium interceptarum inter circumferentias MF, OC.



B

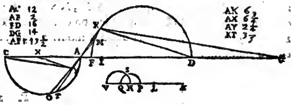
lem. 12 Et quoniam eſt, vt AG ad AC,* ita KT ad Ty, & ita quoque VZ ad ZL ex conſtructione, erit vt VZ ad ZL, ita KT ad Ty, & per conuerſionẽ rationis vt ZV ad VL, ita TK ad ky; ſed ZV minor eſt, quàm TK: ea enim ponitur minor maxima, ergo & VL minor erit, quam ky, & cum ſit rectangu-
lem. 10 lum yAK* æquale quadrato AI, & recta AI* minor, quàm AK, erit Ay multo minor.

C

Et quoniam rectangulum PVQ, hoc eſt VPL (ſunt enim æquales VQ, PL)* æquale eſt quadrato VS, vel quadrato AI, cui quoque* æquale eſt rectangulum yAk, ideo æqualia erunt rectangula VPL, yAk, ac proinde* proportionales VP, yA, Ak, PL; ſed VL compoſita ex extremis
Theor. huius oſtenſa eſt minor, quàm ky compoſita ex medijs, ergo* altera mediarum yA, AK maxima erit, altera minima; ſed ay oſtenſa eſt minor, quàm aK, ergo aK maxima erit, & conſequenter VP minor, quàm AK. Ipſam autem VP maiorem eſſe, quam aM manifeſtum eſt. Nam VP maior eſt, quam VS, cui æqualis eſt aI, vel aM ex conſtructione. Exiſtente igitur KT maiore, quàm FC recta VP æqualis compoſitæ ex VN, NS minor eſt, quàm aK, & maior, quam aM, quod eſt primum.

D

Sed ſit KT minor quam FC, ergo FC,
lem. 11 * maxima eſt omniũ interceptarum inter circumferentias, kF, TC, quare recta datæ VZ



A VZ æqualis poteſt aptari inter circumferentias M F, O C, non etiam inter circumferentias K M, T O, cum ſit V Z maior, quàm k T, ex poſitione; ipſa autem K T maxima omnium, quæ inter circumferentias K M T O interijciuntur.

Et quoniam eſt vt A G ad A C, ita * F C ad c x, & ita V Z ad Z L ex conſtructione, erit vt V Z ad Z L, ita F c ad c x: & per conuerſionem rationis, vt z V ad V L, ita C F ad F x, ſed z V minor eſt, quàm F c: ea enim ponitur minor maxima, ergo & V L minor erit, quam F x. Et cum ſit rectangulum F A X * æquale quadrato A I, & recta A I * maior, quam A F, erit A X multo maior. Lem. 1 lem. 8 lem. 10

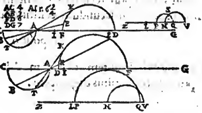
Denique quoniam rectangulum Q V L, vel V Q L * æquale eſt quadrato V S, hoc eſt quadrato A I, cui quoque * æquale eſt rectangulum F A F, rectangula V Q L, F A X æqualia erunt, & ideo * proportionales V Q, F A, A x, Q L; ſed V L compoſita ex extremis, oſtenſa eſt minor, quam F x compoſita ex medijs, ergo * altera mediarum F A, A x maxima erit, altera minima; ſed A x oſtenſa eſt maior, quam A F, ergo ipſa F A minima erit: vnde V Q maior, quàm A F. Ipſam autem V Q minorem eſſe, quàm A M conſtat ex eo, quod ea minor eſt, quàm V S, cui æqualis eſt A I, vel a M, ex conſtructione. Exiſtente igitur K T minore, quàm F C; recta V Q æqualis differentiæ rectarum V N, N S maior eſt, quàm A F; minor autem quam a M; quod ſecundo loco erat oſtendendum. 16 tertij; B lem. 8; Theor. 2 huius

Reſolutio huiuſce quarti Caſus, quemadmodum & tertij, incidit in æquationem de duobus terminis explicabilem, quorum maior eſt aggregatum rectarum V N, N S, minor differentia earundem. Et quoniam non ſemper vterque indicat A E quæſitam, ideo hic quoque oſtendam quomodo terminus quæſitam a E indicans dignoſcatur. C

Propoſitio I.

Terminum indicantem quæſitam A E in ſemicirculis ad primum præceptum pertinentibus dignoſcere.

SIt ratio A D ad A F non maior ratione a G ad a C. Oportet terminum indicantem quæſitam A E dignoſcere. Reſumantur compoſitionis figuræ ad huiuſmodi Caſum pertinentes. Quoniam igitur termini de quibus æquatio explicabilis eſt, ſunt V P aggregatum rectarum V N, N S, & V Q differentia earundem, ideo manifeſtum eſt alterum eorum quæſitam A E indicare; & quoniam ratio A D ad a F poni tur non maior ratione a G ad a C, recta A I non * erit minor minore rectarum A F, A k, vnde A E quæſita maior erit, quam A I, D lem. 10

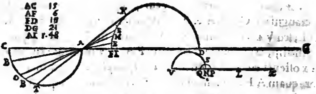


hoc eſt quam V S, & multo maior quam V Q, ipſa igitur V Q non indicat quæſitam A E, ergo eam indicat V P. Exiſtente igitur ratione A D ad A F non maiore, ratione A G ad A C, aggregatum rectarum V N, N S indicat quæſitam A E. Itaque agnitus eſt terminus quaſitam A E indicans, vt faciendum erat. Hinc præceptum primum conſtitutum eſt. A

Propoſitio I I.

Terminum indicantem quæſitam A E in ſemicirculis ad ſecundum præceptum pertinentibus dignoſcere.

SIt ratio AD ad AF maior ratione A G ad A C, & data VZ neutra rectarum KT, F C ſit B



maior. Oportet terminum quæſitam A E indicantem dignoſcere. Reſumatur Compoſitionis figura ad huiuſmodi caſum pertinens. Quoniam igitur termini de quibus æquatio explicabilis eſt ſunt V P, aggregatum rectarum V N, N S, & V Q differentia earundem, manifeſtum eſt alterum eorum indicare quæſitam A E. Ducatur à puncto A ad circumferentiam k F recta A M æqualis A I, vel V S, hoc autem poteſt fieri, nam A I maior eſt, quam A F, minor autem quam A k: aut igitur quæſita A E definit in circumferentia M F, aut in circumferentia M K: ſi in M F, ea erit maior quam A M, hoc eſt quam V S, & multo minor quam V P. Recta igitur V P non indicat quæſitam A E, ergo V Q eam indicat. C

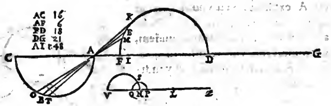
num. 10

Si vero quæſita A E definit in circumferentia M k, ea maior erit, quam A M, hoc eſt quam O S, & multo maior, quam V Q. ipſa igitur V Q non indicat quæſitam A E, ergo V P eam indicat. Itaque exiſtente ratione A D ad A F maiore, quam A G ad A C, & data V Z non maiore minore rectarum k T, F C indicat quæſitam A E, tum differentia, tum aggregatum rectarum V N, N S; differentia quidem cum A E definit in circumferentia M F, aggregatum vero cum definit in circumferentia k M. Agnitus eſt igitur terminus quæſitam A E indicans, vt faciendum erat. Hinc præceptum ſecundum conſtitutum eſt. D

Propoſitio I I I.

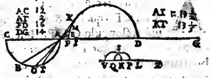
Terminum indicantem quæſitam AE in ſemicirculis ad tertium præceptum pertinentibus dignoſcere.

Rur-



A RVrſus ſit ratio A D ad A F maior ratione A G ad A C, ſed data V Z ſit maior minore rectarum K T, F C. Oportet terminum indicantem quæſitam A E dignoſcere. Fiat conſtructio vt in antecedenti propoſitione & producatur M A, vſque ad circumferentiam T C in O, ergo M O* minima
B erit omnium, quæ inter circumferentias k F, T C interijciuntur. Manifeſtum eſt igitur rectam datæ V Z æqualem poſſe aptari inter circumferentias ſemicirculum ex vna tantum parte minimæ, nempe è regione maioris rectarum k T, F C. Itaque ſit primum k T maior, quàm F C. ergo recta æqualis datæ V z poterit aptari inter circumferentias k M, T O; non etiam inter circumferentias M F, O C, cum ſit V Z maior, quam F C ex poſitione, ipſaq. F C* maxima omnium, quæ inter circumferentias M F, O C intercipiuntur; itaque A E quæſita terminabitur in circumferentia K M, & ideo maior erit, quam A M, hoc eſt quam A I, ſeu quam V S, & multo maior quam V Q, quæ æqualis eſt differentiæ rectarum V N, N S: Terminus igitur V Q non indicat quæſitam A E, ergo eam indicat V P æqua- Corol. lem. 11
C lis aggregato ipſarum V N, N S.

Sed ſit K T minor, quam F C, ergo recta æqualis datæ V Z poterit aptari inter circumferentias M F, O C, non autem inter circumferentias K M, T O, cum ſit V Z maior, quàm K T, quæ eſt* maxima omnium inter circumferentias K M, T O interceptarum, atque A E quæſita terminabitur in circumferentia M F, vnde minor erit, quam A M, hoc eſt quàm A I, ſeu quam V S, & multo minor, quàm V P; terminus igitur V P non indicat quæſitam A E, ergo eam indicat V Q. Cum igitur ratio A D ad A F Corol. lem. 11



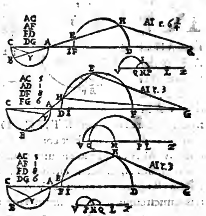
D maior ſit, quam A G ad A C, & data V Z maior minore rectarum K T, F C exiſtente K T maiore, quam F C, aggregatum rectarum V N, N S indicat A E quæſitam; exiſtente vero minore differentia. Agnitus eſt igitur terminus quæſitam A E indicans, vt faciendum erat.

Hinc præceptum tertium conſtitutum eſt.

Supereſt vt oſtendamus quemadmodum factum eſt in præcedenti Caſu, nempe indicante vno terminorum quæſitam A E, quid indicet terminus alter.

Reſumantur Compoſitionis figuræ, & connectatur G H, eique parallela agatur c y ſecans A B in y. Duos terminos, Poriſma conſtituit, de quibus

bus A explicabilis eſt vnum quidem aggregatum rectarum V N, N S. alterum vero differentiam earundem, Dico indicante vno terminorũ quæſitam A E, alterum rectæ A y indicem eſſe. A



Indicet enim quæſitam A E terminus V P, ſiue ſit æqualis aggregato rectarum V N, N S, ſiue differentiæ. Quoniam igitur rectangulum E A y [a] æquale eſt quadrato A I, & rectangulum P V Q [a] æquale quadrato V S, quæ quidem quadrata æqualia ſunt, quod & rectæ A I, V S ſunt æquales, ex conſtructione; ideo rectangulum P V Q æquale erit rectangulo E A y; ſed V P indicans quæſitam A E æqualis eſt ipſi A E, ergo & V Q æqualis erit A y: itaque recta V Q, quæ eſt alter terminus indicat rectam A y. B

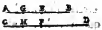
Lem. 3 ex tertij

Indicante igitur vno terminorum V P, V Q quæſitam A E, alter rectam A I indicat; quod erat oſtendendum.

Lemma XVI.

Si à duabus rectis lineis abſcindantur duæ rectæ æquales, rectangulum autem contextum prima & reliqua parte eiuſdem ſit minus eo, quod ſecunda, & reliqua parte eiuſdem continetur, prima minor erit, quam ſecunda, & reliqua pars prima minor, quàm reliqua pars ſecundæ. C

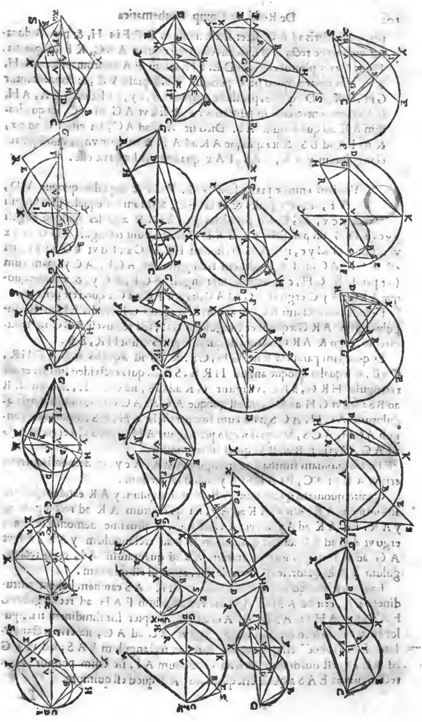
A Duabus rectis A B, C D abſcindantur rectæ A E, C F æquales, & rectangulum A B E ſit minus rectangulo C D F. Dico A B minorem eſſe quam C D, itemque E B minorem, quam F D. Secentur enim A E, C F bifariam in G H, erunt æquales G E, H E, vnde & earum quadrata æqualia erunt, ſed cum rectangulum A B E minus ſit rectangulo C D F, ſic enim ponitur, erit ipſum rectangulum A B E, vna cum quadrato G E, minus rectangulo C D F vnà cum quadrato H F; ſed rectangulum A B E vna cum quadrato G E [b] æquale eſt quadrato G B; ſimiliter & rectangulum G D F, vnà cum quadrato H F [b] æquale quadrato H D, ergo quadratum G B, minus erit quadrato H D: vnde & recta G B minor, quam recta H D, & additis æqualibus A G, C H, tota A B minor erit, quàm C D tota atque ablatis æqualibus G E, H F, reliqua E B minor erit, quam reliqua F D, quare conſtat propoſitum. D



6 ſecundi

Lemma XVII.

Sint duo ſemicirculi A B C, D E F in directum baſes habentes, & recta A K per-



perpendicularis ad A C. ſecet ſemicirculum D E F in H, & per A ducatur vtcumque recta A B E ſecans circumferentias A B C, K F in punctis D E, & compleatur circulus D E, F H, quem E A continuata ſecet in H, & ex eius centro, quod ſit V ponatur V G æqualis V C, & connectantur G H, G K, k D, quibus parallelæ agantur c S, c y, y x ſecantes E A, A H, F A etiam continuatas in punctis S y x. & fiat vt A G ad A C, ita quadratum A K ad quadratum A I. Dico ſit A G ad A C, ita eſſe F C ad c x, & ita E B ad B S, & ita quoque A K ad A y, & inſuper vnumquodque rectangulorum y A K, E A S, F A x quadrato A I æquale eſſe. A

QVoniam enim æquales ſunt V G, V C, & æquales quoque V D, V F, erunt æquales & D G, F C, & quoniam æquales ſunt anguli y c x, k G D ob parallelas y c, k G, & æquales quoque anguli y x c, k D G ob parallelas y x ad K D, ſimilia erunt triangula k D G, y c x vt igitur k G ad y c, ita erit G D, hoc eſt F C ad C x; ſed vt k G ad y c, ita eſt A G ad A C ob ſimilitudinem triangulorum A G k, A C y: nam cum ſint parallelæ G H, c y, æquales ſunt anguli A G k, A C y, & æquales quoque A k G, A y C, ergo vt A G ad A C, ita erit F C ad C x quod eſt primum. B

Deinde connectatur B C, & ei parallela agatur G R ſecans E H in R: angulus igitur A R G æqualis erit angulo A B C; ſed rectus eſt A B C in ſemicirculo, ergo & A R G rectus erit; quare æquales erunt H R, E B.

Et quoniam parallelæ ſunt G H, C S, & ob id æquales anguli G H R, C S B, & æquales quoque anguli H R G, S B C, quia recti ideo ſimilia erunt triangula H R G, S B C, vt igitur G K ad C S, ita erit H R, hoc eſt E B ad B S: ſed vt G H ad C S, ita eſt quoque A G ad A C ob ſimilitudinem triangulorum A G H, A C S nam cum ſint parallelæ G H, E S, æquales ſunt anguli A G H, A C S, & æquales quoque anguli A H G, A S C, ergo vt A G ad A C, ita erit E B ad B S. quod eſt ſecundum. C

Tertio quoniam ſimilia ſunt triangula A G R, A c y, vt demonſtrauimus erit vt A G ad A C, ita A k ad A y. quod eſt tertium.

Quarto quoniam quadratum A K, & rectangulum y A K eandem habent altitudinem A K: erit vt A K ad A y, ita quadratum A K ad rectangulum y A K; ſed A K ad A y eſt vt A G ad A C, vt proximè demonſtrauimus, ergo vt A G ad A C ita erit quadratum A k ad rectangulum y A K; ſed vt A G ad A C ita ponitur quadratum A k ad quadratum A I, ergo rectangulum y A k quadrato A I æquale erit, atque id eſt quartum. D

Eadem ratione quoniam rectangula E A H, E A S eamdem habent altitudinem E A, erit ad A H ad A S, ita rectangulum E A H ad rectangulum E A S; ſed A H vt A S eſt vt A G ad A C propter ſimilitudinem triangulorum ſecundo loco demonſtratam, ergo vt A G ad A C, ita erit rectangu-
35 tertij lum E A H, hoc* eſt quadratum A K ad rectangulum E A S; ſed vt A G ad A C, ita eſt quadratum A k ad quadratum A I, ſic enim ponitur, ergo rectangulum E A S æquale erit quadrato A I. quod eſt quintum.

Po-

A Poſtremo quoniam parallelæ ſunt k D, y x, erit angulus A D K æqualis angulo A x y, & angulus A K D angulo A y c, & ideo ſimilia triangula A D k, A x y, vt igitur A D ad A k, ita erit A x ad A y; ſed vt A D ad A K, * ita eſt A k ad A F, rectangulum enim D A F * æquale eſt quadrato A k, xvij ſexti 35 tertij ergo vt A x ad A y, ita erit A K ad A F vnde rectangulum F A x ſub extremis, * æquale erit rectangulo y A K ſub medijs, ſed rectangulum y A K æquale eſt quadrato A I, vt quarto loco demonſtrauimus, ergo & rectangulum F A x quadrato A I æquale erit, quod ſexto, & vltimo loco erat oſtēdendū. 16 ſexti

Corollarium.

B EX demonſtratis colligitur rectangula y A K, E A S, F A x æqualia eſſe etenim vnumquodque eorum oſtenſum eſt æquale quadrato A I.

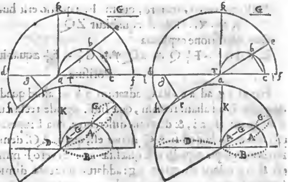
Caſus quintus.

Denuo vergant ad eandem partem dati duo ſemicirculi maior minorem includens; ſed recta ponenda pertineat ad angulum ſemicirculi minoris, à quo quidem angulo ſemicirculus maior plus diſtet, quam à reliquo.

SInt itaque tales dati duo ſemicirculi a b c, d e f, data autem recta linea G, & ducatur a k perpendicularis ipſi d f ſecans circumferentiam d e f in k oportet inter circumferentias a b c, k f ponere rectam lineam æqualem ipſi G, ita vt ad punctum a pertingat.

C Reſolutio.

POſita iam ſit recta linea e b æqualis datæ G, eaque ad punctum a pertingat, & ex centro circuli d e f, quod ſit T ponatur T G æqualis T C, & compleatur circulus f e, d h, quem e a producta ſecet in h, & ipſi e h ducatur perpendicularis g r, & connectatur b c, ea quoque ipſi e h perpendicularis erit quia angulus a b c in ſemicirculo rectus eſt. vnde * æquales erunt h r, e b. Lem. 2



Datarum a c, a g, b e, a k; prima ſit B, ſecunda D, tertia G, D quarta K. vt deſignatum eſt in figuris ad reſolutionem pertinentibus, & quæratur a e, eſtò illa A, ergo a b erit A - G, & cum ſint ſimilia triangula a b c, a r g, anguli enim a b c, a r g ſunt æquales, quia recti,

&

& æquales quoque anguli ad a, quia ſunt ad verticem; erit vt a c ad ag, ita a b ad a r, hoc eſt in figuris Reſolutionis vt B ad D, ita A -- G ad $\frac{D \text{ in } A \text{ -- } D \text{ in } G}{B}$; atque adeo a r erit $\frac{D \text{ in } A \text{ -- } D \text{ in } G}{B}$, cui addita r h, quæ æqualis eſt e b tota a h erit A
15 unij $\frac{D \text{ in } A \text{ -- } D \text{ in } G}{B}$ ✣ G; ſed rectangulum e a h æquale eſt quadrato AK, ergo

$\frac{D \text{ in } AQ \text{ -- } D \text{ in } G \text{ in } A}{B}$ ✣ G in A æquabitur KQ

Ducantur omnia in B, vt fractio euaneſcat, ergo

D in AQ -- D in G in A ✣ B in G in A æquabitur KQ in B.

Et applicentur omnia ad D, vt Poteſtas æquationis ex ſe ſubſiſtat, ergo

AQ -- G in A ✣ $\frac{B \text{ in } G \text{ in } A}{D}$ æquabitur $\frac{KQ \text{ in } B}{D}$

Sed vt Æquatio facilius explicetur, trãſmutentur fractiones in integras magnitudines, vt in Reſolutionibus præcedentium Caſuum factum eſt; hoc eſt fiat vt D ad B ita kQ ad aliud quadratum, quod ſit ZQ, eritque ZQ idem quod $\frac{KQ \text{ in } B}{D}$. Similiter fiat vt D ad B, ita G ad aliam, quæ ſit F, eritque F eadem quæ $\frac{B \text{ in } G}{D}$, atque adeo planum F in A idem erit, quod planum $\frac{B \text{ in } G \text{ in } A}{D}$. facta igitur tranſmutatione. B

AQ -- G in A ✣ F in A æquabitur ZQ

In hac æquatione G interdum minor eſt, quam F, interdum maior; interdum æqualis, nam cum D minor eſt, quam B fiet & G minor, quam F; eſt enim vt D ad B, ita G ad F, D autem minor eſt, quàm B cum centrum circuli d e f includentis exiſtit inter puncta a c; maior vero cum exiſtit extra, æqualis autem cum exiſtit in ipſo a puncto. Itaque cum G minor eſt, quàm F quadratum in Æquatione afficitur affirmate; cum autem maior afficitur negate, at cum æqualis, nulla eſt affectio, ſed quadratum purum manet, nam id quod eſt affirmatum æquale eſt ei quod eſt negatum, atque adeo affirmationem deſtruit negatio. Exiſtente igitur G minore quam F, eiuſmodi erit Æquatio. C

AQ ✣ F -- G in A æquabitur ZQ

Qua Æquatione explicata

L. V. (F $\frac{1}{2}$ -- G $\frac{1}{2}$ Q ✣ ZQ) -- (F $\frac{1}{2}$ -- G $\frac{1}{2}$) æquabitur A

Exiſtente vero G maiore, quam F. æquatio erit huiuſmodi.

AQ -- G -- F in A æquabitur ZQ

Qua Æquatione explicata D

L. V. (G $\frac{1}{2}$ -- F $\frac{1}{2}$ Q ✣ zQ) ✣ G $\frac{1}{2}$ -- F $\frac{1}{2}$ æquabitur A

Poriſma.

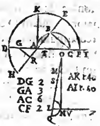
Fiat vt a g ad a c, ita quadratum a k ad aliud quadratum quod ſit a i, & ita recta G ad aliam rectam, quæ ſit F. deinde rectæ cuius quadratum æquale eſt quadratis a i, & dimidiæ differentiæ, qua F ſuperat G ſiquidem F maior eſt, quàm G, hoc eſt ſi A C maior eſt, quàm A G. dematur ipſa dimidia differentia; reliqua æqualis erit quæſitæ a e. Si vero F minor eſt, quam G; hoc eſt ſi a c minor eſt, quam a g: addatur illi rectæ dimidia differentia, qua G ſuperat F, & ita compoſita æqualis erit quæſitæ a e.

Com-

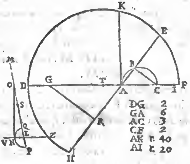
A

Compoſitio.

Sint dati duo ſemicirculi A B C, D E F, vt dictum eſt, data autem recta linea V Z. Oportet inter circumferentias A B C, D E F ponere rectam lineam æqualem V Z, ita vt ad punctum A K pertineat. Oportebit autem datam V z non eſſe minorem, quàm F C, nec maiorem A k perpendiculari à puncto A ad circumferentiam D E F ductа. Siquidem V z æqualis ſit alteri ipſarum A k, F C. factum iam erit quod proponitur, ſi vero maior ſit quàm F C, minor autem quam A k. Ponatur ex cen-



B tro circuli D E F, quod ſit T recta T G, æqualis T C, & fiat* vt A G ad A C, ita quadratum A K ad aliud quadratum quod ſit A I. Similiter fiat vt A G ad A C, ita V z ad z L, & V L differentiæ rectarum V z, z L ſecetur bifariam in N, eique ad rectos angulos ducatur N O æqualis A I, & connectatur O L. quadratum igitur O L æquale eſt quadratis O N, N L. itaque ſi A G minor ſit, quàm A C, rectæ O L, Prob. 4 huius



C detrahenda eſt recta æqualis L N, ſi vero maior, addenda. Sic Poriſma fieri iubet. primo igitur ab ipſa V L abſcindatur recta L P æqualis L N, ſecundo vero addatur L P æqualis L N infra demõſtrabimus, rectam O P in primo quidẽ Caſu minorem eſſe, quàm A F, maiorẽ quam A k: in ſecundo vero maiorem, quàm A F, minorem quam A k. Itaque poterit à puncto A in circumferentiam K F duci recta A E æqualis O P. ducatur ergo A E, quam ſemicirculus A B C ſecet in B, & facta erit conſtructio, vt Poriſma fieri iubet. Nunc oſtendenda eſt E B æqualis datæ V z.

Cõpleatur igitur circulus F E D, quem E A producta ſecet in H, & ſumatur P S æqualis V z. ea minor eſt, quàm P O, cum ſit & ipſa V z minor, vt infra demonſtrabimus; ſed & P Q æqualis eſt V L, ergo & S Q æqualis erit z L.

D Deinde centro L interuallo L N, vel L P deſcribatur circulus ſecans rectam O L, etiam continuatam in Q. is circulus tanget rectam O N in N, cum rectus angulus O N L, ex conſtructione: quare quadratum O N æquale erit rectangulo P O Q, hoc eſt rectangulis* P O, S Q, P O S. ſi igitur fiat, vt A C ad A G, ita vtraque æqualitatis pars ſeparatim ad alia plana, itidem manebit æqualitas: in Reſolutione conuerſo modo factum eſt, nempe vt A G ad A C, ita vtraque æqualitatis pars ad alia plana: At quoniam eſt vt A G ad A C, ita quadratum A k ad quadratum A I, ex conſtructione, hoc eſt ad quadratum O N erit conuertendo, vt A C ad A G, ita quadratum O N ad quadratum A K: quadratum igitur A k erit vna pars secundi

æqualitatis. alteram vero ſic inueniemus. A

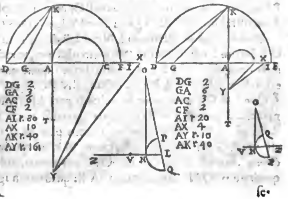
Fiat vt A C ad A G, hoc eſt vt L Z ad Z O; ſeu quod idem eſt, vt Q S ad S P, ita O S ad aliam, quæ ſit S M, ea in primo quidem caſu minor erit, quàm S O, quoniam & S P minor eſt, quàm Q S. in ſecundo verò maior: quoniam & S P maior eſt, quàm Q S. Et quoniam eſt vt A C ad A G, hoc eſt vt Q S ad S P, ita
ſexti * rectangulum P O, S Q ad rectangulum O P S; ſunt enim eiuſdem altitudinis
1 ſexti O P. Similiter vt A C ad A G, hoc eſt vt O S ad S M, * ita eſt quoq; rectangulum P O S ad rectangulum P O, S M, cum ſint eiuſdem altitudinis P O: ideo erit vt rectangulum P O, S Q ad rectangulum O P S, ita rectangulum P O S ad rectangulum P O, S M; ſed vt vna antecedentium ad vnam conſequen-
12 quinti tium, * ita ſunt omnes antecedentes ad omnes conſequentes. ergo vt rectangulum P O, S Q ad rectangulum O P S, hoc eſt vt A C ad A G, ita erunt B
rectangula P O, S Q, P O S ad rectangula O P S, P O, S M, rectangula igitur O P S O P, S M erunt altera pars æqualitatis. itaque quadratum A k hoc eſt rectangulum E A H æquale erit rectangulis O P S, O P, S M, hoc eſt rectangulo O P M; ſed A E æqualis eſt O P ex conſtructione, ergo & A H æqualis erit P M.

Denique connectatur B C, & ei parallela agatur G R ſecans A H in R: angulus igitur A R G æqualis erit angulo A B C, & ideo rectus; cum ſit rectus &
lem. 1 ipſe A B C in ſemicirculo; quare * æquales erunt E B, H R. ſumatur autem B X æqualis A R, ergo tota E x æqualis erit toti A H, hoc eſt ipſi P M: & cum ſit A E æqualis O P, ex conſtructione, & E X æqualis P M, reliqua A x reliquæ O M æqualis erit. C

Et quoniam eſt vt A C ad A G, ita A B ad A R ob ſimilitudinem triangulorum A B C, A R G, & ita O S ad S M ex conſtructione, erit vt A B ad A R, hoc eſt ad B x, ita O S ad S M: & diuidendo vt A x ad x B, ita O M ad M S: ſed prima A X oſtenſa eſt æqualis tertiæ O M, ergo & ſecunda X B æqualis erit M S quartæ, ſed X E oſtenſa eſt æqualis P M, ergo & reliqua B E reliquæ P S, hoc eſt V z datæ, æqualis erit, quod erat oſtendendum.

Poſita eſt igitur inter circũferẽtias A B C, D E F recta B E æqualis datæ VZ, eaq. pertinet ad punctũ A, quod faciendũ erat.

At verò rectam O P in primo quidem Caſu minorem eſſe, quam A F, maiorem quam A K. in ſecundo vero maiorem, quam A F, minorem quam A K; ita oſtendemus; Connectantur G k, k D quibus parallelæ agantur C Y, Y X D



ſe-

A ſecantes K A, A C productas in punctis y x: erit igitur vt A G ad A C* ita F C ad C x; ſed vt A G ad A C, ita eſt quoque V Z ad Z L, ex conſtructione, ergo vt V Z ad Z L ita erit F C ad C X, & in primo Caſu erit diuidendo. in ſecundo vero per conuerſionem rationis, vt V Z ad V L, hoc eſt ad P Q, ita F C ad F X: ſed V Z ponitur maior quam FC, ergo & P Q maior erit, quàm F X. Lem. 17

Et quoniam rectangulum F A X æquale eſt quadrato A I, hoc eſt quadrato O N, ſeu* rectangulo P O Q, proportionales* erunt P O, F A, A X, O Q. ſed P Q differentia extremarum oſtenſa eſt maior, quàm F X, differentia mediarum, ergo* altera extremarum P O, O Q maxima erit, altera minima. In primo quidem Caſu ſic argumentor. ſed P O non eſt maxima, quia minor eſt, quam O Q: ergo minima erit, & conſequenter minor quàm A F. In
B ſecundo verò caſu argumentor hoc modo. Sed P O non eſt minima, quia maior eſt, quam O Q; ergo maxima erit, & per conſequens maior quam A F. Lem. 17 36 tertii 16 ſexti Theor. 2 huius

Deinde ſumatur A T æqualis A K. quoniam igitur eſt, vt A G ad A C* ita K A ad A Y, & ita V Z ad Z L ex conſtructione; erit vt V z ad z L, ita K A hoc eſt A T ad A Y. in primo quidem Caſu erit diuidendo; in ſecundo vero per conuerſionem rationis. vt V z ad V L, hoc eſt ad P Q, ita A T ad T y: ſed V Z ponitur minor, quàm A T, hoc eſt, quàm A K. ergo & P Q minor erit quam T y. Lem. 19

Et quoniam rectangulum* y A K, hoc eſt y A T æquale eſt quadrato A I, hoc eſt quadrato O N, vel* rectangulo Q O P:* proportionales erunt y A, Q O, O P, A T; ſed y T differentia extremarum oſtenſa eſt maior,
C quam P Q differentia mediarum, ergo* altera extremarum y A, a T maxima erit, altera minima; ſed in primo quidem Caſu a T non eſt maxima, quia minor eſt quam a y, ergo ipſa a T, hoc eſt a k, minima erit, & per conſequens O P maior, quàm a k. In ſecundo vero Caſu a T non eſt minima, ea enim maior eſt, quàm a y: ergo ipſa a T, hoc eſt a K maxima erit, & per conſequens O P minor quam a k. quare conſtat propoſitum. Lem. 17 36 tertii 16 ſexti Theo. 2 huius

Similiter rectam V z minorem eſſe, quàm P O ita fit manifeſtum.

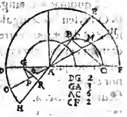
Quoniam enim eſt, vt A G ad A C, ita quadratum A K ad quadratum a I, & ita V z ad z L: vtrumque ex conſtructione erit, vt V z ad z L, ita quadratum a k ad quadratum a I, hoc eſt ad quadratum O N, vel ad
D rectangulum P O Q: ſed vt V Q ad z L, ita eſt quadratum V z ad rectangulum V z L, eamdem enim habent altitudinem V z, ergo & quadratum V z ad rectangulum V z L, ita erit quadratum a k ad rectangulum P O Q: ſed quadratum V z minus eſt quadrato a k, ponitur enim recta V z minor, quam recta a k. ergo & rectangulum V z L minus erit rectangulo P O Q, ſunt autem æquales V L, P Q, ergo V z minor erit quam P O, quod erat oſtendendum. 36 tertii lem. 16

Diximus oportere datam V z non eſſe maiorem, quàm a k, nec minorem quam F C: quoniam a k maxima eſt omnium, quæ ad punctum a pertinentes inter circumferentias a B C, K F interijciuntur, F C minima.

Aliarum autem propinquior minima remotiore minor eſt, quod quidem ſic A
demonſtrabitur.

9 tertij Quoniam enim in primo Caſu A k* maior eſt, quàm A H. ea multo
lem. 1 maior erit, quàm H R, hoc* eſt quam E B, & ſic demonſtrabitur omnibus alijs maior.

Maxima eſt igitur omnium A k.



Similiter quoniam A D* minor eſt, quàm A H, A G autem maior, quam A R reliqua D G minor erit, quàm reliqua H R, hoc eſt F C minor quam E B, & ſic ipſa F C demonſtrabitur minor omnibus alijs. Minima eſt igitur omnium F C.

Rurſus ducatur alia recta A M N ſecans circumferentias A B C, K F in punctis M N, & ſit recta M N ipſi C F propinquior, quàm B E, & producta N A ſecet circulum F E D completum in O, & connectatur M C; cui parallela agatur G P ſecans rectam A O in P, quam etiam ſecet G R in Q. erit angulus A P G æqualis angulo A M C; ſed rectus eſt A M C in ſemicirculo, ergo & A P G rectus erit
lem. 1 quare* æquales erunt M N, P O. Et quoniam A O minor eſt, quam A H, A Q autem maior, quàm A R; reliqua Q O minor erit, quam reliqua R H. vnde recta P O multo minor, quam ipſa R H, hoc eſt M N minor quam B E, propinquior videlicet minimæ minor remotiore.

9 tertij In ſecundo autem Caſu A K* maior eſt, quàm A E, ergo multo maior quam E B. Maxima eſt igitur omnium A K. C



Et quoniam A F minor eſt, quam A E, A C vero maior quam A B, reliqua C F minor erit, quam reliqua B E, & ſic F C demonſtrabitur omnibus alijs minor. Minima eſt igitur omnium F C.

Denique ducatur alia recta A M N ſecans circumferentias A B C, k F in punctis M N, ita vt M N ipſi C F ſit propinquior, quam B E. Quoniam igitur A N minor eſt quam A E, A M autem maior quam A B, reliqua M N minor erit, quam reliqua B E. Propinquior igitur minimæ minor eſt remotiore. quare manifeſta eſt determinatio.

Caſus ſextus. D

Sed vergant ad diuerſas partes dati duo ſemicirculi, & maior ſi compleatur includat minorem, & recta ponenda pertineat ad angulum ſemicirculis minoris, à quo quidem angulo ſemicirculus maior plus diſtet, quàm à reliquo.

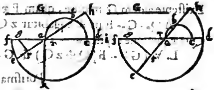
Sint itaque tales dati duo ſemicirculi a b c, d e f: data autem recta linea G, à puncto autem a demittatur a k ad rectos angulos ipſi a c, vſque ad circumferentiam d e f in k. Oportet inter circumferentias a b c, K f ponere rectam lineam æqualem ipſi G; ita vt ad punctum pertineat.

Re-

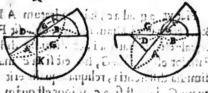
A

Reſolutio.

POſita iam ſit recta linea e b æqualis datæ G, eaque ad punctum a pertineat, & ponatur ex centro circuli d e f, quod ſit t. recta t g æqualis t c, & compleatur circulus f e, d h ſecans e b productam in h, ipſique e h ducatur perpendicularis g r, & connectatur b c: ea quoque ipſi e h perpendicularis erit, cum ſit rectus angulus a b c in ſemicirculo: quare * æquales erunt h r, e b. lem. 2



B Datarum autem a c, a g, b c, a k prima ſit B, ſecunda D, tertia G, quarta k, vt in figuris ad reſolutionem pertinentibus, & quæratur a e, eſto illa A, ergo a b erit G – A, &c. cum ſint ſimilia triangula a b c, a r g, erit vt a c ad a g, ita a b ad a r, hoc eſt in figuris Reſolutionis, vt B ad D, ita G – A ad $\frac{D \text{ in } G - D \text{ in } A}{B}$. atque adeo a r erit $\frac{D \text{ in } G - D \text{ in } A}{B}$. ſi auferatur a b, r h æquali ipſi e b, reliqua a h erit G – $\frac{D \text{ in } G - D \text{ in } A}{B}$. Et quoniam rectangulum e a h



C æquale eſt quadrato a k, ideo

G in A – $\frac{D \text{ in } G \text{ in } A - D \text{ in } A Q}{B}$ æquabitur K Q

Ducantur omnia in B vt fractio euaneſcat ergo

B in G in A – D in G in A + D in A Q æquabitur k Q in B.

Et applicentur omnia ad D, vt poteſtas æquationis ex ſe ſubſiſtat, ergo

A Q – G in A + $\frac{B \text{ in } G \text{ in } A}{D}$ æquabitur $\frac{K Q \text{ in } B}{D}$

Sed vt æquatio facilius explicetur, tranſmutentur fractiones in integras magnitudines, vt in Reſolutionibus præcedentium caſuum factum, hoc eſt, fiat vt D ad B, ita K Q ad aliud quadratum, quod ſit z Q, eritque z Q idem quod $\frac{K Q \text{ in } B}{D}$. Similiter fiat vt D ad B, ita G ad aliam, quæ ſit F, eritque F

D eadem quæ $\frac{B \text{ in } G}{D}$, atque adeo planum F in A idem erit, quod planum $\frac{B \text{ in } G \text{ in } A}{D}$. facta igitur tranſmutatione

A Q – G in A + F in A æquabitur z Q.

In hac quoque æquatione quemadmodum in æquatione præcedentis Caſus G interdum minor eſt, quam F, interdum maior, interdum æqualis, prout D minor eſt quam B, vel maior, vel æqualis, eſt enim vt D ad B, ita G ad F. D autem minor eſt, quam B, cum centrum circuli d e f includentis exiſtit inter puncta a c, maior vero cum exiſtit extra, æqualis autem, cum exiſtit in ipſo a puncto. Itaque cum G minor eſt, quam F, quadratum in æquatione afficitur affirmate, cum

maior afficitur negate, cum æqualis, nulla eſt affectio, ſed quadratum purum manet, nam cum id quod eſt affirmatum æquale ſit ei quod eſt negatum, quod affirmatio addit, idem negatio minuit. Exiſtente igitur G minore, quam F, æquatio erit huiuſmodi. A

A Q + F -- G in A æquabitur z Q

Qua æquatione explicata.

L. V. (F $\frac{1}{2}$ -- G $\frac{1}{2}$ Q + z Q) -- (-- F $\frac{1}{2}$ (G $\frac{1}{2}$ æquabitur A

Exiſtente autem G maiore, quàm F æquatio erit huiuſmodi

A Q - G -- F in A æquabitur z Q

Qua æquatione explicata

L. V. (G $\frac{1}{2}$ -- F $\frac{1}{2}$ Q + z Q) + G -- F æquabitur A B

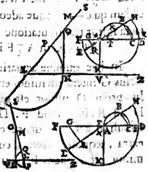
Poriſma.

Fiat vt a g ad a c, ità quadratum A K ad aliud quadratum, quod ſit a i, & ità recta G ad aliam rectam, quæ ſit F. Deinde rectæ cuius quadratum æquale eſt quadratis a i, & dimidiæ differentiæ, qua F ſuperat G ſi quidem F maior eſt, quàm G, hoc eſt ſi a c maior eſt, quàm a g: demątur ipſa dimidia differentia, reliqua æqualis erit quæſitæ a e. Si vero F minor eſt quam G, hoc eſt ſi a c minor eſt quàm a g; addatur dimidia differentia, qua G ſuperat F, & ita compoſita æqualis erit a e quæſitæ.

Poriſma hoc idem eſt, quod Poriſma Reſolutionis antecedentis Caſus, ſed tamen non ſunt eadem vtriuſque Reſolutionis veſtigia, idcirco conſtructio, quæ ſequitur, eadem prorſus erit, quæ in antecedenti Caſu, demonſtratio autem paulum diuerſa. C

Compoſitio.

Sint dati duo ſemicirculi A B C, D E F, vt dictum eſt. data autem recta linea V z. Oportet inter circumferentias A B C, D E F ponere rectam lineam æqualem V Z, ita vt ad punctum A pertineat. Oportebit autem datam V Z non eſſe maiorem, quàm F C, nec minorem A k perpendiculari ducta à puncto A ad circumferentiam D E F.



Si quidem V Z æqualis ſit alteri ipſarum A K F C factum iam erit, quod proponitur: ſi verò minor ſit, quàm F C, maior autem, quàm A k. ponatur ex centro circuli D E F quod ſit T. recta T G, æqualis T C, & * fiat vt A G ad A C, ita quadratum A k ad aliud quadratum quod ſit A I. D

Probl. 1. huius

Similiter fiat vt A G ad A C, ita V Z ad Z L, & V L differentia rectarum V Z, z L ſecetur bifariam in N, eique ad rectos angulos ducatur N O æqualis A I, & connectatur

A tur O L. quadratum igitur O L æquale eſt quadratis O N, N L; itaque ſi A G minor eſt, quam A C rectæ O L detrahenda eſt recta æqualis L N, ſi vero maior addenda. ſic Poriſma fieri iubet. ab ipſa igitur O L in primo caſu abſcindatur recta L P æqualis L N, in ſecundo vero producatur O L in P, vt ſit L P æqualis L N. infra autem oſtendemus rectam O P. in primo quidem caſu maiorem eſſe, quam A F, minorem quam A k. in ſecundo vero minorem, quam A F, maiorem quam A k. itaque poterit à puncto in circumferentiam k F duci recta A E æqualis O P. ducatur ergo A E, quam productam ſecet ſemicirculus A B C in B. facta eſt igitur conſtructio quemadmodum Poriſma fieri iubet. Nunc oſtendendum eſt E B æqualem eſſe datæ V z.

B Compleatur circulus F E D ſecans A B productam in H, & ſumatur P S æqualis V z. ea maior erit quam P O, cum ſit & ipſa V z maior, vt infra demonſtrabimus, ſed & P Q æqualis eſt V L, ergo & S Q æqualis erit z L. deinde centro L interuallo L N, vel L P deſcribatur circulus ſecans rectam O L etiam continuatam in Q: is circulus tanget rectam O N in N, cum ſit rectus angulus O N L, ex conſtructione. itaque quadratum O N * æquale erit rectangulo P O Q, hoc eſt rectangulo P O, S Q, minus rectangulo P O S. Si igitur fiat, vt A C ad A G, ita vtraque æqualitatis pars ſeparatim ad alia plana; itidem manebit æqualitas: in reſolutione conuerſo modo factum eſt, nempe vt A G ad A C, ita vtraque æqualitatis pars ad alia plana. At quoniam eſt, vt A G ad A C, ita quadratum A K ad quadra- 36 tertii

C tum A I, ex conſtructione, hoc eſt ad quadratum O N: erit conuertendo vt A C ad A G, ita quadratum O N ad quadratum A K. quadratum igitur A k erit vna pars æqualitatis, nunc verò inueniemus alteram.

Fiat vt A C ad A G, hoc eſt vt L z ad z V, ſeu quod idem eſt, vt Q S ad S P, ita O S ad aliam, quæ ſit S M. ea in primo quidem Caſu minor erit, quam S O. quoniam & S P minor eſt, quam Q S. in ſecundo vero maior quoniam & S P maior eſt, quam Q S. Et quoniam eſt vt A C ad A G, hoc eſt vt Q S ad S P, ita rectangulum P O, S Q ad rectangulum O P S; ſunt enim eiuſdem altitudinis O P. Similiter vt A C ad A G, hoc eſt vt O S ad S M, ita eſt quoque rectangulum P O S ad rectangulum P O, S M cum ſint eiuſdem altitudinis P O, ideo erit vt rectangulum P O, S Q ad rectan-

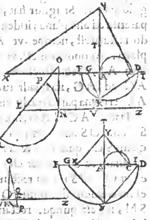
D gulum O P S, ita rectangulum P O S ad rectangulum P O, S M; nempe vt totum ad totum, ita ablatum ad ablatum, ergo * vt totum ad totum, ita erit & reliquum ad reliquum, id eſt vt rectangulum P O, S Q ad rectangulum O P S, hoc eſt vt A C ad A G, ita rectangulum P O, S Q, minus rectangulo P O S ad rectangulum O P S, minus rectangulo P O, S M. rectangulum igitur O P S, minus rectangulo O P, S M erit altera pars æqualitatis, itaque quadratum A k, hoc eſt rectangulum E A H, æquale erit rectangulo O P S, minus rectangulo O P S M, hoc eſt æquale erit rectangulo O P M; ſed A E æqualis eſt O P, ex conſtructione, ergo & A H æqualis erit P M. 19 quinti

De-

Denique connectatur BC, & ei parallela agatur GR ſecans A in E R, **A**
angulus igitur ARG æqualis erit angulo ABC, & ideo rectus cum ſit re-
Lem. 1 ctus, & ipſe ABC in ſemicirculo quare * æquales erunt EB, HR, abſcindatur autem Bx æqualis AR, reliqua XE æqualis erit reliquæ AH, hoc eſt ipſi PM; ſed & AE æqualis eſt VP ex conſtructione, ergo & reliqua Ax reliquæ OM æqualis erit.

Et quoniam eſt vt AC ad AG, ita AB, ad AR ob ſimilitudinem triangulorum ABC, ARG, & ita OS ad SM, ex conſtructione, erit vt AB ad AR, hoc eſt ad BX, ita OS ad SM. & diuidendo vt AX ad XB, ita OM ad MS; ſed prima AX oſtenſa eſt æqualis tertiæ OM, ergo, & ſecundæ XB æqualis erit MS quartæ, ſed & XE oſtenſa eſt æqualis PM, ergo tota BE toti PS, hoc eſt VZ datæ æqualis erit, quod erat oſtendendum. Poſita eſt igitur inter circumferentias ABC, DEF recta BE æqualis datæ VZ eaque pertinet ad punctum A quod erat faciendum. **B**

At vero OP in primo quidem Caſu maiorem eſſe, quam AF minorem quam AK; in ſecundo vero minorem, quàm AF, maiorem quam AK; ita fit manifeſtum.



Connectatur Gk, kD quibus parallelæ agantur cy, yx ſecantes KA, CA productas in punctis yx. Quoniam igitur eſt, vt AG ad
Lem. 17 AC, * ita FC ad cx, & ita VZ ad ZL, ex conſtructione, erit vt VZ ad ZL, ita FC ad cx, & in primo quidem Caſu erit diuidendo, in ſecundo vero per conuerſionem rationis, vt VZ ad VL, hoc eſt ad PQ, ita Fc ad FX; ſed VZ ponitur minor, quàm Fc, ergo & PQ minor erit, quàm Fx. **C**

Lem. 17 Et quoniam rectangulum FAx * æquale eſt quadrato AI hoc eſt quadrato ON, ſeu
Theor. 1 huius rectangulo POQ * proportionales erunt PO, FA, Ax, OQ; ſed PQ differentia extremarum oſtenſa eſt minor, quam FX, differen-
Lem. 17. tia mediarum, ergo * altera mediarum FA, Ax maxima erit altera minima. in primo quidem Caſu ſic argumentor, ſed FA non eſt maxima; mi- **D**
nor enim eſt, quàm Ax, ergo minima erit, & per conſequens OP maior quàm AF. In ſecundo vero Caſu argumentor in hunc modum ſed FA non eſt minima, maior enim eſt quàm Ax, ergo maxima erit, & per conſequens OP minor quàm AF.

Deinde ſumatur AT æqualis Ak. Quoniam igitur eſt vt AG ad AC * ita KA ad Ay, & ita VZ ad ZL ex conſtructione, erit vt Vz ad zL; ita KA hoc eſt AT ad Ay, in primo quidem Caſu erit diuidendo, in ſecundo vero per conuerſionem rationis, vt Vz ad VL, hoc eſt ad PQ, ita AT ad Ty, ſed Vz ponitur maior, quàm AT, hoc eſt quam AK, ergo & PQ
maior

A maior erit quam T y.

Et quoniam rectangulum y A K, hoc eſt y A T * æquale eſt quadrato A I, hoc eſt quadrato O N vel * rectangulo Q O P; * proportionales erunt Q O, y A, A T, O P; ſed Q P differentia extremarum oſtenſa eſt maior quàm y T differentia mediarum, ergo * altera extremarum maxima erit, altera minima. in primo quidem Caſu ſic argumentor, ſed O P non eſt maxima, quia minor eſt quam O Q, ergo minima erit, & per conſequens minor quam A T, hoc eſt, quam A Q. in ſecundo vero Caſu hoc modo, ſed O P non eſt minima, quia maior eſt quam O Q, ergo maxima erit, & per conſequens maior quam A T, hoc eſt quam A k. quare conſtat propoſitum. Lem. 17 36 tertij 16 ſexti

Similiter rectam V Z maiorem eſſe, quam P O. ſic demonſtrabimus.

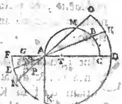
B Quoniam enim eſt, vt A G ad A C, ita quadratum A k ad quadratum A I, & ita V Z ad Z L, vtrumque ex conſtructione erit, vt V Z ad z L, ita quadratum A K ad quadratum A I, hoc eſt ad quadratum O N, ſeu ad * rectangulum P O Q; ſed vt V z ad z L, * ita eſt quadratum V z ad rectangulum V z L, eamdem enim habent, altitudinem V z, ergo vt quadratum V z ad rectangulum V z L, ita erit quadratum A k, ad rectangulum P O Q. ſed quadratum V z maius eſt quadrato A k, ponitur enim recta V z maior, quàm A k; ergo & rectangulum V z L maius erit rectangulo P O Q; ſed ſunt æquales V L, P Q, ergo V z * maior erit, quàm P O. quod erat oſtendendum. 16 tertij 1 ſexti Lem. 16

Diximus oportere datam V Z non eſſe minorem, quàm A k, nec maiorem quam F C: ipſa enim A K minima eſt omnium quæ ad punctum A pertinent, & inter circumferentias A B C, K F interijciuntur idque ita ſit manifeſtum.

C

Quoniam enim in primo Caſu A K * minor, eſt quam A H, ea multo minor erit, quam H R; hoc eſt quam E B, & ſic demonſtrabitur omnibus alijs minor. Minima eſt igitur A K.

Similiter quoniam A D maior eſt quam A H, & A G maior quam A R, erit tota D G maior quam tota H R, hoc eſt F C maior, quam E B, & ſic ipſa F C demonſtrabitur omnibus alijs maior. Maxima eſt igitur F C.

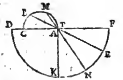


Ducatur autem alia recta N A M ipſi A k propinquior, quam E B, & producatur donec ſecet circulum F E D completum in O, & connectatur M C, cui parallela agatur G P ſecans A N in P, rectam vero A E in Q: erit angulus A P G æqualis angulo A M C, & ideo rectus, cum ſit rectus & A M C in ſemicirculo, quare * æquales erunt N M O P. Et quoniam A O * minor eſt, quàm A H; & A P minor quam A Q, & multo minor, quàm A R; tota O P minor erit, quam tota H R hoc eſt N M minor, quam E B; propinquior igitur minimæ minor eſt remotiore. lem. 2

D

In ſecundo autem Caſu A K minor eſt, quàm A E; ergo multo minor quam

quam E B, atque ratione oſtendetur omnibus alijs minor. Minima eſt igitur A k. A



Æquè quoniam A F maior eſtquam A E, & A C maior quam A B, tota F C maior erit quam tota E B, & ſic demonſtrabitur ipſa F C maior omnibus alijs. Maxima eſt igitur F C.

Sed ducatur per A alia recta N A M ipſi A K propinquior, quàm E B; erit A N minor, quàm A E; ſed & A M minor eſt quam A B, ergo tota N M minor erit, quàm tota E B. Propinquior igitur minimæ minor eſt remotiore. quare manifeſta eſt Determinatio.

Lemma XVIII. B

Si recta linea bifariam ſecetur, & in ea ſumantur duo puncta vtcumque. Punctum quod efficit rectangulum maius propinquius eſt ſectioni eo puncto, quod minus rectangulum efficit.

Secetur recta A B bifariam in C, & in ea ſumantur vtcumque duo puncta D E, ſitque rectangulum A D B maius rectangulo A E B. Dico punctum D ſectioni C propinquius eſſe, quam punctum E. Quoniam enim rectangulum A D B vna cum quadrato D C * æquale eſt quadrato A C. Similiter & † rectangulum A E B vna cum quadrato E C * æquale eidem quadrato A C, ideo rectangulum A D B vna cum quadrato D C, æquale erit rectangulo A E B vna cum quadrato E C; ſed rectangulum A D B ponitur maius rectangulo A E B, ergo reliquum quadratum D C minus erit reliquo quadrato E C. vnde & recta D C minor, quam recta E C. Itaque punctum D ſectioni C propinquius erit, quam punctum E. quod erat oſtendendum. C





† ſecundi

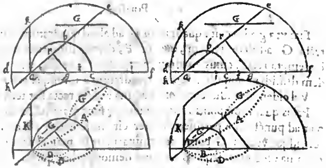
Caſus VII.

Denuo vergant ad eandem partem dati duo ſemicirculi maior minorem includens, & recta ponenda pertineat ad angulum ſemicirculi minoris; ſed ab eo angulo ſemicirculus maior minus diſtet, quàm à reliquo. D

Sint igitur tales dati duo ſemicirculi a b c d e f. data autem recta linea G, & ducatur a k perpendicularis ad d f ſecans circumferentiam d e f in K. Oportet inter circumferentias a b c k f ponere rectam lineam æqualem ipſi G, ita vt ad punctum a pertingat.

Reſolutio.

Sit iam poſita recta linea e b æqualis datæ G, eaque ad punctum a pertingat, & ex centro circuli d e f, quod ſit t ponatur t g æqualis t c, & com-



A & cōpleatur circulus fe, dh, quem ea producta ſecet in h, & ipſi eh ducatur perpendicularis gr, & connectatur bc, ea quoque ipſi eh perpēdicularis, erit cum ſit rectus

B angulus abc in ſemicirculo; vnde* æquales erunt hr, eb. Lem. 1

Datarum autem ac, ag, be, ak, prima ſit B, ſecunda D, tertia G, quarta K, vt in figuris ad Reſolutionem pertinentibus, & quæratur ae, eſto illa A, ergo ab erit A -- G, & cum ſint ſimilia triangula abc, arg, anguli enim abc, arg ſunt æquales, quia recti, & angulus à communis vtrique erit vt ac ad ag, ità ab ad ar, quod in figuris ad Reſolutionem pertinentibus reſpondet vt B ad D, ita A -- G ad $\frac{D \text{ in } A -- D \text{ in } G}{B}$, itaque ar erit $\frac{D \text{ in } A -- D \text{ in } G}{B}$. ſed hæc detrahatur ipſi rh, cui æqualis eſt eb reliqua ah erit G -- $\frac{D \text{ in } A -- D \text{ in } G}{B}$; ſed rectangulum eah* æquale eſt quadrato ak, ergo 35 tertii

G in A -- $\frac{D \text{ in } AQ -- D \text{ in } G \text{ in } A}{B}$ æquabitur KQ

Ducantur omnia in B, vt fractio euaneſcat, ergo

C B in G in A + D in G in A -- D in AQ æquabitur kQ in B.

Deinde applicentur omnia ad D, vt poteſtas æquationis ex ſe ſubſiſtat, ergo

$\frac{B \text{ in } G \text{ in } A}{D}$ + G in A -- AQ æquabitur $\frac{KQ \text{ in } B}{D}$

Sed vt æquatio facilius explicetur: tranſmutentur fractiones in integras magnitudines, vt in Reſolutionibus præcedentium Caſuum factum eſt, hoc eſt fiat vt D ad B, ita KQ ad aliud quadratum, quod ſit ZQ: erit ZQ idem quod $\frac{KQ \text{ in } B}{D}$. Similiter fiat vt D ad B, ita G ad aliam rectam; quæ ſit F, eritque F eadem, quæ $\frac{B \text{ in } G}{D}$, & planum F in A idem quod planum $\frac{B \text{ in } G \text{ in } A}{D}$. facta igitur tranſmutatione

F in A + G in A -- AQ æquabitur ZQ

vel F + G in A -- AQ æquabitur ZQ

D Et explicata Æquatione F $\frac{1}{2}$ + G $\frac{1}{2}$ -- L. V. (F $\frac{1}{2}$ + G $\frac{1}{2}$ Q -- ZQ) æquabitur A

Vel F $\frac{1}{2}$ + G $\frac{1}{2}$ + L. V. (F $\frac{1}{2}$ + G $\frac{1}{2}$ Q -- ZQ) æquabitur A.

In hac æquatione A explicabilis eſt de duobus terminis, quorum non ſemper vterque indicat ae quæſitam, ſed alter tantum, interdum maior, interdum minor; quo autem Caſu terminis maior indicet ipſam quæſitam, quare terminus minor, quoue etiam vterque, ſuo loco dicetur.

Po.

Poriſma. A

Fiat vt a g ad a c, ita quadratum a k ad aliud quadratum, quod ſit a i, & ita recta G ad aliam rectam, quæ ſit F, deinde dimidiæ compoſitæ ex G, & F dempta recta, cuius quadratum æquale eſt exceſſui, quo quadratum eiuſdem dimidiæ compoſitæ ſuperat quadratum a i, reliqua erit terminus minor.

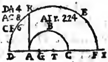
Vel eidem dimidiæ compoſitæ addita eadem recta fiet terminus maior.

Prius quam compoſitio fiat oſtendendę ſunt maxima, & minima rectarum, quæ ad punctum a pertinentes inter circumferentias a b c, K f intercipiuntur, idque vt data G poſsit determinari, ne ſit maior maximâ, neve minor minimâ; ſed prius ſequens Lemma demonſtrabo, quo facilius, ac clarius ea, quæ ſequentur demonſtrentur. B

Lemma XIX.

Sint duo ſemicirculi A B C, D E F, quales in præſenti Caſu ponuntur, & recta A K perpendicularis ad A F ſecet ſemicirculum D E F in K, & ex centro circuli D E F, quod ſit T ſumatur T G æqualis T C, & fiat vt A G ad A C, ita quadratum A k ad quadratum A I. Dico ſi ratio A D ad A F maior ſit ratione A G ad A C, & rectam A I maiorem eſſe, quam A F, & ſi æqualis, æqualem, & ſi minor, minorem.

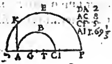
SIt primum ratio A D ad A F maior, quam A G ad A C, ergo ea ratio erit quoque maior ratione quadrati A k ad quadratum A I. eſt enim vt C A G ad A C, ita quadratum A K ad quadratum A I; ſed vt A D ad A F prima videlicet trium proportionalium A D, A K, A F ad tertiam, ita eſt quadratum ſecundæ A K ad quadratum A F tertiæ, ergo ratio quadrati A k ad quadratum A F maior erit, ratione quadrati A k ad quadratum A I; quare * quadratum A I maius erit quadrato A k; itaque & recta A I maior quam recta A F quod eſt primum.



Deinde ſit ratio A D ad A F eadem quæ A G ad A C, ergo eadem erit quæ quadrati A K ad quadratum A I; ſed vt A D ad A F, ita eſt quadratum A k ad quadratum A F, vt demonſtrauimus. ergo quadratum A I quadrato A F æquale erit, vnde & recta A I æqualis rectæ A F. quod eſt ſecundum. D



Denique ſit ratio A D ad A F minor ratione A G ad A C, ergo minor erit & ratione quadrati A k ad quadratum A I, ſed vt A D ad A F ita eſt quadratum A K ad quadratum A F, ergo ratio quoque quadrati A k ad quadratum A F minor erit ratione quadrati A K ad quadratum A I, quare quadratum A I * minus erit quadrato A F. vnde & recta A I minor, quàm recta AF. quod vltimo loco erat oſtendendum.

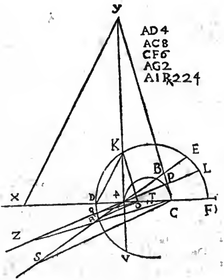


Lem-

A

Lemma XX.

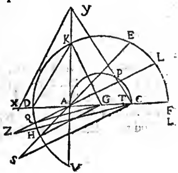
Iiſdem poſitis, ſit ratio A D ad A F non minor ratione A G ad A C. Dico a k maximam eſſe omnium, quæ ad punctum A pertinent, & inter circumferentias A B C, k F interijciuntur: minimam vero F C; aliarum antè propinquiorem minimæ minorem eſſe remotiore.



DVcatur enim à puncto A vtcumq; recta linea a B E ſecans circumferentias a B C, K F in punctis B E, & compleatur
B circulus F E D H, quem E a, K a continuatæ ſecent in punctis H V, & connectantur G k, k D, G H, eisque parallelæ agantur c y, y x, c s ſecantes a k, a D, a H continuatas in punctis y x s.

Quoniam igitur rectangulum F a x * æquale eſt quadrato a I, proportionales erunt a F, a I, a x: ſed a I ex antecedente Lemmate non eſt minor, quàm a F, Lem. 17 h[uius] ſcſd
C eo quod ratio a D ad a F ponitur non minor ratione a G ad A C; ergo neque a x minor erit, quam a I, nec ideo minor quam a F.

Et quoniam rectangulum F a x* æquale eſt rectangulo y a k; erit * vt a k, coro l. lem. 17 h[uius] ſcſd hoc eſt. a V ad a F, ita a x ad a y: ſed a V minor eſt, quàm a F, ergo & a x minor erit, quàm a y: ſed ipſa a x oſtenſa eſt non minor, quàm a F: ergo & a F, minor erit, quam a y. itaque quatuor proportionalium a V, a F, a x, a y maxima erit a y. minima vero a V. vnde y V compoſita ex maxima, & minima maior, quàm F x, compoſita ex reliquis.



D Et quoniam eſt vt a G ad a C, ita a k ad a y, & ita* F C ad C x, erit vt a K ad a y, ita F C ad C x, & conuertendo, vt y a ad a K, hoc eſt ad a V, ita x C ad c F, & componendo, vt y V ad V a, ita x F ad F C, ſed y V prima oſtenſa eſt maior, quàm x F tertia, ergo & ſecunda a V, hoc eſt a k, maior erit quam F C quarta, lem. 19

corol. le. 17. Similiter quoniam * æqualia ſunt rectangula y A K, E A S. erit vt * A K, A
16 ſ. iti hoc eſt A V ad A E, ita A S ad A y: ſed A V minor eſt, quàm A E, ergo & A S minor erit, quàm A y. eſt autem & A E minor, quàm A y, cum ſit & A F minor, vt demonſtrauimus: ergo quatuor proportionalium A V, A E,
25 quinti A S, A Y maxima erit A y. minima vero A V; vnde y V.* compoſita ex ma-
lem. 17 xima, & minima maior erit, quam S E compoſita ex reliquis.

Et quoniam eſt, vt A G ad A C, ita * E B ad B S, & * ita A K ad A y erit vt A K ad A y, ita E B ad B S, & conuertendo vt y A ad A k, hoc eſt ad A V, ita S B ad B E. & componendo y V ad A V, ita S E ad E B; ſed y V oſtenſa eſt maior, quàm S E, ergo & A V, hoc eſt A K, maior erit quam E B, eadem ratione oſtendetur ipſa A k omnibus alijs maior. Maxima eſt igitur omnium A K. quod eſt primum. B

corol. Lem. 17 Eadem ratione quoniam * æqualia ſunt rectangula F A X, E A S, proportionales erunt A E, A F, A X, A S; ſed A E minor eſt, quàm A F, ergo & A X minor erit, quam A S: ſed cum ſit A X non minor, quàm A F, vt demõſtrauimus. ergo & ipſa A F minor erit, quàm A S, & A E multo minor. Sic igitur A S maxima erit quatuor proportionalium A E, A F, A X, A S: minima vero A E, atque adeo S E compoſita ex maxima, & minima maior erit, quam X F compoſita ex reliquis.

lem. 17 Et quoniam eſt vt A G ad A C, ita * E B ad B S, & ita F C ad C X. erit F C ad C X, vt E B ad B S, & conuertendo vt X C ad C F, ita S B ad B E. & componendo vt X F ad F C, ita S E ad E B: ſed X F oſtenſa eſt minor, quam S E, ergo & F C minor erit, quàm E B. & ſic demõſtrabitur omnibus alijs minor. C
Minima eſt igitur omnium F C. quod eſt ſecundum.

Ducatur autem à puncto A alia recta A P L ſecans circumferentias A B C, k F in punctis P L, & ſit P L ipſi C F propinquior quam B E, & producatur L A ſecans circulum F E D completum in Q, & connectatur G Q, & ei parallela ducatur C Z occurrens L Q continuatæ in Z; rectangula igitur L A z
corol. lem. 17. E A S * æqualia erunt. idcirco * proportionales A L, a E, a S, a z: ſed a L ma-
16 ſexti ior eſt, quàm a E, ergo & a S maior erit quam a z. Et quoniam rectangulum
lem. 17 E A S * æquale eſt quadrato a I, proportionales erunt a E, a I, a s, ſed a E minor eſt, quàm a I, cum ipſa a I non ſit minor quam a F, ergo & a I minor erit quam a S. atque adeò ipſa a S maior erit, quàm a L, & multo maior quam a E. atque eſt maior, quam a z, vt proximè demonſtrauimus, ergo ipſa a S maxi- D
Theor. 1 huius ma erit quatuor proportionalium a L, a E, a S, a Z, & * conſequenter a E minima; vnde S E compoſita ex maxima, & minima maior erit, quam Z L compoſita ex reliquis, hoc eſt Z L minor quam S E.

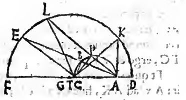
lem. 17 Et quoniam eſt vt a G ad a C, * ita E B ad B S. & ita L P ad P Z, erit vt L P ad P Z, ita E B ad B S. & conuertendo vt Z P ad P L, ita S B ad B E. & componendo vt z L ad L P, ita S E ad E B; ſed z L oſtenſa eſt minor, quam S E, ergo & L P minor erit, quam E B. Propinquior igitur minime minor eſt remotiore. quod tertio loco erat oſtendendum.

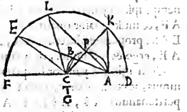
Lem-

A Lemma XXI.

Rurſus ijſdem poſitis. ratio autem A D ad A F ſit minor ratione A G ad A C. Dico ſi ſemicirculus A B C non extenditur vltra centrum circuli D E F, rectam F C maximam eſſe omnium, quæ ad punctum A pertinent, & inter circumferentias A B C, K F interijciuntur, minimam A K; ſi verò extenditur, ducatur à puncto A ad circumferentiam K F recta A M æqualis A I ſecans ſemicirculum A B C in O. eſt autem a i minor * quam lem. 19 a f, maior autem quam a K, cum ſit vt a g ad a c, minor nempe ad maiorem, ita quadratam a K ad quadratum a i ex poſitione. Dico maiorem rectarum a K, c f maximam eſſe, M O minimam; aliarum autem propinquiorem minimę remotiore ex eadem parte minorem eſſe.

B





Dvcatur enim vtcumq; recta linea a B F ſecans circumferentias a B C, k F in punctis B E; & primum ſemicirculus a B C non extendatur vltra cētrum circuli D E F, quod ſit T, & connectantur C k, C E, C B; erit angulus a B C in ſemicirculo rectus. vnde & an-

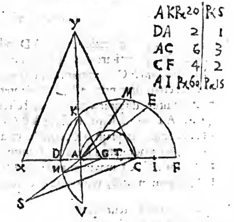
C gulus E B C rectus erit, quare C E maior erit quam B E; ſed C F non eſt minor quam C E, ergo & C F maior erit quam B E. & ſic demōſtrabitur maior omnibus alijs. Maxima eſt igitur C F.

Rurſus quoniam C k non eſt maior, quàm C E, ideo nec quadratum C k maius erit quadrato C E; ſed quadratum C k * æquale eſt quadratis C a, a k, & quadratum C E * æquale quadratis C B, B E; ergo nec quadrata C a, a k maiora erunt quadratis C B, B E. ſed quadratum C a maius eſt quadrato C B, ergo reliquum quadratum a k reliquo quadrato B E minus erit. vnde & recta a k minor quam recta E B, & ſic demonſtrabitur minor omnibus alijs. Minima eſt igitur a F. Sed ducatur alia recta a P L ſecans circumferentias a B C K F in punctis P L, & ſit P L ipſi a k propinquior, quam B E. & connectantur C P, C L erit angulus a P C in ſemicirculus rectus, quare & angulus C P L rectus erit, & quoniam C L non eſt maior quàm C E, ideo nec quadratū C L maius erit quadrato C E; hoc eſt nec quadrata C P, P L maiora erunt quadratis C B, B E, ſed quadratum C P maius eſt quadrato C B, ergo reliquum quadratum P L reliquo quadrato B E minus erit, quare & recta P L maior quam recta B E. Propinquior ſcilicet minime minor remotiore

(Right margin beside the lines above: "47 primi" at "maius erit quadrato C E"; the letter "D" in the left margin at "go reliquum quadratum a k".)

 A

Sed extendatur ſemicirculus A B C vltra punctum T, & compleatur circulus F E D quem E A, K A productæ ſecent in punctis H V, & connectantur G H, G K, K D, quibus parallelæ agantur C S, c y, y x ſecantes E A, A K, F A, in punctis S Y X, & ſit primum A k maior, quam C F. Quoniam igitur eſt, vt



Lem. 17 A G ad A C, *ita F C ad C X, & ita A k ad A Y: erit A K, hoc eſt A V ad A y, vt F C ad C X. & permutando vt A V ad B

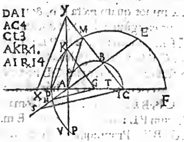
12 quinti F C, ita A y ad c x, & conſequenter* ita V y ad F x, hoc eſt ita omnes antecedentes ad omnes conſequentes, ſed A V, hoc eſt A K, ponitur maior quam F C, ergo & V y maior erit quam F x.

corol. lem 17. Et quoniam æqualia ſunt rectangula y A k, F A X erit, *vt A y ad A F, 16 ſexti ita A x ad A K, hoc eſt ad A V; ſed y v compoſita ex extremis oſtenſa eſt Theor. 2 huius maior, quàm F x. compoſita ex medijs. ergo altera* extremarum A y, A V, nempe ipſa A y maxima erit; minima vero A k, vnde A y maior erit quam corol. Lem. 17 A F, & multo maior quam A E. Et quoniam æqualia ſunt rectangula y A k C 16 ſexti E A S. proportionales erunt A K, A E, A S, A y, ſed A K minor eſt quam A E, ergo & A S minor erit quam A y.

Cum igitur A y maior ſit quam A S, & maior quam A E, vt demonſtrauimus, ac etiam maior, quàm A K; erit ipſa A y maxima quatuor pro- Theor. 2 huius portionalium A k, A E, A S, A Y; minima vero A k, vnde compoſita ex y a, a K, maxima videlicet, & minima, ideſt recta y v, maior erit, quam E S compoſita ex reliquis.

lem. 17 Et quoniam eſt vt a g ad a c, *ita E B ad B S, & *ita a K ad a y erit a k, hoc eſt a v ad a y, vt E B ad B S, & conuertendo, & componendo vt y v ad y A, ita S E ad E B; ſed y V oſtenſa eſt maior, quam S E, ergo & v a, hoc eſt a K, maior erit quam E B, & ſic demonſtrabitur maior omnibus alijs. Maxima eſt igitur omnium a k. D

lem. 17 Sed ſit F C maior quam A k. eadem ratione, quoniam eſt vt a g ad a c, ita F C ad C X, & *ita a k ad a y, erit F C ad C X, vt a k, hoc eſt a v ad a y, & permutando vt F C ad a v, ita C X ad a y, & conſequenter, *ita 12 quinti F X ad V Y. omnes videlicet antecedentes ad omnes conſequentes; ſed



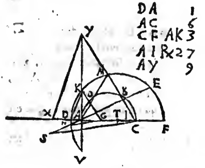
F C

A FC ponitur maior, quàm AK, hoc eſt quam AV, ergo & Fx maior erit, quàm Vy. ſed Fx compoſita eſt ex extremis quatuor proportionalium af, ay, av, ax, ipſa vero vy ex medijs; conſtat autem eas proportionales eſſe, ex eo quod rectangulum FAX æquale eſt rectangulo yak, hoc eſt yav; ergo* altera extremarum af, ax maxima erit, altera minima, ſed af non eſt minima, cum ſit maior quam av, ergo maxima erit, &* conſequenter ax minima, itaque ax minor erit quam av, & multo minor quam ae. corol. lem. 17 Theor. 2. huius Theor. 1 huius

Et quoniam æqualia ſunt rectangula FAX, EAS proportionales erunt af, ae, as, ax: ſed af maior eſt quam ae, ergo & as maior erit quam ax, eſt autem & ae maior, quam ipſa ax, vt demonſtrauimus, corol. lem. 17
B & conſequenter af multo maior: itaque ax minima erit quatuor proportionalium af, ae, as, ax. quare af * maxima, vnde yf compoſita ex maxima, & minima maior erit, quam se compoſita ex reliquis. Theor. 8 huius 25 quinti

Et quoniam eſt vt AG ad AC, ita FC ad CX, & ita EB ad BS; erit fc ad cx, vt eb ad bs, & conuertendo vt xc ad cf, ita sb ad be, & componendo vt xf ad fc, ita se ad eb; ſed xf oſtenſa eſt maior, quam se, ergo & fc maior erit, quam eb; eademque ratione oſtendetur maior omnibus alijs. Quare maxima eſt fc.

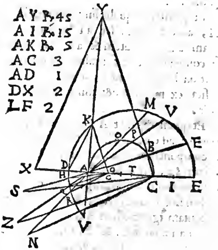
Sed ſint æquales Ak, FC.



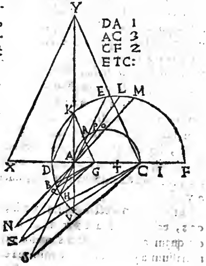
Quoniam igitur eſt, vt AG ad
C ac, ita fc ad cx, &* ita ak ad ay, erit fc ad cx, vt ak ad ay, ſed fc ponitur æqualis ak, ergo & cx æqualis erit ay, quibus additis æqualibus cf, av, tota xf æqualis erit toti yv. ſed xf compoſita eſt ex extremis quatuor proportionalium fa, ay, av, ax: ipſa vero yv ex medijs: eæ autem ſunt proportionales, quia rectangulum fax * æquale eſt rectangulo lem. 17
D yak, hoc eſt yav, ergo maior extrema maiori mediæ, minor minori æqualis erit, itaque af altera extremarum æqualis erit alteri mediarum ya, av; ſed non eſt æqualis ipſi av, quia* maior eſt, ergo æqualis erit ipſi ay. corol. lem. 18 Theor. 9 huius 7 tertij

Et quoniam rectangulum yak, hoc eſt yav æquale eſt rectangulo eas, erit ay ad ae, vt as ad av; ſed ay cum ſit æqualis af, maior eſt quam ae, ergo & as maior erit quam av, itaque quatuor proportionalium ay, ae, as, av minima erit av, &* conſequenter maxima ay. vnde xv compoſita ex maxima, & minima* maior erit, quàm se compoſita ex reliquis. lem. 19 Theor. 12 huius 25 quinti lem. 19

Lem. 17. Et quoniam eſt vt A G ad A C * ita E B ad B S, & ita * A K hoc eſt A V ad A y, erit A V ad A y, vt E B ad B S. & conuertendo vt y A ad A V, ita S B ad B E, & componendo vt y V ad V A, ita erit S E ad E B; ſed y V oſtenſa eſt maior quam S E, ergo & V A hoc eſt A k maior erit quàm E B. atque eadem ratione oſtendetur maior omnibus alijs, quare & F G cum ſit æqualis A k, erit quoque omnibus maior, itaque vtraque maxima erit. Maior igitur rectarum A k, F C maxima eſt omnium, quæ ad punctum A pertinent, & inter circumferentias A B C, K F interijciuntur. quod eſt primum.



Deinde producatur M A donec ſecet circulum completum F E D in R, & connectatur G R, eique parallela agatur C N ſecans M R productam in N. Rectangulum igitur Lem. 17. M A N * æquale erit quadrato A I, hoc eſt quadrato A M: ſunt enim æquales A I, A M, ex conſtructione. quare A M æqualis erit ipſi A N. & cum Lem. 17. ſit rectangulũ F A X * æquale quadrato A I, hoc eſt quadrato A M, proportionales erunt A F, A M, A x: ſunt autem & inæquales, quia A F maior eſt, quam A M, ergo x F compoſita ex extremis maior erit, quam dupla media, hoc eſt quam M N.



Lem. 17. Et quoniam eſt vt A G ad A C, * ita F C ad c x, & * ita M O ad O N: erit F C ad c x, vt M O ad O N. & conuertendo vt x c ad C F, ita N O ad O M. & componendo vt X F ad F C, ita erit N M ad M O. ſed X F oſtenſa eſt maior quam N M, ergo & F C maior erit quam M O.

Eadem ratione quoniam rectangu- Lem. 17. lum y A k * æquale eſt quadrato A I, hoc eſt quadrato A M, proportionales erunt y A, A M, & A K, hoc eſt & A V: ſunt autem & inæquales; ergo y V compoſita ex extremis maior erit, quam M N, media videlicet dupla.

Et

A Et quoniam eſt vt A G ad A C, * ita A K ad A y, & * ita M O ad O N: erit lem. 17.
vt A k, vel A V ad A y, ita M O ad O N; & conuertendo vt y A ad A V,
ita N O ad O M. & componendo vt y V ad V A, ita erit N M ad M O: ſed
y V oſtenſa eſt maior, quam N M; ergo & V A hoc eſt A K maior erit
quam M O.

Similiter quoniam rectangulum E A S æquale eſt quadrato A I, hoc eſt
quadrato A M, proportionales erunt A E, A M, A S, ſunt autem, & inæ-
quales, ergo S E compoſita ex extremis maior erit, quam dupla media hoc
eſt quam N M. Et quoniam eſt vt A G ad A C, * ita E B ad B S, & * ita lem. 17.
M O ad O N: erit E B ad B S, vt M O ad O N. & conuertendo vt S B ad B E
ita N O ad O M. & componendo vt S E ad E B, ita erit N M ad M O, ſed
B S E maior eſt, quam N M, vt demonſtrauimus. ergo & E B maior erit,
quàm M O. atque eadem ratione oſtendemus omnes alias maiores eſſe ipſa
M O. Minima eſt igitur M O omnium, quæ ad punctum A pertinent, &
inter circumferentias A B C, K F interijciuntur. quod eſt ſecundum.

Poſtremo ducatur à puncto A alia recta A P L ſecans circumferentias
A B C, k F in punctis P L, ſintque P L, B E ex eadem parte minime
O M, atque ſit P L ipſi O M propinquior, quam B E. Deinde produca-
tur L A donec ſecet circulum F E D completum in Q, & connectatur
G Q, eique parallela ducatur c z occurrens L Q continuatæ in z: erunt corol.
igitur * æqualia rectangulo L A Z, F A S, ac proinde proportionales A L, lem. 17.
A E, A S, A Z. in prima quidem figura vbi A L, A E exiſtunt inter re-
C ctas A M, A K. ſic argumentor, ſed A L maior eſt quam A E, ergo &
A S maior erit quam A Z. Et quoniam rectangulum E A S * æquale eſt Lem. 17.
quadrato A I, hoc eſt quadrato A M, proportionales erunt A E, A M,
A S; ſed A E minor eſt quàm A M, ergo & A M minor erit quam
A S; atque adeò A S maior erit quam A L, & multò maior quam A E;
atque eſt maior quam A Z, vt demonſtrauimus, itaque A S maxima erit
quatuor proportionalium a l, a e, a s, a z, & per * conſequens. A E mi- Theor. 1. huius
nima vnde S E compoſita ex maxima, & minima * maior erit quam Z L 25 quinti
compoſita ex reliquis, hoc eſt Z L minor quam S E.

In ſecunda verò figura vbi A L, A E exiſtunt inter rectas a m, a f, ar-
gumentor in hunc modum. ſed a l minor eſt quam a e, ergo & a s mi-
D nor erit quam a z, & quoniam rectangulum e a s * æquale eſt quadrato lem. 17.
a i, vel a m, proportionales erunt a e, a m, a s; ſed a e maior eſt quam
a m, ergo & a m maior erit quam a s, itaque a s minor erit quam a l,
& multo minor quam a e, atque eſt minor quam a z, vt demonſtrauimus,
itaque a s minima erit quatuor proportionalium a l, a e, a s, a z, & con-
ſequenter * a e maxima: quare s e compoſita ex maxima, & minima Theor. 1. huius
maior erit quam Z L compoſita ex reliquis, hoc eſt z l minor quam s e. 25 quinti.
quod quidem demonſtrauimus & ſupra.

At quoniam in vtroque caſu eſt, vt a g ad a c, * ita e b ad b s, & ita lem. 17
L P ad P Z, ita E B ad B S, & conuertendo vt Z P ad P L, ita S B

ad

Digitized by Google

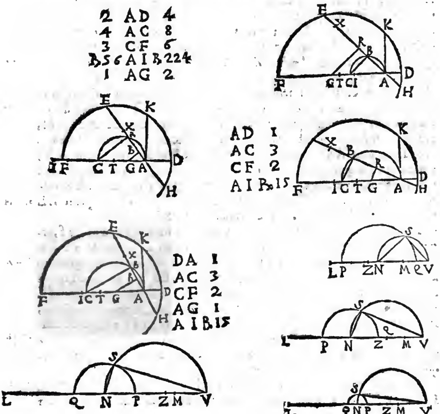
ad B E. & componendo vt Z L ad L P, ita S E ad E B; ſed z L oſtenſa eſt minor quam S E, ergo & L P minor erit quam E B. Propinquior igitur minimæ minor eſt remotiore ex eadem parte, quod tertio loco erat oſtendendum. A

Corollarium.

CVm igitur propinquiores minimæ remotioribus ex eadem parte minores ſint, manifeſtum eſt A K maximam eſſe omnium, quæ inter circumferentias a O, KM interijciuntur. Earum autem, quæ interijciuntur inter circumferentias O C, M F, maximam eſſe C F.

Compoſitio ſeptimi Caſus.

SInt dati duo ſemicirculi a B C, D E F, quales in præſenti Caſu ponuntur. data autem recta linea V Z. Oportet inter circumferentias a B C, D E F ponere rectam lineam æqualem V z, ita vt ad punctum a pertineat. Oportebit autem ipſam V z non eſſe maiorem, maxima rectarum, quæ B



C

D

ad pun-

A ad punctum a pertinentes inter circumferentias a B C, D E F interijciuntur, neque minorem minima; quæ autem ſit maxima, quoque minima, iam eſt demonſtratum. Ducatur ad A F perpendicularis A K ſecans circumferentiam D E F in k, & ſi quidem data V Z ſit æqualis maximæ, factum iam erit quod proponebatur, etenim maxima eſt ea, quæ maior eſt rectarum A K, F C; ſi vero ſit æqualis minimæ, minima autẽ ſit ea, quæ minor eſt ipſarũ A k, F C, itidem factum erit, quod proponebatur, ſed ſi neutra dictarum A K, F C ſit minima, inuenta minima Problemati ſatisfiet. inuentio autem minimæ conſtat ex Lemmate 24. Si autem V Z minor ſit maxima, maior minima ſumatur ex centro circuli D E F, quod ſit T recta T G æqualis T C, &* fiat vt A G ad A C, ita quadratum A k ad aliud quadratum quod ſit A I. Probl. 8 Huius

B Similiter fiat vt A G ad A C, ita V z ad aliam, quæ ſit z L. & V L compoſita ex V Z, Z L ſecetur bifariam in N, cum igitur à quadrato V N auferendum ſit quadratum A I, vt Poriſma iubet, deſcribatur in V N ſemicirculus, in quo accommodetur V S æqualis A I infra oſtendetur minor quam V N, deinde connectatur S N. quadratum igitur V N ſuperat quadratum V S quadrato S N, angulus enim V S N in ſemicirculo rectus eſt itaque rectæ V N auferenda eſt, vel addenda recta æqualis N S, ſic Poriſma fieri iubet, auferatur ergo, vel addatur prout ſequentia præcepta docebant. eaque diminuta, vel aucta ſit V P; cui æqualis à puncto A ad circumferentiam k F ducatur recta A E ſecans ſemicirculum A B C in B, ipſam autem V P non eſſe maiorem quam A F, nec minorem quam A K, quatuor ſequentia Lemmata oſtendent. iam facta eſt conſtructio quemadmodum Poriſma do-

C cet. Nunc oſtendemus E B æqualem eſſe V z datæ.

Producatur E A donec ſecet circulum F E D completum in H, & centro N interuallo N S, vel N P circulus deſcribatur ſecans rectam V L in Q. is circulus tangit rectam V S in S. vnde quadratum V S* æquale erit rectangulo P V Q, vel V P L, ſeu quod idem eſt rectangulo V P, L z, minus rectangulo V P z: punctum enim z exiſtit in recta V P, vt quatuor ſequentia Lemmata oſtendent. Si igitur fiat vt A C ad A G, ita vtraque æqualitatis pars ad alias partes, itidem manebit inter eas partes æqualitas, igitur quoniam eſt vt A G ad A C ita quadratum A k ad quadratum A I, ex conſtructione, erit conuertendo vt A C ad A G; ita quadratum A I, hoc eſt quadratum V S ad quadratum A k, quadratum igitur A k erit vna pars æqualitatis, altera vero pars ſic inuenietur. 36 tertii

D

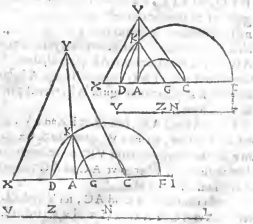
Fiat vt A C ad A G, hoc eſt vt L Z ad z V, ita P z ad aliam, quæ ſit z M; erit Z M minor, quam z V, quoniam & P z minor eſt, quam L z, ſed vt P z ad z M, ita eſt rectangulum V P z ad rectangulum V P, z M: ſunt enim eiuſdem altitudinis V P: ergo vt A C ad A G, ita erit rectangulum V P z ad rectangulum V P, z M.

Et quoniam eſt vt A G ad A C, ita V z ad z L ex conſtructione, erit conuertendo vt A C ad A G, ita L z ad z V: ſed vt L z ad z V, ita eſt rectangulum V P, L z ad rectangulum P V z eamdem enim habent altitudinem V P er-

go vt A C ad A G, ita erit rectangulum V P L z ad rectangulum P V z : ſed A
vt A C ad A G ; ita oſtenſum eſt rectangulum V P z ad rectangulum V P , z M. ergo vt rectangulum V P, L z ad rectangulum P V z, ita rectangulum V P z ad rectangulum, V P, z M. nempe vt totum ad totum, In quinto ita ablatum ad ablatum; quare vt * totum ad totum, ita erit & reliquum ad reliquum, hoc eſt vt rectangulum V P, L z ad rectangulum P V z, id eſt vt A C ad A G, ita rectangulum V P, L z minus rectangulo V P z ad rectangulum P V z minus rectangulo V P, z M. itaque rectangulum P V z minus rectangulo V P, z M erit altera pars æqualitatis. Quadratum igitur A K, hoc eſt rectangulum E a H, æquale erit rectangulo P V z minus rectangulo V P, z M. hoc eſt æquale erit rectangulo P V M, ſed P V æqualis eſt A E ex conſtructione; ergo & V M æqualis erit A H. B

Denique connectatur B C, cui parallela agatur G R ſecans A E in R: angulus igitur a R G, æqualis eſt angulo a B C, & ideo rectus, quia & ipſe a B C Lem. 2 in ſemicirculo rectus eſt. vnde * æquales ſunt E B, H R: ſumatur autem B x æqualis a R; reliqua x E æqualis erit reliquæ a H, hoc eſt ipſi V M; ſed a E æqualis eſt V P, ex conſtructione, ergo & reliqua x a reliquæ M P æqualis erit.

Et quoniam ſimilia ſunt triangula a B C, a R G, anguli enim a B C, a R G ſunt æquales, quia recti & angulus a communis eſt vtrique: erit vt a C ad a G, ita a B ad a R; ſed vt a C ad a G, ita eſt quoque P z ad z M, ex conſtructione: ergo vt a B ad a R, hoc eſt ad B x, ita erit P z ad z M. & componendo vt a x ad x B, ita P M ad M z; ſed x a prima oſtenſa C.
eſt æqualis tertiæ P M, ergo & ſecunda x B æqualis erit M z quartæ, ſed E x oſtenſa eſt æqualis M V, ergo tota E B toti V z æqualis erit. Poſita eſt igitur inter circumferentias k F, a B C recta E B æqualis datæ V z, eaque ad punctum a pertinet. quod erat faciendum.



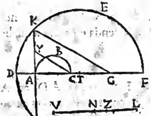
At vero rectam a I minorem eſſe, quam V N ſic demonſtrabimus. Primũ habeat a D ad a F non minorem rationem, quam a G ad a C ergo a I non Lem. 19. * erit minor, quàm a F: D
Lem. 20 atque F C * minima erit omnium interceptarum inter circumferentias a B C, k F. Connectatur autem G k, k D, quibus parallelæ agantur c y, y x ſecãtes a K, a D continuatas in punctis y x. rectangu-
Lem. 17 lum igitur F a x * æquale erit

A erit quadrato A I; & ideo proportionales erunt F a, a I, a x: quare F x compoſita ex extremis non erit minor quam a I dupla.

Et quoniam eſt vt a G ad a C,* ita F C ad c x, & ita V z ad z L, ex conſtructione, erit vt F C ad C x, ita V Z ad Z L, & permutando vt F C ad V z, ita erit C x ad z L, & conſequenter* ita F x ad V L, omnes videlicet antecedentes ad omnes conſequentes: ſed F C cum ſit omnium interceptarum minima, minor eſt, quam V z; ponitur enim V z maior minima, ergo & F x minor erit, quam V L; ſed F x oſtenſa eſt non minor, quam dupla A I, ergo & A I dupla minor erit, quam ipſa V L, & conſequenter A I ſimpla minor quàm V N, dimidia videlicet ipſius V L. lem. 19

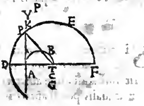
Sed habeat A D ad A F minorem rationem, quàm A G ad A C. Vel

B igitur ſemicirculus A B C extenditur vltra centrum circuli D E F, quod eſt T, vel non extenditur. Primum non extendatur, & connectatur G K, eique parallela agatur C y ſecans A K in y, & producatur k A donec ſecet circulum F E D completum in P. Quoniam igitur rectangulum y A K* æquale eſt quadrato A I, proportionales erunt y A, A I, A K, quare compoſita ex extremis y A, A K, hoc eſt recta y P, non erit minor quam A I dupla. lem. 19



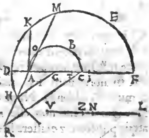
Et quoniam eſt vt A G ad A C* ita A k ad A y, & ita V z ad z L ex conſtructione, erit vt a k hoc eſt. A P ad A y, ita V z ad z L, & lem. 19

C permutando vt A P ad V z, ita A y ad z L, & conſequenter* ita P y ad V L, hoc eſt ita omnes antecedentes ad omnes conſequentes; ſed a P cui æqualis eſt a k, quæ eſt* minima interceptarum, minor eſt quam V z, ponitur enim V z maior minima: ergo & P y minor erit quã V L, ſed P y oſtenſa eſt non minor, quam dupla a I. ergo & a I dupla minor erit, quam V L, & conſequenter a I ſimpla minor, quam V N, dimidia videlicet ipſius V L. ix quinti lem. 20



Sed extendatur ſemicirculus a B C vltra centrum T. ergo a G minor erit, quam a C, &

D per conſequens a k minor quam a I. eſt enim vt a G ad a C, ita quadratum a k ad quadratum a I ex conſtructione. Cum itaque a I ſit maior, quam a k, minor autem quam a F, poterit à puncto a ad circumferentiam k F duci recta a M æqualis a I. Ducatur igitur a M ſecans ſemicirculum a B C in O. ergo* M O erit minima omnium, quæ ad punctum a pertinent, & inter circumferentias a B C, K F interijciuntur. Producatur autem M a donec lem. 16



donec ſecet circulum FED completum in H, & iungatur GH, cui parallela agatur CR ſecans MH continuatam in R. Rectangulum igitur M a R * æquale erit quadrato a I, hoc eſt quadrato a M, quare æquales erunt a R, A M. A

lem. 17 Et quoniam eſt vt a G ad a C, * ita MO ad OR, & ita Vz ad zL ex conſtructione, erit vt MO ad OR, ita Vz ad zL, & permutando vt MO 12 quinti ad Vz, ita OR ad zL, & conſequenter ita * MR ad VL, omnes videlicet antecedentes ad omnes conſequentes: ſed MO, cum ſit omnium interceptarum minima, minor eſt quam Vz; ponitur enim Vz maior minima, ergo & MR minor erit, quam VL, & per conſequens AM, vel AI minor, quam VN dimidia, videlicet minor quam dimidia. quod erat oſtendendum.

Quo autem Caſu rectæ VN auferenda ſit recta æqualis NS, quoue addenda, ratio his conſtat præceptis. B

Præceptum I.

SI ratio AD ad AF non ſit minor ratione AG ad AC, rectæ VN auferenda eſt recta æqualis NS.

Præceptum II.

SI vero ratio AD ad AF minor ſit ratione AG ad AC, & ſemicirculus ABC non extendatur vltra centrum circuli DEF, rectæ VN addenda eſt recta æqualis NS. C

Præceptum III.

SI autem ſemicirculus ABC extendatur vltra centrum circuli DEF, & Vz data non ſit maior minore rectarum aK, FC, rectæ VN poterit ſiue addi, ſiue auferri recta æqualis NS. in hoc enim Caſu recta datæ Vz æqualis poteſt aptari inter circumferentias aBC, kF ex vtraque parte minimæ, & ideo duobus modis Problema abſolui. Nam ſi auferatur aptabitur ea recta è regione aK; ſi vero addatur, aptabitur è regione FC.

Præceptum IV. D

SI vero Vz data maior ſit minore rectarum ak, FC; recta ipſi Vz æqualis poterit aptari inter circumferentias aBC, kF ex vna tantum parte minimæ nempe è regione maioris rectarum ak, FC. Itaque exiſtente aK maiore quam FC rectæ VN auferenda eſt recta æqualis NS, exiſtente minore, addenda. Nunc oſtendam rectam VP ſumptam quemadmodum Præcepta docent non eſſe maiorem, quam aF, nec minorem quam ak, atque punctum z exiſtere in recta VP. quo circa quatuor Lemmata proponuntur, quorum primum pertinebit ad primum præceptum, ſecundum vero ad ſecundum, & ſic deinceps.

Lem-

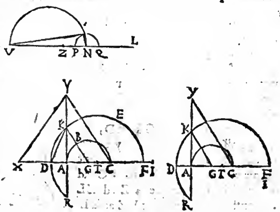
A Lemma XXII.

Sit ratio A D ad A F non minor ratione A G ad A C. Dico V P differentiam rectarum V N, N S minorem eſſe, quam A F, maiorem quam A k, & punctum z exiſtere in ipſa V P.

Connectantur enim G k, k D, quibus parallelæ agantur c y, y x ſecantes A k a D continuatas in punctis y x.

Quoniam igitur eſt vt a G ad a C,* ita F C ad C X, & ita V z ad z L ex conſtructione, erit v z ad z L, vt F C ad C x. & permutando vt V z ad F C, ita z L ad C x, & ita* quoque V L ad F x: eſt enim vt vna antecedentium ad vnā conſequentium, ita oēs antecedentes ad oēs cōſequentes; ſed V z ponitur maior, quā FC; eſt enim FC minima oīum quæ inter circūferentias a B C, K F intercipiuntur. ergo & v L maior erit quam F x. lem. 19 / 12 quinti

B



Et quoniam æquales ſunt V N, N L ex conſtructione, & æquales quoque N Q, N P, vt ſemidiametri, ergo fiunt quoq; æquales V Q, L P, quare rectangulum P V Q æquale erit rectangulo V P L, ſed rectangulum P V Q *æquale eſt quadrato V S, hoc eſt quadrato a I, cui quoque æquale eſt rectangulum F a x; ergo rectangulum V P L æquale erit rectangulo F a x: quare proportionales erunt V P, F a, a x P L. ſed V L compoſita ex extremis oſtenſa eſt maior quam F x compoſita ex medijs, ergo altera* extremarum v P, P L, maxima erit, altera minima; ſed V P minor eſt quam P L, ergo ipſa V Q minima erit, atque adeo minor quam A F. quod eſt primum. 36 tertij / the. 3 huius

C

Deinde compleatur circulus F E, B R, quem K A producta ſecet in R. Quoniam igitur eſt vt A G ad A C,* ita A K ad A y; & ita quoque V z ad z L ex conſtructione: erit vt V z ad z L, ita A K hoc eſt A R ad A y. & permutando vt v z ad A R, ita z L ad A y. & conſequenter* ita V L ad R y, omnes videlicet antecedentes ad omnes conſequentes; ſed V z minor eſt quam A R; ponitur enim z v minor, quam A k, quæ eſt* maxima omnium interceptarū inter circumferentias A B C, K F: ergo & V L minor erit, quàm R y. lem. 17 / 12 quinti / lem. 10

D

Et quoniam rectangulum P V Q, ſeu V P L* æquale eſt quadrato V S, hoc eſt quadrato A I, cui quoque* æquale eſt rectangulum y a K, hoc eſt y a R; æqualia erunt rectangula V P L, y A R, & ideo proportionales V P, Y A, a R, P L: ſed V L compoſita ex extremis oſtenſa eſt minor, quam lem. 17

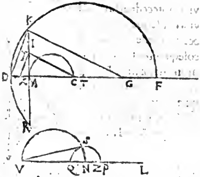
V Ry

the .2. huius R y compoſita ex medijs, ergo* altera mediarum y A, A R maxima erit, A altera minima; ſed A y maior eſt quam A R, ergo ipſa A R minima erit; & per conſequens V P maior quam A R, hoc eſt quam A k. quod eſt ſecundum.

Denique cum vt V P maior quam A k, ipſaque A K maior quam V Z, erit V P multo maior, quam V Z. atque adeo punctum Z erit in recta V P. quod vltimo loco erat oſtendendum.

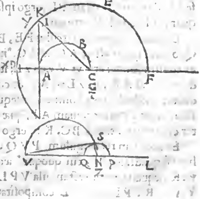
Lemma XXIII.

Sit ratio A D ad A F minor ratione A G ad A C, & ſemicirculus A B C non extendatur vltra centrũ circuli D E P. Dico V P compoſitam ex V N, N S minorem eſſe, quam A F, maiorem quam a k, & punctum z exiſtere in ipſa V P. B



Connectantur enim G k, k D, eiſque parallelæ agantur C y, y x, ſecantes a k, A D in punctis y X. erit lem. 17. igitur vt a G ad A C,* ita F C ad C x: ſed ita eſt quoque V Z ad Z L ex conſtructione; ergo vt V Z ad Z L, ita erit F C ad C X: & permutando vt V Z ad F C, ita Z L ad C x, 19 quinti & ita* quoque V L ad F X, omnes videlicet antecedentes ad omnes conſequentes. ſed V z ponitur lem. 21. minor quam F C; eſt enim F C* maxima omnium, quæ inter circumferentias A B C, X F interijciuntur; ergo & V L minor erit, quam F X. C

Et quoniam æquales ſunt V N, N L, & æquales quoque N B, N Q, vt ſemidiametri: ergo ſunt quoque æquales V P, L Q. Quare rectangulum P V Q æquale erit rectangulo V P L; ſed rectangulum P V Q 36 tertii * æquale eſt quadrato V S; hoc eſt, lem. 17 quadrato A I, cui quoque* æquale eſt rectangulum F A X, ergo rectangulũ V P L æquale erit rectangulo F A X: D



quare

A quare proportionales erunt VP, FA, AX, PL; ſed vL compoſita ex extremis oſtenſa eſt minor, quam FX compoſita ex medijs, ergo * altera mediarum FA, a X maxima erit, altera minima. itaque AF maxima erit quippe quæ maior eſt, quam AX, & per conſequens VP minor erit quam aF. quod eſt primum. The. 1. huius

Deinde compleatur circulus FED, quem Ka producta ſecet in R. Quoniam igitur eſt vt AG ad AC, ita * ak ad ay. & ita quoque VZ ad zL ex conſtructione; erit vt Vz ad zL, ita AK, hoc eſt AR ad ay. & permutando vt Vz ad AR, ita zL ad ay, & * ita quoque VL ad RY, omnes videlicet antecedentes ad omnes conſequentes. ſed Vz maior eſt quam AR, ponitur enim Vz maior quam AK, quæ eſt minima interceptarum inter cir- lem. 27 | 12 quinti | lem. 21

B cumferentias ABC, KF. ergo & VL maior erit quam Ry.

Et quoniam rectangulum PVQ, vel vPL æquale eſt quadrato VS, ſeu quadrato AI, cui quoque * æquale eſt rectangulum yak, hoc eſt yaR, erunt æqualia rectangula VPL, yAR, & ideo proportionales vP, yA, aR, PL. ſed vL compoſita ex extremis oſtenſa eſt maior, quam yR compoſita ex medijs, ergo altera * extremarum vP, PL maxima erit, altera minima; ſed vP maior eſt, quam PL, ergo ipſa vP maxima erit, & per conſequens maior quã AR, hoc eſt quam AK. quod eſt ſecundum. 36 tertij | lem. 17 | The. 1. huius

Rurſus quoniam eſt, vt AG ad AC, ita quadratum AK ad quadratum aI, & ita vZ ad ZL. vtrumque ex conſtructione, erit vt vZ ad zL, ita quadratum AK ad quadratum AI, hoc eſt ad quadratum vS, vel ad * rectangulum 36 tertij

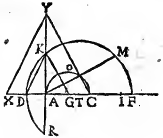
C PvQ, ſeu ad rectangulum vPL: ſed vt vz ad zL, ita eſt quoque quadratum vz ad rectangulum vzL, eandem enim habent altitudinem vz. ergo vt quadratum vz ad rectangulum vzL, ita erit quadratum Ak ad rectangulum vPL. ſed quadratum vz maius eſt quadrato Ak, ponitur enim recta Vz maior, quam AK, quæ eſt minima interceptarum, ergo & rectangulum vzL maius erit rectangulo vPL. quare punctum z propinquius erit ipſi N, quam punctum P, atque vtrumque exiſtit in medietate NL. ergo punctum z erit in recta vP. quod vltimo loco erat oſtendendum. lem 21

Lemma XXIV.

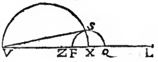
D Rurſus ſit ratio AD ad AF minor ratione AG ad AC. ſed ſemicirculus ABC extendatur vltra centrum circuli DEF, & data vZ non ſit maior minore rectarum AK, FC. Dico neque differentiam rectarum vN, NS, neque compoſitam ex ipſis minorem eſſe quam AK, aut maiorem quam AF: & punctum z exiſtere in ipſa differentia.

Sit VP differentia rectarum VN, NS, VQ vero aggregatum earundem, & compleatur circulus FE, DR, quem ka producta ſecet in R, & iungantur Gk, KD, eiſque parallelæ agantur CY, YX, ſecantes AK, AB productas in punctis YX. erit igitur vt AG ad AC,

lem. 17. * ita AK ad Ay: ſed ita eſt quoque VZ ad ZL ex conſtructione. ergo vt VZ ad ZL, ita erit AK, hoc eſt AR ad Ay. & permutando vt VZ ad AR, ita ZL ad 12. quinti Ay. & conſequenter * ita VL ad Ry, omnes videlicet antecedentes ad omnes conſequentes. ſed VZ non eſt maior quam AR, ponitur enim VZ non maior minore rectarum ak, FC. ergo neque VL maior erit quam Ry. A



Et quoniam rectangulum PVQ, hoc eſt VPL (ſunt enim æquales VQ, PL) æ- 36 tertii quale * eſt quadrato VS, hoc eſt quadrato lem. 17 AI, cui quoque * æquale eſt rectangulum yAK, rectangulum VPL æquale erit re- B



ctangulo yak, vel yaR, & ideo proportionales erunt VP, ya, aR, PL. ſed VL compoſita ex extremis oſtenſa eſt non maior, quam yR the. 2. huius compoſita ex medijs. ergo ſi eſt minor, erit * altera mediarum ya, ak maxima, altera minima. ſed ay maior eſt quam aR, ergo ipſa aR, hoc eſt ak, minima erit: & per conſequens VP maior quam aK. Si vero VL compoſita ex extremis æqualis eſt yR compoſitæ ex medijs, the. 3. huius * minor extremarum minori mediarum æqualis erit. hoc eſt VP æqualis aR, vel ak. C

Et quoniam VP minor eſt quam VS, hoc eſt quam aI, ipſaque aI minor quam aF, erit VP ipſa aF multo minor. Recta igitur VP differentia rectarum VN, NS non eſt minor quam ak, nec maior quam aF. quod eſt primum.

lem 17 Simili ratione quoniam eſt vt aG ad aC, * ita FC ad CX, & ita VZ ad zL ex conſtructione. ergo vt Vz ad zL, ita erit FC ad 12 quinti CX. & permutando vt Vz ad FC, ita erit zL ad CX, & ita * quoque VL ad FX omnes videlicet antecedentes ad omnes conſequentes. ſed Vz non eſt maior quam FC, ponitur enim Vz non maior minore rectarum ak, FC. ergo neque VL maior erit quam FX. Et quoniam re- lem. 17 ctangulum FaX * æquale eſt quadrato aI, & recta aI minor quam aF: D erit aX multo minor.

Rurſus quoniam rectangulum QVP, hoc eſt VQL, ſunt enim æquales 36. tertij lem. 17. VP, QL, * æquale eſt quadrato VS, hoc eſt quadrato aI, cui quoque * æquale eſt rectangulum FaX. ipſa rectangula VQL, FaX æqualia erunt, & ideo 16. ſexti proportionales * VQ, Fa, aX, QL: ſed VL compoſita ex extremis oſtenſa eſt The. 2. huius non maior, quam Fx cõpoſita ex medijs. ergo ſi eſt minor erit altera * mediarũ Fa, ax. Maxima, altera minima. ſed ax oſtenſa eſt minor quam aF, ergo Fa maxima erit. quare VQ minor quam aF. Si vero VL compoſita ex extre-

A extremis æqualis eſt F X compoſitæ ex medijs, * maior extremarum maiori mediarum æqualis erit, hoc eſt V Q æqualis A F. Theo.3 huius

Et quoniam eſt vt A G ad A C, minor nempe ad maiorem, ita quadratum A K ad quadratum A I, ex conſtructione, quadratum A k minus erit quadrato A I. vnde & recta A k minor quam recta A I, hoc eſt quam recta V S; ſed V Q maior eſt, quam V S, ergo multo maior erit quam A K. Recta igitur V Q compoſita ex V N, N S non eſt minor, quàm A k, nec maior quam A F, quod eſt ſecundum.

Poſtremo quoniam eſt vt A G ad A C, ita quadratum A K ad quadratum A I. & ita V z ad z L vtrumque ex conſtructione, erit vt V z ad z L, ita quadratum A K ad quadratum A I, hoc eſt ad quadratum V S, ſeu ad re-
B ctangulum P V Q, vel v P L. ſed vt v z ad z L ita * eſt quoque quadratum v z ad rectangulum v z L; ſunt enim eiuſdem altitudinis v z. ergo vt quadratum v z ad rectangulum v z L, ita erit quadratum A k ad rectangulum v P L. ſed quadratum v z non eſt maius quadrato A K: ponitur enim recta v z non maior minore rectarum A K, F C. ergo ſi eſt minus erit, & rectangulum v z L minus rectangulo v P L. quare punctũ B * propinquius erit ipſi N, quam punctum Z, atque vtrumque exiſtit in medietate v N. ergo punctum z erit in recta v P. Si vero quadratum v z æquale eſt quadrato A k; erit & rectangulum v z L æquale rectangulo v P L. quare punctum Z idem erit, quod punctum P. itaque z erit in recta v P. quod vltimo loco erat oſtendendum. Lem. 47 / 14 quint.

C

Scholium.

Ex demonſtratis patet ſi A D ad A F minorem rationem habeat quam A G ad A C, & ſemicirculus A B C extendatur vltra centrum circuli D E F, atque data v z non ſit maior minore rectarum A k, F C, Problema duobus modis poſſe abſolui. Nam ſi à puncto A ad circumferentiam K F ducatur recta A M æqualis A I, vel v S ſecans ſemicirculum A B C in O; erit M O * minima omnium, quæ inter circumferentias A B C, k F intercipiuntur. Et quoniam v P differentia rectarum v N, N S minor eſt, quam v S, hoc eſt quam A M, non autem quam A k, vt demonſtrauimus, poterit à puncto A ad circumferentiam K M duci recta
D A E æqualis v P. Lem. 49

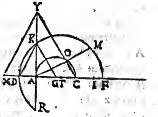
Similiter quoniam recta v Q compoſita ex v N, N S maior eſt quam v S, hoc eſt quam A M, non autem quam A F, vt demonſtrauimus; poterit à puncto A ad circumferentiam M F duci recta A E æqualis v Q. Itaque ſi recta A E ducatur æqualis v P, aptabitur recta æqualis datæ v z inter circumferentias K M, A O. ſi vero ducatur æqualis v Q, aptabitur inter circumferentias M F, O C. poterit igitur aptari ex vtraque parte minimæ, atque adeo Problema duobus modis abſolui. quod in tertio precepto monuimus.

 A

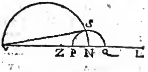
Lemma XXV.

Rurſus ſit ratio A D ad A F minor ratione A G ad A C, & ſemicirculus A B C extendatur vltra centrum circuli D E F: ſed data V Z ſit maior minore rectarum A k, F C, & à puncto A ad circumferentiam k F ducatur A M æqualis A I: eſt enim A I, * minor quàm A F, maior quam A k. Dico ſi A K maior ſit quam F C, differentiam rectarum V N, N S maiorem eſſe quam A K, minorem autem quam A M, & punctum z exiſtere in ipſa differentia. ſin minor compoſitam ex V N, N S minorem eſſe quam A F, maiorem autem quam A M. & punctum z exiſtere in ipſa compoſita.

lem.19.



Sit enim V P æqualis differentiæ rectarum V N, N S; V Q vero æqualis compoſitæ ex ipſis, & connectantur G K, k D, eiſque parallelæ agantur C y, y x ſecantes A k, A D productas in punctis y x, & compleatur circulus F E, D R, quem K A producta ſecet in R, & ſit primum A k maior, quam F C: ergo ipſa A k maxima erit omnium interceptarum inter circumferentias A B C, k F. quare recta datæ V z æqualis poterit aptari inter circumferentias K M, A O. non etiam inter circumferentias M F, O C cum ſit V z maior quàm F C, ex poſitione; ipſa autem F C * maxima omnium interceptarum inter circumferentias M F, O C.



lem.21. C

Corol.le.21

lem.25. Et quoniam eſt vt A G ad A C, * ita A K ad A y, & ita V z ad z L, ex conſtructione; erit vt V Z ad Z L, ita A k, hoc eſt A R, ad A Y. & permutando vt V Z ad A R, ita Z L ad A y. & ita * V L ad R Y; omnes videlicet antecedentes ad omnes conſequentes, ſed V Z minor eſt quam A R. ponitur enim V Z minor maxima A k. ergo & V L minor erit quam R y.

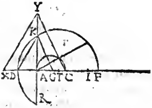
12.quinti

36.tertij Et quoniam rectangulum P V Q, hoc eſt V P L, * æquale eſt quadrato V S, lem.17 vel quadrato A I, cui quoque * æquale eſt rectangulum y A K, hoc eſt y A R, 16.ſexti ideo æqualia erunt rectangula V P L, y A R, & ideo * proportionales V P, y A, A R, P L. ſed V L compoſita ex extremis oſtenſa eſt minor quam D the.2.huius y R compoſita ex medijs. ergo * altera mediarum y A, A R maxima erit, altera minima, ſed A R minor eſt quam A y. ergo ipſa A R minima erit, & conſequenter V P maior quam A R hoc eſt quam A K. Ipſam autem V P minorem eſſe quam A M patet, cum ipſa V P minor ſit quam V S, cui æquales ſunt A I, A M, ex conſtructione.

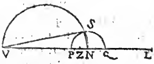
Rurſus quoniam eſt, vt A G ad A C, ita quadratum A K ad quadratũ A I, & ita V z ad z L vtraque ex conſtructione erit vt V z ad z L, ita quadratum 36 tertij A k ad quadratum A I, hoc eſt ad quadratũ V S, ſeu ad * rectangulum P V Q, 9 ſexti vel V P L. ſed vt V z ad z L, ita eſt * quoq; quadratum V z ad rectangulum,

cum

A cum ſint eiuſdem altitudinis V z, ergo vt quadratum V z ad rectangulum V z L, ita erit quadratum A K ad rectangulum V P L. ſed quadratum V z minus eſt quadrato A K: ponitur enim recta V z minor maxima, quæ eſt A k. ergo & rectangulum V z L minus erit rectangulo V P L. quare punctum P * propinquius erit ipſi N, quam punctum z. itaq; punctum z erit in lem. 18
in recta V P. Exiſtente igitur A K maiori, quam F, recta V P differentiæ rectarum V N, N S maior eſt, quàm A L, minor autem quam A M, atq; punctum z exiſtit in recta V P. quod eſt primum.



Deinde ſit A k, minor quam F C. ergo F C * maxima erit omnium interceptarum inter circumferentias A B C, k F. quare recta da- lem. 11
B tæ V z æqualis poterit aptari inter circumferentias M F, O C, non autem inter circumferentias k M, A O, cum ponatur V z maior quam A K, quæ eſt * maxima omnium interceptarum inter circumferentias K M, A O. Corol. le. 11



Et quoniam eſt vt A G ad A C, * ita F C ad C x, & ita V z ad z L, ex conſtructione, erit vt V z ad z L ita F C ad c x, & permutando vt V z ad F C, ita erit z L ad C x, & conſequenter * ita V L ad F x, omnes videlicet antecedentes ad omnes conſequentes; ſed V z minor eſt quam F C; poni- lem. 1? 11 quinti
C tur enim V z minor maxima interceptarum inter circumferentias A B C, k F, ergo & V L minor erit, quam F x. Et quoniam rectangulum F A x * æquale eſt quadrato A I, & recta A I minor quam A F, erit A x multo minor. lem 17

Et quoniam rectangulum Q V P, vel V Q L * æquale eſt quadrato V S, hoc eſt quadrato A I, cui quoque * æquale eſt reganctulum F A x, rectangula V Q L, F A x æqualia erunt, & ideo proportionales V Q, F A, A x, Q L, ſed V L compoſita ex extremis oſtenſa eſt minor, quam F x, compoſita ex medijs, ergo * altera mediarum F A, A X maxima erit, altera minima. ſed A x oſtenſa eſt minor quam F A. ergo ipſa F A maxima erit. quare V Q minor quam A F. Ipſam autem V Q maiorem eſſe, quam A M manifeſtum eſt, cum ea maior ſit, quam V S, cui æqualis eſt A I, vel A M 36 tertij lem 17 the. 2 hujus
D ex conſtructione.

Similiter punctum z exiſtere in recta V Q conſtat. nam cum ſit vt A G ad A C minor ad maiorem, ita V z ad z L ex conſtructione, erit & V z minor, quam z L vnde punctum z erit in recta V N, & conſequenter in recta V Q. Exiſtente igitur A k minori, quàm F C, recta V Q compoſita ex V N, N S minor eſt, quàm A F, maior autem quam A M. & punctum z exiſtit in ipſa V Q. quod ſecundo loco erat oſtendendum.

Reſolutio prædicti Caſus quemadmodum tertij, & quarti incidit in æquationem de duobus terminis explicabilem, quorum non ſemper vterque indicat quæſitam A E, iſque Caſus parum diſtat à prædictis. idcirco eadem fere

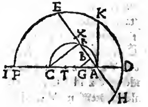
ratione

ratione terminus ipſam quæſitam indicans dignoſcitur; quo tamen conſtantior vndique cernatur methodus, hic quoque breuiter oſtendam quomodo terminus quæſitam A E indicans à non indicante diſcernatur. A

Propoſ. I.

Terminum quæſitam A E indicantem, in ſemicirculis ad primum Præceptum pertinentibus dignoſcere.

2 AD 4
4 AC 8
3 CF 6
℞ 56 A I ℞ 224
1 AG 2



SIt ratio A D ad A F non minor ratione A G ad A C.

Oportet terminum indicantem quæſitam A E dignoſcere. B

Reſumatur compoſitionis figura ad huiuſmodi Caſum pertinens. Quoniam igitur termini de quibus Æquatio explicabilis eſt ſunt V P. differentia rectarum V N, N S. & V Q aggregatum earundem. V Q autem maior eſt quam V S, hoc eſt quam A I, & conſequenter multo maior quam A E,

lem. 19 de qua quæritur; eſt enim * A I non maior quam A F. itaq; v Q non indicat ipſam A E. ergo eam indicat v P, Itaque exiſtente ratione A D ad A F non minori, quàm A G ad A C, differentia rectarum v N, C N S indicat A E quæſitam; agnitus eſt igitur terminus quæſitam A E indicans, vt faciendum erat. Hinc Præceptum primum conſtitutum eſt.

Propoſ. II.

Terminum indicantem quæſitam A E in ſemicirculis ad ſecundum Præceptum pertinentibus dignoſcere.

vid: fol.a 14 Caſ.7

SIt ratio A D ad A F minor ratione A G ad A C. & ſemicirculus A B C non extendatur vltra T centrum circuli D E F.

Oportet terminum quæſitam A E indicantem dignoſcere. Reſumatur compoſitionis figura ad hunc Caſum pertinens. D

Termini de quibus æquatio explicabilis eſt ſunt v P aggregatum rectarum v N, N S, & v Q differentia earundem. Et quoniam eſt vt A G ad A C, ita quadratum A L ad quadratum A I ex conſtructione. & A G in hac ſemicirculorum poſitione non minor quam A C: ergo neque quadratum minus erit, quadrato A I. quare nec recta A K minor, quam recta A I, ſed A E quæſita maior eſt, quam A K; ergo maior etiam, quàm A I, hoc eſt quatur v S. & conſequenter multo maior, quam v Q: recta igitur v Q non indicat quæſitam A E, ergo eam indicat v P. Itaque exiſtere ratione A D ad A F maiore, quam A G ad A C, & ſemicirculo A B C non extenſo vltra

centrum

A centrum circuli D E F. aggregatum rectarum V N, N S indicat quæſitam A E. Agnitus eſt igitur terminus ipſam quæſitam indicans, vt faciendum erat. Hinc Præceptum ſecundum conſtitutum eſt.

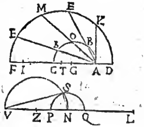
Propoſ. III.

Terminum indicantem quæſitam A E in ſemicirculis ad tertium Præceptum pertinentibus dignoſcere.

RVrſus ſit ratio A D ad A F minor ratione A G ad A C, ſed ſemicirculus A B extendatur vltra centrum T, & data V z non ſit maior minore rectarum A K, F C.

B Oportet terminum indicantem quæſitam A E dignoſcere.

Reſumatur compoſitionis figura pertinens ad hunc Caſum



Quoniam igitur eſt, vt A G ad A C, ita quadratum A k ad quadratum A I, ex conſtructione; & A G in hac ſemicirculorum poſitione minor eſt, quam A C; erit & quadratum A K minus quadrato a I. vnde & recta a k minor, quam recta a I, ſeu quod idem eſt, a I maior, quam a k; ſed ipſa * a I minor eſt quam a F. ergo poterit à puncto A ad circumferentiam K F ter. 19.

C duci recta A M æqualis A I; ducatur igitur A M ſecans ſemicirculum a B C in O. Aut igitur quæſita a F terminatur in circumferentia k M, vel in circumferentia M F: poteſt enim terminari in vtraque nam recta æqualis datæ V z poteſt aptari inter circumferentias ſemicirculorum ex vtraque parte minimæ M O, cum ipſa V z ponatur non maior minore rectarum a k, F C. ſi igitur a E definit in circumferentia k M; ea minor eſt, quam a M, hoc eſt, quam a I, ſeu quam V S, & multo minor quam V Q aggregatum rectarum V N, N S, quod eſt vnus è duobus terminis de quibus A quatio explicabilis eſt; alter vero eſt V P differentia rectarum V N, N S. Terminus igitur V Q non eſt idoneus ad indicandam a E quæſitam. ergo eam indicat V P.

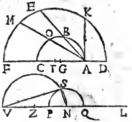
D Si vero quæſita a E deſinit in circumferentia M F, ea maior eſt, quam a I, ſeu quam V S, & multo maior quam V P, recta igitur V P non indicat ipſam quæſitam: ergo eam indicat V Q. Quando igitur ratio a D ad a F minor eſt ratione a G ad a C, & ſemicirculus a B C extenditur vltra centrum T, atque data V z non eſt maior minore rectarum a K, F C, indicat quæſitam a E, tum differentia tum aggregatum rectarum V N, N S. differentia quidem cum a E deſinit in circumferentia k M; aggregatum vero cum deſinit in circumferentia M F. Agnitus eſt igitur terminus quæſitam a E indicans, vt faciendum erat. Hinc Præceptum tertium conſtitutum eſt.

Propoſ.

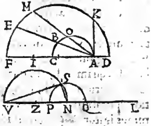
 A

Propoſ. IV.

Terminum indicantem quæſitam a E in ſemicirculis ad Præceptum quartum pertinenibus dignoſcere.



RVrſus ſit ratio a D ad a F minor ratione a G ad a C, & ſemicirculus, a B C extendatur vltra T centrum circuli D E F, ſed dat V z ſit maior minore rectarum a K, F C. Oportet terminum indicantem quæſitam a E dignoſcere. Facta conſtructione vt in antecedenti Propoſitione, manifeſtum eſt rectam datæ V z æquale poſſe aptari inter circumferentias ſemicirculorum ex vna tantum parte minimæ. nempe è regione maioris rectarum A K, F C. Itaque ſit primum A K maior quam F C, ergo recta æqualis datæ V z poteſt aptari inter circumferentias K M, A O, non autem inter circumferentias M F, O C, cùm ſit B
Corol. le. 21 V z maior quam F C, ipſaque F C * maxima omnium, quæ inter circumferentias M F, O C interijciuntur. ergo A E quæſita deſinit in circumferentia k M, & ideo minor eſt quam A M, hoc eſt quam A I, ſeu quam V S, & multo minor quam V Q aggregatum rectarum V N, N S: terminus igitur v Q non indicat quæſitam A E. ergo eam indicat V P differentia ipſarum V N, N S. C



Sed ſit F C maior quam A k. ergo recta æqualis datæ V z poteſt aptari inter circumferentias M F, O C, non autem inter circumferentias K M, A O, & A E quæſita deſinit in circumferentia M F, & ideo maior eſt quam A M hoc eſt quam A I, ſeu quam V S, & per conſequens multo maior quam V P differentia rectarum V N, N S. ipſa igitur v P non indicat quæſitam A E. ergo V Q aggregatum rectarum v N, N S eam indicat. Cum igitur ratio A D ad A F minor eſt ratione A G ad A C, & ſemicirculus A B C extenditur vltra centrum T, atque data V z maior eſt minore rectarum A K, F C, exiſtente A k maiore, quam F C differentia rectarum v N, N S indicat A E quæſitam. exiſtente vero F C maiore quam A R, aggregatum. Agnitus eſt igitur terminus quæſitam A E indicans, vt faciendum erat. Hinc Præceptum quartum conſtitutum eſt. D

Caſus. VIII.

Rurſus vergant ad diuerſas partes dati duo ſemicirculi. maior ſi compleretur minorem includens, & recta ponenda pertineat ad angulum ſemicirculi mino-

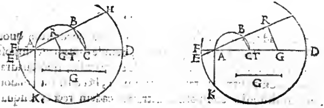
A minoris: ſed ab eo angulo ſemicirculus maior minus diſtet, quam à reliquo.

SInt igitur tales dati duo ſemicirculi a b c, d e f; data autem recta linea G, & à puncto à demittatur ipſi d f perpendicularis a k, vſque ad circumferentiam d e f.

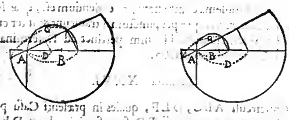
Oportet inter circumferentias a b c, K f ponere rectam lineam æqualem ipſi G, ita vt ad punctum a pertineat.

Reſolutio

SIt iam poſita recta linea e a b æqualis datæ G, & ex centro circuli d e f. quod ſit t, ponatur t g æqualis t c, & compleatur circulus f e, d h,
B quem e b producta ſecet in h, & ipſi e h ducatur perpendicularis



C



g r, & ducatur b c. ea quoque eidem e h perpendicularis erit; cum ſit rectus angulus a b c in ſemicirculo. quare æqualis erunt h r, e b.

Datarum autem a c, a g, b e, a k prima ſit B. ſecunda D. tertia G. quarta K, vt deſignatura eſt in figuris ad reſolutionem pertinentibus. & quæratur
D a e. eſto illa A. ergo a b erit G -- A. & cum ſint ſimilia triangula a b c, a r g, erit vt a g ad h g, ita a b ad a r. quod in figuris ad reſolutionem pertinentibus reſpondet: vt B ad D ita G -- A ad $\frac{D \text{ in } G -- D \text{ in } A}{B}$, atque adeo a r erit $\frac{D \text{ in } G -- D \text{ in } A}{B}$, cui addita r h æquali e b tota a h erit $\frac{D \text{ in } G -- D \text{ in } A}{B}$ ✢ G. ſed rectangulum e a h æquale eſt quadrato a k, ergo

G in A ✢ $\frac{D \text{ in } G \text{ in } A -- D \text{ in } A Q}{B}$ æquabitur K Q.

Ducantur omnia in B, ergo

B in G in A ✢ D in G in A -- D in A Q æquabitur k Q in B.

Et applicentur omnia ad D, vt Poteſtas æquationis ex ſe ſubſiſtat, ergo.

$\frac{B \text{ in } G \text{ in } A}{D}$ ✢ G in A -- A Q æquabitur $\frac{K Q \text{ in } B}{D}$

Sed

Sed vt Æquatio facilius explicetur transmutentur fractiones in integras magnitudines, vt in reſolutionibus præcedentium Caſuum factum eſt; hoc eſt fiat vt D ad B, ita k Q ad aliud quadratum quod ſit Z Q, erit Z Q idem quod $\frac{k\,Q \text{ in } B}{D}$. Similiter fiat vt D ad B, ita G ad aliam rectam, quæ ſit F, eritq. F eadem quæ $\frac{B \text{ in } G}{D}$. & planum F in A idem, quod planum $\frac{B \text{ in } G \text{ in } A}{D}$. facta igitur traſmutatione. A

F in A + G in A -- A Q æquabitur Z Q.

Vel F + G in A -- A Q æquabitur Z Q

Et explicata Æquatione. $F\frac{1}{2} + G\frac{1}{2} +$ L.V. $(F\frac{1}{2} + G\frac{1}{2}\,Q - ZQ)$ æquabitur A

Vel $F\frac{1}{2} + G\frac{1}{2} -$ L.V. $(F\frac{1}{2} + G\frac{1}{2}\,Q - ZQ)$ æquabitur A.

In hac quoque Æquatione A explicabilis eſt de duobus terminis, ſed cum in omni Caſu non poſsit ſumi vterque ad indicandam, a e quæſitam, inter ſumendus ſit ſuo dicetur loco. B

Poriſma.

Fiat vt a g ad a c, ita quadratum a k ad aliud quadratum quod ſit a i. & ita recta G ad aliam rectam quæ ſit F, deinde dimidiæ compoſitæ ex F, & G addita recta, cuius quadratum æquale eſt exceſſui, quo quadratum eiuſdem dimidiæ compoſitæ ſuperat quadratum a i, fiet terminus maior.

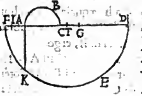
Vel eidem dimidiæ compoſitæ detracta eadem recta, reliqua erit terminus minor.

Sed antequam Problema componam, oſtendendum eſt, quæ ſit maxima, quæue minima rectarum, quæ per punctum à tranſeunt & inter circumferentias a b c, k f interijciuntur. id enim pertinet ad Determinationem, ſed prius ſequens Lemma demonſtrabo. C

Lemma XXVI.

Sint duo ſemicirculi A B C, D E F, quales in præſenti Caſu ponuntur, & recta A k perpendicularis ipſi F D ſecet ſemicirculum D E F, in K, & ex centro circuli D E F, quod ſit T ſumatur T S æqualis T C, & fiat vt A G ad A C, ita quadratum A K ad quadratum A I. Dico ſi ratio A D ad A F minor eſt ratione A G ad A C, & rectam A I minorem eſſe, quam A F, & ſi æqualis, æqualem; & ſi maior maiorem. D

Primum ſit ratio A D ad A F minor ratione A G ad A C. ergo minor erit & ratione quadrati A K ad quadratum A I: eſt enim vt A G ad A C, ita quadratum a k ad quadratum A I; ſed vt A D ad A F prima videlicet trium proportionalium a D, a k, a F ad tertiam, ita eſt quadratum ſecundæ, a K ad quadratum A F tertiæ. ergo ratio



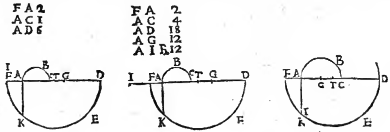
F A 4
A C $\frac{1}{2}$
C G 2
A D 9
A K 6
A I R. 15 $\frac{3}{7}$

qua-

A quadrati A K ad quadratum A F minor erit ratione quadrati A k ad quadratum A I. quare quadratum a I minus erit quadrato A F. vnde & recta A I, minor, quàm recta A f. quod eſt primum.

Sit deinde ratio A D ad A f eadem, quæ A G ad A C. ergo eadem erit ratio & quadrati A k ad quadratum A I. ſed vt A D ad A f, prima nempe ad tertiam, trium proportionalium A D, A k, A f; ita eſt quadra-

B



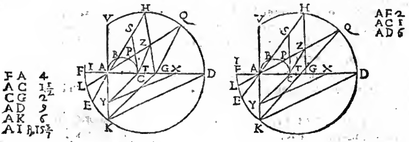
tum ſecundæ A k ad quadratum A f tertiæ. ergo quadratum A I quadrato A f æquale erit. vnde & recta A I æqualis rectæ A f. quod eſt ſecundum.

Sit tertiò ratio a D ad a f maior ratione a G ad a C. ergo maior erit & ratione quadrati a L ad quadratum a I, cum ſit vt a G ad a C, C ita quadratum a L ad quadratum a I, ex conſtructione. ſed vt a D ad a f, ita eſt quadratum a k ad quadratum a f, vt demonſtrauimus, ergo ratio quoque quadrati a K ad quadratum a f maior erit ratione quadrati a K ad quadratum a I, quare quadratum a I* maius erit quadrato a f. vnde & recta a I maior, quam recta a f quod eſt tertium. quare conſtat propoſitum.

z. quinti

Lemma XXVII.

Iſdem poſitis ſit ratio a D ad a f non maior ratione a G ad a C. Dico a K maximam eſſe omnium, quæ ad punctum a pertinent, & inter



circumferentias a B C, K f interijciuntur, minimam vero f C. Aliarum A
autem propinquiorem minimæ, remotiore minorem eſſe.

Ducatur enim per a vtcunque recta linea E a B ſecans circumferentias
k f, a B C in pūctis E B, & cōpleatur circulus f E, D H, quē E B, K a productæ
ſecent in punctis H V, & connectantur G K, K D, G H, quibus parallelæ agātur
C y, y X, C S ſecantes a K, a D, a H in punctis y X S. erit igitur rectangulum
lem. 17 F a X * æquale quadrato a I, vnde proportionales erunt a F, a I, a X. ſed a I, ex
antecedente Lemmate, non eſt maior quam a F, eo quod ratio a D ad a F poni-
tur nō maior ratione a G ad a C. ergo neque a x maior erit, quam a I, nec ideo
coroll. lem. 17 16 ſexti maior quam a F. Rurſus quoniam rectangulum F a X * æquale eſt rectangulo
Y a K. erit * vt a K ad a F, ita a X ad a y: ſed a K maior eſt quam a F, ergo &
a x maior erit, quam a y. ſed ipſa a x oſtenſa eſt non maior, quàm a F. ergo & B
a F maior erit, quam a y. itaq; quatuor proportionalium a k, a F, a x, a y mini-
ma erit a y, maxima a k. quare cōpoſita ex a y, a k, hoc eſt y V maior erit, quàm
lem. 17 F x compoſita ex reliquis. Et quoniam eſt vt a G ad a C, * ita a K ad a y, &
ita F C ad C X * erit vt a K, hoc eſt a V ad a y, ita F C ad C x. & conuer-
tendo vt y a ad a V, ita x C ad C F. & componendo vt y V ad V a, ita x F ad
F C. ſed y V oſtēſa eſt maior quā x F. ergo & V a, hoc eſt a k, maior erit quā F C.
coroll. lem. 17 16 ſexti Similiter quoniā * æqualia ſunt rectāgula y a K, E a S, erit vt * a k ad a E, ita a S
ſexti ad a y: ſed a K maior eſt, quam a E: ergo & a S maior erit, quā a y. eſt autem
& a E maior quā a y, cum ſit & a F maior, vt demōſtrauimus. ergo quatuor
25 quinti proportionalium a k, a E, a S, a y, minima erit a y, maxima a k. quare cōpoſi-
ta ex a y, a K, hoc eſt recta y v, * maior erit, quàm S E compoſita ex reliquis. C
lem. 17 Et quoniā eſt vt a G ad a C, * ita E B ad B S, & ita a k ad a y. erit vt a k, hoc
eſt a V ad a y. ita E B ad B S, & cōuertendo vt y a ad a V, ita S E ad B E, &
cōponendo vt y V ad a V, ita erit S E ad E B. ſed y V oſtenſa eſt maior, quam
S E. ergo & A V, hoc eſt A K, maior erit, quàm E B. Eadem ratione oſtende-
tur ipſa A k omnibus alijs maior. Maxima eſt igitur omnium A k. quod
eſt primum.

coroll. lem. 17 16 ſexti Eadē ratione, quoniam * æqualia ſunt rectangula F A x, E A S, * proportiona-
les erunt A E, A F, A x, A S. ſed A E maior eſt, quàm A F. ergo & A x maior
erit, quàm A S. ſed cū ſit A x non maior, quàm A F, vt demōſtrauimus. ergo &
ipſa A F maior erit, quam A S: & cōſequenter A E multo maior. Itaq; A S mi-
nima erit quatuor proportionaliū A E, A F, A x, A S. maxima A E. atq; adeo S E. D
25 quinti cōpoſita ex maxima & minima * maior erit, quàm x F compoſita ex reliquis.
lem. 17 Et quoniā eſt vt A G ad A C, ita * E B ad B S. & ita F C ad C x, erit F C ad C x
vt E B ad B S. & cōuertēdo, & cōponēdo vt x F ad F C, ita erit S E ad E B. ſed x F
oſtenſa eſt minor, quam S E: ergo & F C minor erit quam E B. & ſic demon-
ſtrabitur ipſa F C omnibus alijs minor. Minima eſt igitur omnium F C; quod
eſt ſecundum.

Poſtremo ducatur per A alia recta L A P ipſi F C propinquior, quàm E B, ſe-
cans circumferentias F K, A B C in punctis L P, eaque producatur donec ſecet

cir-

Digitized by Google

A circulum F E D completum in Q; & iungatur G k, & ei parallela agatur C Z ſecans ipſam L Q in Z. rectangula igitur L A Z, E a S æqualia * erunt, coro. lem. 17 & ideo * proportionales a L, a E, a S, a Z. ſed a L minor eſt, quam A E. 16 ſexti. ergo & a S minor erit, quàm a Z. Et quoniam rectangulum E a S * æquale lem. 17 eſt quadrato a I: proportionales erunt a E, a I, a S; ſed a E maior eſt, quàm a I cum ipſa a I non * ſit maior quam a F. ergo & a I maior erit quam a S. 19 ſexti itaque ipſa a S minor erit, quam a L, & multo minor, quam a E, atque eſt minor quam a Z, vt demonſtrauimus. ergo ipſa a S minima erit quatuor proportionalium a L, a E, a S, A Z: maxima ideo a E. vnde E S compoſita ex maxima, & minima * maior erit, quàm L Z compoſita ex reliquis, hoc eſt L z minor, quàm E S.

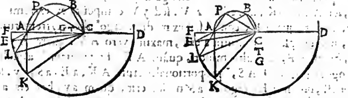
B Et quoniam eſt vt a G ad a C, * ita E B ad B S, & ita L P ad P z. erit vt lem. 17 LP ad P z, ita E B ad B S. & conuertendo vt z P ad p L, ita S B ad B E. & componendo vt z L ad L p, ita S E ad E B. ſed z L oſtenſa eſt minor, quàm S E, ergo & L p minor erit quam E B. Propinquior igitur minimæ minor eſt remotiore. quod tertio loco erat oſtendendum.

Lemma XXVIII.

Rurſus iiſdem poſitis ratio autem A D ad A F ſit maior ratione A G ad A C. Dico ſi ſemicirculus A B C extenditur vltra centrum circuli D E F, aut ipſum centrum attingit, rectam F C maximam eſſe omnium, quæ ad punctum A pertineat, & inter circumferentias ABC, kF

C interijciuntur, minimam A k. Si verò nec extenditur, nec centrum illud attingit; ducatur à puncto A ad circumferentiam K F recta A M æqualis A I, & producatur ad circumferentiam A B C in O: eſt autem A I * maior, quàm a F, lem. 26 minor vero, quàm a K. cum ſit vt a G ad a C maior nempe ad minorem, ita quadratum a k ad quadratum a I ex poſitione. Dico maiorem rectarum a K, F C maximam eſſe; M O minimam. Aliarum autem propinquiorem minimæ remotiore ex eadem parte minorem eſſe.

Ducatur enim per A vtcunque recta linea E a B ſecans circumferentias F K a B C in punctis E B, & primum ſemicirculus a B C, vel extendatur vltra cen-

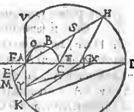
D 

trum circuli D E F, quod ſit T, vel ipſum centrũ attingat, & connectantur C K C E, C B. angulus igitur E B C in ſemicirculo rectus erit. quare E C baſis trianguli E B C, maior erit latere E B. ſed F C non eſt minor, quam E C: ergo & F C maior erit quã EB, & ſic oſtẽdetur maior omnibus alijs. Maxima eſt igitur F C,

Rurſus quoniam C K non eſt maior quam C E. ideo nec quadratum C k A
47 primi maius erit quadrato C E; ſed quadratum C k * æquale eſt quadratis A K, A C, & quadratum C E æquale quadratis E B, B C. ergo nec quadrata A K, A C maiora erunt quadratis E B, B C: ſed quadratum A C maius eſt quadrato B C. ergo reliquum quadratum A K minus erit reliquo quadrato E B. vnde & recta A K minor, quàm recta E B. atque eadem ratione oſtendetur minor omnibus alijs. Minima eſt igitur A k.

Ducatur autem alia recta L A P ipſi A K propinquior quam E B, ſecans circumferentias F k, A B C in punctis L P, & iungantur C P, C L. angulus igitur L P C in ſemicirculo rectus erit; Et quoniam C L non eſt maior quam C E, nec quadratum C L maius erit quadrato C E. ideſt nec
11 quadrata L P, P C maiora erunt quadratis E B, B C: ſed quadratum P C B
maius eſt quadrato B C. ergo reliquum quadratum L P minus erit reliquo quadrato E B. quare & recta L P minor, quam recta E B. ideſt propinquior minimæ minor remotiore.

Sed non extendatur ſemicirculus A B C vltra centrum T, nec ipſum centrum attingat. Producatur autem E B ſecans circulum completum in H, quem etiam k A producta ſecet in V, & iungantur G H, G k, K D, eisque parallelæ agantur C S, C y, y X ſecantes A H, A k, A D, in punctis S y X. & ſit primum A k maior quam F C. Quoniam igitur eſt vt A G ad A C, * C
ita F C ad C X, & ita A k ad A y. erit A K hoc eſt A V ad A y, vt F C ad C X. & permutando vt A V ad F C, ita A y ad C x. & con-



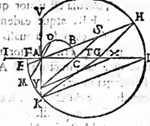
12 quinti ſequenter * ita V y ad F x omnes videlicet antecedentes ad omnes conſequentes. ſed A V, cui æqualis eſt A K, ponitur maior quam F C: ergo & V y maior erit quam F x.

coroll. lem. 17 / 16 ſexti Et quoniam * æqualia ſunt rectangula y A k, F A x. erit * vt A y ad A F, ita A x ad a K, hoc eſt ad A V. ſed y V compoſita ex extremis oſten-
Teor. 2 huius ſa eſt maior, quam F x compoſita ex medijs. ergo * altera extremarum A y, D
A V, nempe ipſa A y minima erit, maxima vero A V. quare A y minor
coroll. lem. 17 erit, quam A F, & multo minor, quàm A E. Et quoniam * æqualia ſunt
16 ſexti rectangula y A k, E A S, * proportionales erunt A K, a E, a S, a y. ſed a k maior eſt, quam a E. ergo & a S maior erit, quam a y, hoc eſt a y minor, quam a S. ſed ipſa a y eſt quoque minor, quam A E, vt demonſtrauimus, & minor, quam a K; ergo ipſa A y minima erit quatuor proportio-
Teor. 2. huius nalium a K, a E, a S, a y. * maxima vero a K. vnde compoſita ex y a, a K maxima videlicet, & minima. hoc eſt recta y V, maior erit quam E S compoſita ex reliquis.

Et

A Et quoniam eſt vt a G ad A C, ita* E B ad B S, & ita a K ad a y; erit a K, hoc eſt a V ad a Y vt E B ad B S; & conuertendo, vt y a ad a F, ita S B ad B E; & componendo vt y V ad V a, ita erit S E ad E B. ſed Y V oſtenſa eſt maior, quam S E, ergo & V a, hoc eſt a K, maior erit quam E B. & ſic demonſtrabitur omnibus alijs maior. Maxima eſt igitur omnium a K. Lem.xvij.

Sed ſit F C maior, quam A k. eadem ratione quoniam eſt vt a G ad a C, ita* F C ad C X, & ita a k ad a y; erit F C ad C X, vt a k, hoc eſt a V ad a y. & permutando vt F C ad a V, ita C X ad a Y. & conſequenter ita F X ad V y, id eſt omnes antecedentes ad omnes conſequentes. Ibid.



FA	2
AC	4
AD	12
AKB	24
AI	4

B ſed F C ponitur maior, quam a K, hoc eſt quam a V: ergo & F X maior erit, quam V y. ſed F X compoſita eſt ex extremis quatuor proportionalium a F, a y, a V, a X. ipſa vero V y ex medijs; conſtat autem eas proportionales eſſe ex eo quod rectangulum F a X* æquale eſt rectangulo y a K, hoc eſt y a V. ergo* altera extremarum a F, a X maxima erit, altera minima. ſed a F non eſt maxima, cum ſit minor quam a V. ergo minima erit, & conſequenter a X maxima itaque a X maior erit quam Corol.xvij. Th.2. huius

C a V, & multo maior quam a E.

Et quoniam* æqualia ſunt rectangula F a X: E a S, proportionales erunt a F, a E, a S, a x. ſed a F minor eſt, quam a E, ergo & a S minor erit, quam a X. eſt autem & a E minor quam a X; vt demonſtrauimus. & conſequenter a F multo minor itaque a X maxima erit quatuor proportionalium a F, a E, a S, a X. quare* a F minima; vnde F X compoſita ex maxima, & minima maior erit, quam S E compoſita ex reliquis. Corol.xvij Teor.2.huius

Et quoniam eſt vt a G ad a C* ita F C ad C X, & ita E B ad B S. erit F C ad C x vt E B ad B S. & conuertendo vt x C ad C F, ita S B ad B E,* & componendo vt x F ad F C, ita S E ad E B. ſed x F oſtenſa eſt maior quam S E; ergo & F C maior erit, quam E B. eademq. ratione oſtendetur maior omni- lem. 16

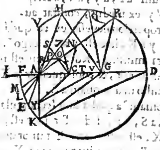
D bus alijs. quare maxima eſt omnium F C. quod eſt primum.

Sed ſint æquales a k, F C. Quoniam igitur eſt vt a G ad a C,* ita F C ad C x. & ita a k ad a Y. erit F C ad C X, vt a k ad a y. ſed F C ponitur æqualis a k; ergo & C x æqualis erit a y. & additis æqualibus C F, a V, tota x F æqualis erit. toti y V. ſed x F compoſita ex extremis quatuor proportionalium F a, a y a V, a x; ipſa vero y V ex medijs. patet autem eas proportionales eſſe; quia rectangulum F a x* æquale eſt rectangulo y a K, hoc eſt Y a V. ergo maior extrema maiori mediæ, minor minori* æqualis erit. itaque a F altera ex extremis æqualis erit alteri ex medijs y a, a V. ſed non eſt æqualis ipſi a V, quia minor eſt. ergo æqualis erit ipſi a y. Ibidem Corol. lem. 17 Theor.3 huius

Coroll. lem. 17. 11. Et quoniam rectangulum y A K, hoc eſt y A V, æquale eſt rectangulo E A S, proportionales erunt A y, A E, A S, A V. ſed A y cum ſit æqualis A F, minor eſt quam A E: ergo & A S minor erit, quam A V. itaque Theore. 9 huius quatuor proportionalium A y, A E, A S, A V maxima erit A V, & conſequenter minima A y. vnde y V compoſita ex maxima, & minima maior quam S E compoſita ex reliquis. A

lem. 17. Et quoniam eſt vt A G ad A C, ita E B ad B S, & ita A k, hoc eſt A V ad A y, erit A V ad A y, vt E B ad B S. & conuertendo vt y A ad A V, ita S B ad B E. & componendo vt y V ad V A, ita erit S E ad E B, ſed y V, oſtenſa eſt maior quam S E, ergo & V A, hoc eſt A k maior erit, quam E B. atque eadem ratione oſtendetur maior omnibus alijs; quare & F C, cum ſit æqualis A k, erit quoque omnibus maior, itaque vtraque maxima erit. Maior igitur rectarum A k, F C maxima eſt omnium, quæ ad punctum V A pertinent, & inter circumferentias A B C, K F interijciuntur. B

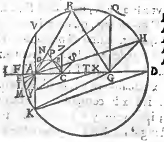
Deinde producatur M O donec ſecet circulum F E D completum in R, & connectatur G R, cui parallela agatur C N ſecans M R in N.



C

lem. 17 rectangulum igitur M A N æquale erit quadrato A I, hoc eſt, quadrato A M; ſunt enim æquales rectæ A I, A M, ex conſtructione. quare A M æqualis erit ipſi A N, & cum ſit rectangulũ F A X lem. 17 æquale quadrato A I, hoc eſt, quadrato A M; proportionales erunt a F, a M, a X: ſunt autem & inæquales, quia a F minor eſt quam a M, ergo F X compoſita ex extremis maior erit quam dupla media, hoc eſt quam M N.

lem. 17 Et quoniam eſt vt a G ad a C, ita F C ad C X, & ita M O ad O N erit F C ad C X, vt M O ad O N, & conuertendo vt X C ad C F, ita N O ad O M, & componendo vt X F ad F C, ita erit M N ad M O. ſed X F oſtenſa eſt maior, quam N M, ergo & F C maior erit quam M O. Eadem ratione quoniam rectangulum y a K, hoc eſt, y a V, lem. 17. æquale eſt quadrato a I, vel qua- 17 ſexti drato a M, proportionales erunt y A, A M, A V: ſunt autem & inæquales, ergo y V compoſita ex extremis maior erit, quam M N, media videlicet dupla. Et quoniam eſt vt A G ad A C, ita A K ad A y, &



D

ita

A ita MO ad ON: erit vt AK vel AV ad AY, ita MO ad ON. & conuertendo vt yA ad AV, ita NO ad OM. & componendo vt yV ad VA, ita erit NM ad MO. ſed yV oſtenſa eſt maior, quam NM: ergo & VA, vel Ak, maior erit quam MO.

Atque quoniam rectangulum EAS æquale eſt quadrato AI, hoc eſt quadrato AM; proportionales erunt AE AM AS; ſunt autem & inæquales; ergo ES compoſita ex extremis maior erit, quàm dupla media, hoc eſt quam MN. Et quoniam eſt, vt AG ad AC, ita EB ad BS: & ita MO ad ON. erit vt EB ad BS, ita MO ad ON. & conuertendo vt SB ad BE, ita NO ad OM. & componendo vt SE ad EB, ita erit NM ad MO. ſed SE maior eſt, quàm NM, vt demonſtrauimus, lem. 17 lem. 19

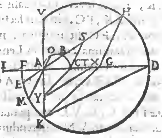
B ergo & EB maior erit, quam MO. Atque eadem ratione oſtendemus omnes alias maiores eſſe ipſa MO. minima eſt igitur MO, quod eſt ſecundum.

Poſtremo ducatur per A alia recta LAP, ipſi MO propinquior, quam EB ſecans circumferentias Fk, ABC in punctis L, P, & ſint rectæ LP, EB ex eadem parte minimæ MO, & producatur LP donec ſecet circulum DEF completum in Q. & iungatur GQ, & ei parallela agatur CZ ſecans ipſam LQ in Z. Rectangula igitur LAZ, EAS* æqualia erunt, ac proinde proportionales AL, AE, AS, AZ. in prima quidem figura vbi AL, AE exiſtunt inter rectas AM, Ak ſic argumentor. ſed AL minor eſt quam AE, ergo & AS minor erit, quam AZ. Et Corol. lem. 17

C quoniam rectangulum EAS* æquale eſt quadrato AI, hoc eſt quadrato AM; proportionales erunt AE, AM, aS. ſed aE maior eſt quam aM, ergo & aM maior erit quam aS: atque adeo aS, minor erit quam aL; & multo minor quam aE, atque eſt minor quam aZ, vt demonſtrauimus; ergo ipſa aS minima erit quatuor proportionalium aL, aE, aS, aZ, &* conſequenter aE maxima. quare ES compoſita ex maxima & minima* maior erit, quam LZ compoſita ex reliquis, hoc eſt LZ minor, quàm ES. lem. 17 Theor. 1 huius 25 quinti

In ſecunda vero figura vbi aL, aE exiſtunt inter rectas aM, aF argumentor hoc modo. ſed aL

D maior eſt quam aE, ergo & aS maior erit quam aZ. Et quoniam rectangulum EaS* æquale eſt quadrato aI, hoc eſt quadrato aM, proportionales erunt aE, aM, aS. ſed aE minor eſt quam aM, ergo & aM minor erit quam aS. atque ideo aS maior erit quam aL, lem. 17



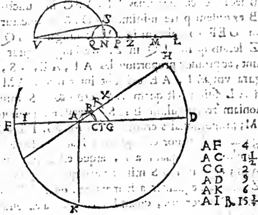
& multo maior quam aE. eſt quoque maior quam aZ, vt demonſtrauimus; ergo ipſa aS maxima erit quatuor proportionalium aZ, aE, aS, az, & conſe-

Th. 1 huius ſequenter * a E minima. quare E S compoſita ex maxima, & minima ma- A
ior erit, quàm L Z compoſita ex reliquis, hoc eſt L z minor quam E S. quod etiam demonſtrauimus & ſupra.

Lem. 17 Et quoniam in vtroque caſu eſt vt a G ad a C, ita E B ad B S, * & ita L P ad P z. erit vt L P ad P z, ita E B ad B S. & conuertendo vt Z P ad P L, ita S B ad B E. & componendo vt Z L ad L P, ita S E ad E B. ſed Z L oſtenſa eſt minor, quàm S E. ergo & L P minor erit, quàm E B. Propinquior igitur minimæ minor eſt remotiore ex eadem parte. quod tertio loco erat oſtendendum.

Compoſitio octaui Caſus.

SInt dati duo ſemicirculi A B C, D E F, quales in præſenti caſu ponuntur. B
data autém recta linea V Z. Oportet inter circumferentias A B C, D E F ponere rectam lineam æqualem V z, ita vt ad punctum A pertineat. Oportebit autem ipſam V z non eſſe maiorem maxima rectarum, quæ ad punctum A pertinent, & inter circumferentias a B C, D E F interijciuntur. neque minorem minima. quæ autem ſit maxima, quæue minima iam eſt demonſtratum. C

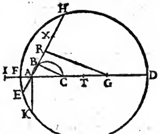


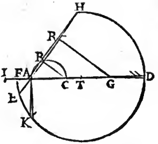
Ducatur a K ipſi F D perpendicularis ſecans ſemicirculum D E F in K; & ſi quidem data v z ſit æqualis maximæ. factum iam erit, quod proponitur. etenim maxima eſt ea, quæ maior eſt rectarum a K, F C. ſi vero ſit æqualis minimæ, minimaque ſit ea, quæ minor eſt ipſarum a K, F C. itidem factum erit quod proponitur; ſi vero neutra rectarum a k, F C ſit minima. inuenta minima Problemati ſatisfiet, D
inuentio autem minimæ conſtat ex Lemmate 31. Si autem V z minor ſit maxima, & maior minima. ſumatur ex centro circuli D E F, quod ſit T,

Probl. 1 huius recta T G æqualis T C, & * fiat vt A G ad A C, ita quadratum a K ad aliud quadratum, quod ſit a I. Similiter fiat vt A G ad a C, ita V z ad aliam, quæ ſit z L, & V L compoſita ex V z, z L ſecetur bifariam in N. cum igitur à quadrato V N auferendum ſit quadratum A I, vt Poriſma fieri præcipit: deſcribatur in V N ſemicirculus, in quo accomodetur V S æqualis A I. infra oſtendetur A I minor, quàm V N. Deinde connectatur S N. quadratum igitur V N ſuperat quadratum V S quadrato S N; angulus

enim

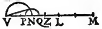
A	F		2
A	D		18
A	C		4
A	G		12
A	I	√	12

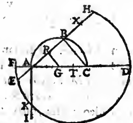


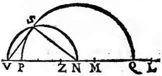


A	F		2
A	D		18
A	C		4
A	G		12
A	I	√	12









A enim V S N in ſemicirculo rectus eſt. itaque rectæ V N addenda eſt, vel auferenda recta æqualis N S. ſic Poriſma fieri iubet. addatur ergo, vel auferatur prout ſequentia Præcepta docebunt, eaque acuta vel diminuta ſit V P. ea non erit minor quam A F, nec maior quam A k, vt quatuor ſequentia Lemmata oſtendent. itaque poterit à puncto A ad circumferentiam k F duci recta A E æqualis V P; ducatur igitur A E; & producatur donec ſecet ſemicirculum A B C in B. Dico rectam E B Problema efficere.

Compleatur enim circulus F E, D H, quem E B producta ſecet in H. & centro N interuallo N S, vel M P deſcribatur circulus ſecans rectam V L in Q. is circulus tangit rectam V S in S; quare quadratum V S æquale erit rectangulo P V Q, vel V P L, ſeu, quod idem eſt rectangulo V P, B Z L, plus rectangulo V P Z: punctum enim Z exiſtit in recta P L, vt eadem quatuor ſequentia Lemmata oſtenderet. Si igitur fiat vt A G ad A C, ita vtraque æqualitatis pars ad alias partes itidem manebit inter eas partes æqualitas. At quoniam eſt, vt A G ad AC, ita quadratum A K ad quadratum A I, ex conſtructione erit conuertendo vt A C ad A G, ita quadratum A I, hoc eſt quadratum V S ad quadratum A K. quadratum igitur A k erit vna pars æqualitatis. alteram vero ſic inueniemus. Primo quoniam eſt vt A G ad A C, ita V Z ad Z L, ex conſtructione. erit conuertendo vt A C ad A G, ita L Z ad z O; vt autem L z ad z O, ita eſt rectangulum V P, L z ad rectangulum P V z: eamdem enim habent altitudinem V P. ergo vt A C ad A G, ita erit rectangulum V P, L z ad rectangulum P V z.

Fiat

Fiat vt A C ad A G, hoc eſt vt L z ad z V, ita P z ad aliam, quæ ſit z M A
vt autem P z ad z M, ita eſt rectangulum V P z ad rectangulum V P, z M: ſunt enim eiuſdem altitudinis V P. ergo vt A C ad A G, ita erit rectangulum V P z ad rectangulum V P, z M. Et quoniam eſt vt A G ad A C, ita V z ad z L, ex conſtructione; erit conuertendo vt A C ad A G, ita L z ad z V. ſed vt L z ad z V, ita eſt rectangulum v P, L z ad rectangulum P V z; eandem enim habent altitudinem V P. ergo vt A C ad A G, ita erit rectangulum V P, L z ad rectangulum P V z. ſed vt A C ad A G, ita oſtenſum eſt rectangulum V P z ad rectangulum v P, z M: ergo, vt rectangulum v P, L z ad rectangulum P v z, ita erit rectangulum v P z ad rectangulum V P,
12 quint. Z M. ſed vt vna antecedentium ad vnam conſequentium, ita * ſunt omnes antecedentes ad omnes conſequentes. ergo, vt rectangulum V P, L z ad B
rectangulum P v z, hoc eſt vt A C ad A G, ita erunt rectangula v P, L z, v P z, ad rectangula P v z, v P, z M. atque adeo rectangula P v z, v P, z M, erunt altera pars æqualitatis.

Itaque quadratum A K, hoc eſt rectangulum A k, hoc eſt rectangulum E A H, æquale erit rectangulis p v z, v p, z M, hoc eſt rectangulo P v M. ſed P v æqualis eſt A E, ex conſtructione; ergo & v M æqualis erit A H. connectatur autem B C, cui parallela agatur G R ſecans E a in R. angulus igitur A R G æqualis eſt angulo a B C, & ideo rectus, quia & ipſe
lem. 6. a B C in ſemicirculo rectus eſt, vnde * æquales ſunt E B, H R. ſumatur autem B x æqualis a R; tota E x æqualis erit toti a H, hoc eſt ipſi v M; ſed E A æqualis eſt V P ex conſtructione: ergo & reliqua a x æqualis erit reliquæ P M. C

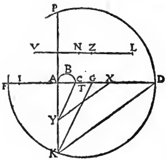
Et quoniam ſimilia ſunt triangula a B C, a R G; erit vt a C ad a G, ita a B ad a R. ſed vt a C ad a G, ita eſt quoque p z ad z M, ex conſtructione; ergo vt a B ad a R, hoc eſt ad B X, ita erit p z ad z M. & componendo vt a x ad x B, ita p M ad M z. ſed a x oſtenſa eſt æqualis p M. ergo & x B æqualis erit M z. ſed tota E X oſtenſa eſt æqualis toti V M, ergo & reliqua E B reliquæ V z æqualis erit. Poſita eſt igitur inter circumferentias a B C, K F recta E B æqualis datæ V z, eaque ad punctum a pertinet. quod faciendum erat.

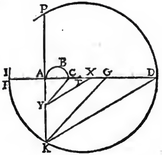
At vero rectam a I minorem eſſe, quàm V N, ſic demonſtrabimus.

Primum habeat a D ad a F non maiorem rationem, quam a G ad a C. D
lem. 16. lem. 27 ergo a I non * erit maior quam a F. atque F C minima erit interceptarum inter circumferentias a B C, K F. connectantur autem G K, K D, eiſque parallelæ agantur C Y, Y x ſecantes a k, a D in punctis Y x. Rectangu-
lem. 17 lum igitur F a X * æquale erit quadrato a I. quare proportionales erunt F a, a I, a x. vnde F x compoſita ex extremis non erit minor, quàm a I dupla.
lem. 19 Et quoniam eſt vt a G ad a C, ita F C ad C X, & ita V z ad z L ex conſtructione; erit vt F C ad C X, ita V z ad z L & permutando vt F C ad
19 quinti V z, ita erit C X ad z L & * ita quoque F X ad V L, omnes videlicet antecedenti-

 ceden-

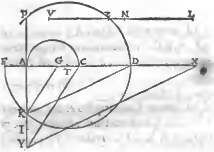
A





B cedentes ad omnes conſequentes. ſed F C, cum ſit omnium interceptarum minima, minor eſt quam V z; ponitur enim V z maior minima; ergo & F x minor erit quam V L ſed F x oſtenſa eſt non minor, quam dupla a I. ergo & a I dupla minor erit, quam ipſa V z. & conſequenter a I ſimpla minor, quam V N dimidia videlicet ipſius V L.

Sed habeat a D ad a F maiorem rationem, quàm a G ad a C. Aut igitur, ſemicirculus a B C extenditur vltra centrum circuli D E F, quod ſit, T, aut non extenditur. primum extendatur, & producatur



C k a donec ſecet circulum F E D completum in P. & connectatur G k, cui parallela agitur C Y ſecans a k in Y. rectangulum igitur y a k *æquale erit quadrato a I. vnde proportionales erunt y a, a I, a k. quare compoſita ex extremis y A, A K, hoc eſt recta y P. non erit minor quam A I dupla. lem. 19

Et quoniam eſt vt A G ad A C* ita A K ad A y, & ita V z ad Z L, ex conſtructione; erit vt A k hoc eſt A P ad A y, ita V z ad z L. & permutando vt A P ad V Z, ita erit A y ad z L. & * ita quoque P y ad V L; omnes videli- lem. 17 12 quinti

D cet antecedentes ad omnes conſequentes. ſed A P, cui æqualis eſt* A K minima interceptarum, minor eſt quam V z; ponitur enim V z maior minima. ergo & P y minor. erit quam V L; ſed P y oſtenſa eſt non minor quam dupla a I. ergo & a I dupla minor erit, quam V L, & conſequenter a I ſimpla minor, quam V N dimidia videlicet ipſius V L. lem. 18

Sed non extendatur ſemicirculus a B C vltra centrum T ergo a G maior erit, quàm a C, & per conſequens a k maior quam a I; eſt enim vt a G ad a C, ita quadratum a k ad quadratum a I ex conſtructione. cum itaque a I minor ſit, quàm a K; maior autem, quam a F. poterit a puncto a ad circumferentiam F K duci recta a M æqualis a I. ducatur igitur a M, eaque pro-

Producatur ex parte A donec ſecet ſemicirculum A B C in O; circulum vero A
F E D completum in H. & iungatur G H, cui parallela agatur C R, ſecans
1.m.17 rectam A H in R. rectangulum igitur M A R * æquale erit quadrato A I,
hoc eſt quadrato A M. quare æquales erunt A R, A M.

ibid. Et quoniam eſt vt A G ad A C * ita M O ad O R, & ita V Z ad Z L, ex
conſtructione; erit vt M O ad O R, ita V Z ad Z L. & permutando vt M O
In quinti ad V Z, ita O R ad Z L. & ita * M R ad V L; omnes videlicet anteceden-
le n. 18 tes ad omnes conſequentes. ſed M O, cum ſit omnium interceptarum * minima, minor eſt quam V Z: ponitur enim V Z maior minima; ergo & M R minor erit quam V L. & conſequenter A M, vel A I minor quam V N, dimidia videlicet minor, quam dimidia. quod erat oſtendendum.

Quo autem caſu rectæ V N addenda ſit recta æqualis N S, quoue auferenda ratio his conſtat præceptis. B

Præceptum primum.

SI ratio A D ad A F non ſit maior ratione A G ad A C, rectæ V N addenda eſt recta æqualis N S.

Præceptum ſecundum.

SI vero ratio A D ad A F maior ſit ratione A G ad A C, & ſemicirculus A B C, vel extendatur vltra centrum circuli D E F, vel ipſum centrum attingat; rectæ V N auferenda eſt recta æqualis N S.

Præceptum tertium. C

SI autem ſemicirculus A B C non extendatur vltra centrum circuli D E F, nec ipſum centrum attingat, nec præterea V Z data maior ſit minore rectarum A K, F C rectæ V N poterit ſiue addi, ſiue auferri recta æqualis N S, in hoc enim caſu recta datæ V Z æqualis poterit aptari inter circumferentias F K, A B C, ex vtraque parte minimæ. & ideo duobus modis Problema abſolui, nam ſi auferatur, aptabitur ea recta è regione F C. ſi vero addatur aptabitur è regione A K.

Præceptum quartum.

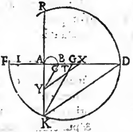
SI vero V z data maior ſit minore rectarum A k, F C, recta ipſi V Z æqualis poterit aptari inter circumferentias F k, A B C ex vna tantum parte minimæ, nempe, è regione maioris rectarum A K, F C. Itaque exiſtente A K maiore, quam F C, rectæ V N addenda eſt recta æqualis N S; exiſtente minore, auferenda. D

Nunc oſtendendum eſt rectam V P ſumptam prout præcepta docent non eſſe minorem, quam A F, nec maiorem quam A k. atque punctum Z exiſtere in recta P L, quocirca quatuor Lemmata proponuntur.

Lem-

Lemma XXIX.

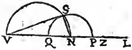
A Sit ratio A D ad A F non maior ratione A G ad A C. Dico V P cópoſitam ex V N, NS, maiorem eſſe, quam A F, minorem quam AK. atque punctum z exiſtere in recta PL.



FA 4
AC 1 ½ Lem. 17
CG 2
AD 9
AK 6
AI √ſ 3

COnnectantur enim GK, kD, quibus parallelæ agantur C y, y x. ſecantes A k, A D in punctis Y x; erit igitur * vt A G ad A C, ita F C ad C X. ſed ita eſt quoque V z ad z L, ex cóſtructione: ergo vt v z ad z L, ita erit F C ad C x. Et permutando vt V z ad F C, ita z L ad C x. & ita

B quoq; v L ad Fx; * eſt enim vt vna antecedentium ad vnam conſequentium, ita oés antecedentes ad omnes cóſequentes. ſed v z ponitur maior, quàm FC cum ipſa FC * minima ſit omnium, quæ inter circumferentias Fk, A B C interijciuntur, ergo & V L maior erit quam F X. 12 quinti lem. 27



Et quouiam æquales ſunt V N, NL ex conſtructione, & æquales quoq; NQ NP, vt ſemidiametri. ergo fiunt quoque æquales V Q, L P. quare rectangulum P V Q æquale erit rectangulo V P L, ſed rectangulum PVQ * æquale eſt quadrato V S, hoc eſt quadrato A I, ſeu * rectangulo F A x. ergo rectangulum v P L æquale erit rectangulo F A x. quare proportionales erunt v P, F A, AX, PL. ſed 36 tertij lem. 27.

C v L compoſita ex extremis oſtenſa eſt maior quam F x compoſita ex medijs, ergo altera extremarum v P, P L * maxima erit, altera minima. ſed v P maior eſt, quam P L. ergo ipſa v P maxima erit, atque adeo maior quam A F. quod eſt primum. Th. 2 huius

Deinde compleatur circulus F E, D R, quem K A producta ſecet in R. Quoniam igitur eſt vt A G ad A C, * ita A k ad a y. & ita quoque v z ad z L, ex conſtructione, erit vt v z ad z L, ita A k hoc eſt a R ad a Y, & permutádo vt v z ad A R, ita z L ad A y. & conſequenter ita v L ad R y. omnes videlicet antecedentes ad omnes conſequentes. ſed v z minor eſt, quam AR vel Ak, quæ eſt maxima omnium interceptarum inter circumferentias F k, ABC; ponitur enim v z minor maxima, ergo & v L minor erit quàm R y. lem. 17

D Et quoniam rectangulum P v Q, vel v P L * æquale eſt quadrato v S, hoc eſt quadrato A I, cui quoque * æquale eſt rectangulum y A K, hoc eſt y A R; æqualia erunt rectangula v P L, y A R; & ideo proportionales vP, yA, AR, PL. ſed v L compoſita ex extremis oſtenſa eſt minor, quam R y compoſita ex medijs. ergo altera mediarum y a, a R maxima erit, altera minima: ſed a R, maior eſt quam a y; ergo ipſa a R maxima erit, & per conſequens v P minor quã a R. hoc eſt quam a K. quod eſt ſecundum. 36 tertii lem. 17

Rurſus quoniam eſt, vt a G ad a C, ita quadratum a K ad quadratũ a I, & ita v z ad z L, vtrumq; ex conſtructione, erit vt v z ad z L, ita quadratum a k ad quadratũ A I, hoc eſt ad quadratũ v S, ſeu ad * rectangulũ P v Q, vel v P L. 36 tertii

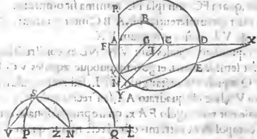
Y ſed

ſed vt V Z ad Z L, ita eſt quoq; quadratũ V Z ad rectãgulũ V z L; eandẽ enim A
habent altitudinẽ V z, ergo vt quadratum V z ad rectangulũ v z L, ita erit quadratũ A K ad rectangulũ V P L; ſed quadratum V z minus eſt quadrato A K;
lem. 17 ponitur enim recta V z minor, quàm A k, quæ* eſt maxima interceptarũ. ergo
lem. 18 & rectangulum V Z L minus erit rectãgulo v P L. quare punctum P* propinquius erit ipſi N, quàm punctum Z. atq; eſt vtrũque in medietate N L. ergo punctum Z erit in recta P L, quod eſt tertium, quare conſtat propoſitum.

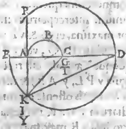
Lemma X X X.

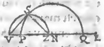
Sit ratio A D ad A F maior ratione A G ad A C, & ſemicirculus A B C, vel extendatur vltra centrum circuli D E F, vel ſaltem ipſum centrum attingat. Dico V P differentiam rectarum V N, N S maiorem eſſe, quam A F, minorem quam A k. & punctum z exiſtere in recta P L. B

COnnectãtur enim G K, k D, quibus parallelæ agantur C y, y x ſecãtes A k, A D productas in punctis y x. erit
lem. 17 igitur vt a G ad a C* ita F c ad c x; ſed ita eſt quoque V z ad z L, ex conſtructione. ergo vt v z ad z L, ita erit F c ad c x. C
& permutãdo vt v z ad
12. quinti F C, ita z L ad C x.* & ita quoq; v L ad F x; oẽs videlicet antecedẽtes ad oẽs cõſe-
lem. 18 quẽtes; ſed v z ponitur minor, quã F C, cum ſit ipſa F C* maxima omnium, quæ inter circũferentias F K, A B C interijciuntur. ergo & v L minor erit, quã F x.



Et quoniã æquales ſunt V N, N L, & æquales quoq; N P, N Q, ergo fiunt quoque æquales V P, L Q; quare rectangulũ P v Q æquale erit rectangulo v P L; ſed
36. tertii rectãgulũ P v Q* æquale eſt quadrato v s, hoc eſt quadrato a I; cui quoq; æquale eſt rectãgulũ F a x. ergo rectangulum v P L æquale erit rectangulo F a x. quare proportionales erũt v P, F a, a x, P L. ſed V L compoſita ex extremis oſtenſa eſt minor, quam F x com-
Th. 1 huius poſita ex medijs. ergo* altera mediarũ F a, a x maxima erit, altera minima; itaq; a F, quippe quę minor eſt, quam a x, minima erit, & per conſequens v P maior erit quam ipſa a X. quod eſt primum.





D

Deinde compleatur circulus F E, D R, quem K a producta ſecet in R. Quo-
lem. 17 niam igitur eſt, vt a G ad a C,* ita a k ad a y, & ita quoque v z ad z L ex conſtru-

A ſtructione : erit vt v z ad z L; ita a k; vel a R ad a Y; & permutando vt v z ad a R, ita z L ad a y; & * ita quoque v L ad R y; omnes videlicet antecedentes ad omnes conſequentes. ſed v z maior eſt quam a R, ponitur enim v z maior, quam a k, quæ eſt * minima interceptarum inter circumferentias f k, a B C. ergo & v L maior erit, quàm R y. xii. quinti lem. 18

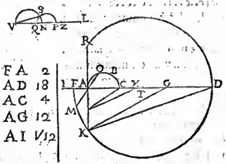
Et quoniam rectangulum P V Q, vel V P L * æquale eſt quadrato V S, vel quadrato A I, cui quoque * æquale eſt rectangulum y A k, hoc eſt y A R; erũt æqualia rectãgula V P L, Y A R, & ideo proportionales V P, Y A, A R, P L. ſed V L compoſita ex extremis oſtenſa eſt maior, quam R y, compoſita ex medijs. ergo * altera extremarum V P, P L, maxima erit, altera minima. ſed V P minor eſt quam P L; ergo ipſa V P minima erit, & per conſequens minor, quã B A R, hoc eſt quam A K; quod eſt ſecundum. 16 tertij lem. 19 Th. 2 huius

Poſtremo cum ſit V P minor quam A K, & A K minor quam V Z, vt demonſtrauimus: erit V P multo minor, quam V Z, itaque punctum Z erit in recta P L, quod vltimo loco erat oſtendendum.

Lemma XXXI.

Rurſus ſit ratio A D ad A F maior ratione A G ad A C. ſed ſemicirculus A B non extendatur vltra centrum circuli D E F, nec ipſum centrum attingat, nec præterea data V Z ſit maior minore rectarum AK, FC. Dico rectam V P æqualem, ſiue aggregato, ſiue differentiæ rectarum V N, N S non eſſe maiorem, quam A K, nec minorem, quam A F, & punctum C Z exiſtere in recta P L.

Ompleatur enim circulus F E, D R, quem K A producta ſecet in R. & iungantur G k, k D. quibus parallelæ agantur C Y, Y X ſecantes A K, A D in punctis Y X, & ſit primum V P, æqualis compoſitæ ex VN, NS. Quoniam igitur eſt vt A G ad AC, * ita Ak ad Ay, & ita quoq; VZ ad ZL, ex cõſtructione. erit vt Vz ad zL, ita Ak, hoc eſt AR D ad Ay; & permutando vt Vz ad AR, ita zL ad Ay. & conſequenter, * ita VL ad R y omnes videlicet antecedentes ad omnes cõſequentes: ſed Vz non eſt maior, quàm AR; ponitur enim V z nõ maior minore rectarũ Ak, FC. ergo neq; V L maior erit, quam Ry. Et quoniam rectangulũ PVQ, vel VPL (ſunt enim æquales VQ, PL) * æquale eſt quadrato VS, hoc eſt quadrato A I, cui quoq; * æquale eſt rectãgulũ YAK; rectangulũ VPL æquale erit rectãgulo y a k, hoc eſt y A R; quare * proportionales erunt VP, y A, AR, PL. ſed vL compoſita ex extremis oſtẽſa eſt nõ maior, quã R y cõpoſita ex medijs. ergo ſi eſt minor erit * altera mediarũ y A, AR maxima, altera minima. ſed AR maior eſt, quàm A Y. Lem. 17 2 quinti 16 tertii lem. 17 16 ſexti Th. 2 huius



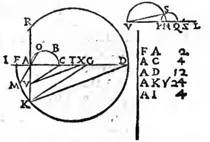
F A	2
A D	18
A C	4
A G	12
A I	$\sqrt{32}$

ergo ipſa AR, hoc eſt AK maxima erit, & per cōſequens V P minor quam A k. A
Theor. 11 huius Si vero V L cōpoſita ex extremis æqualis eſt y R cōpoſitæ ex medijs, maior extremarum maiori mediarum * æqualis erit, hoc eſt V P æqualis A R, vel A K.

Rurſus quoniam V P maior eſt, quàm V S, hoc eſt quam A I, ipſaque A I maior quam A F, erit V P multo maior ipſa A F. Recta igitur V P æqualis cōpoſitæ ex V N, N S, non eſt maior, quam a k, nec minor quàm a F.

Et quoniam eſt, vt a G ad a C, ita quadratum a K ad quadratum a I, & ita V z ad Z L; vtrumque ex conſtructione, erit vt v Z ad Z L, ita quadratum a K ad quadratum a I, vel ad quadratum V S, hoc eſt ad rectangulum P v Q,
1 ſexti vel v P L; ſed vt V z ad z L, * ita eſt quadratum V z ad rectangulum v z L: ſunt enim eiuſdem altitudinis V z; ergo vt quadratum v z ad rectangulum V z L; ita erit quadratum a K ad rectangulum v P L. ſed quadratum v z nō B
eſt maius quadrato a k, ponitur enim recta v z non maior minore rectarum a k, F C, ergo ſi eſt minus, erit & rectangulum v z L minus, rectangulo v P L. quare punctum P propinquius erit ipſi N, quam punctum z. atque eſt vtrumque in medietate N L, ergo punctum z erit in recta P L. Si vero quadratum v z æquale eſt quadrato a K, erit & rectangulum v z L æquale rectangulo v P L. quare punctum z idem erit, quod punctum P. itaque z erit in recta P L.

Sed ſit v P æqualis differentiæ rectarum v N, N S. Quoniam igitur eſt,
lem. 17 vt a G ad a C, * ita F C ad C X, & ita quoque v z ad z L, ex conſtructione; erit vt v z ad z L, ita F C ad C X. & permutando vt v z ad
ex quinti f C, ita erit Z L ad c X. &* ita quoque V L ad f X; omnes videlicet antecedentes ad omnes conſequentes; ſed v z non eſt maior, quam f C. ponitur enim v z non maior minore rectarum a k, f C, ergo neque
lem. 17 v L maior erit, quàm f x. Et cū re-



C

lem. xxvi ctangulum f a x, æquale ſit quadrato a I, & recta a I * maior, quàm a f, erit a x multo maior.

Rurſus quoniam rectangulum P v Q, hoc eſt v P L (ſunt enim æquales D
16 sexti v Q, P L) * æquale eſt quadrato v S, hoc eſt quadrato a I, cui quoque æqua-
lem. 17 le * eſt rectangulum f a X; ipſa rectangula v P L, f a X æqualia erunt, & ideo proportionales v P, f a, a X, P L. ſed v L compoſita ex extremis oſtenſa eſt non maior quam f X, compoſita ex medijs. ergo ſi eſt minor, erit
Th. ii. huius altera * mediarum f a, a X maxima erit; altera minima. ſed a X oſtenſa eſt maior quam a f; ergo ipſa f a minima erit. quare v P maior, quàm a f. Si vero v L compoſita ex extremis æqualis eſt f x compoſitæ ex me-
Th. 1. huius dijs, minor * extremarum v P, P L, nempe ipſa v P, minori mediarum, idelt ipſi a f, æqualis erit.

Item

A Item quoniam eſt, vt A G ad A C, maior nempe ad minorem, ita quadratum A K ad quadratum A I, ex conſtructione; quadratum A K maius erit quadrato A I. vnde & recta A k maior quam recta A I; hoc eſt quam recta V S. ſed V P minor eſt, quam V S. ergo multo minor erit, quàm A k. Recta igitur V P æqualis differentiæ rectarum V N, N S non eſt maior quàm A K, nec minor, quàm A F.

Denique quoniam eſt, vt A G ad A C, maior ad minorem, ita V Z ad Z L, ex conſtructione, erit & V Z maior, quàm Z L. itaque punctum Z erit in medietate N L, & conſequenter in recta P L. Recta igitur V P æqualis, ſiue compoſitæ ex V N, N S, ſiue differentiæ earundem non eſt maior, quam A K, nec minor, quàm A F. atque punctum Z exiſtit in recta P L; quod

B erat oſtendendum.

Scholium.

Manifeſtum eſt igitur ſi A D ad A F maiorem rationem habeat, quam A G ad A C, & ſemicirculus A B C non extendatur vltra centrum circuli D E F, nec ipſum attingat, nec præterea data V Z maior ſit minore rectarum A k, F C. Problema duobus modis poſſe abſolui. nam ſi à puncto A ad circumferentiam F K ducatur recta A M æqualis A I, & producatur donec ſecet ſemicirculum A B C in O, erit M O minima omnium, quæ inter circumferentias F K, A B C intercipiuntur. & ſumpta V P æquali compoſitæ ex V N, N S. ea maior erit quam V S, hoc eſt quam A M; non autem lem. 28

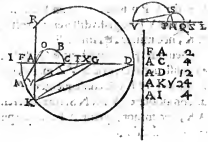
C quam A K, vt demonſtrauimus. itaque poterit à puncto A ad circumferentiam K M duci recta A E æqualis V P. Similiter ſumpta V P æquali differentiæ rectarum V N, N S. ea minor erit, quam V S, hoc eſt quam A M, non autem quam A F, vt eſt demonſtratum. poterit à puncto A ad circumferentiam M F duci recta A E æqualis V P. Itaque ſi ducatur A E æqualis compoſitæ ex V N, N S; aptabitur recta datæ V Z æqualis inter circumferentias K M, A O. Si vero ducatur A E æqualis differentiæ rectarum V N, N S, aptabitur ea recta inter circumferentias M F, O C: poterit itaque aptari ex vtraque parte minimæ, atque adeo Problema duobus modis abſolui, vt in tertio præcepto monuimus.

D

Lemma XXXII.

Rurſus ſit ratio A D ad A F maior ratione A G ad A C, & ſemicirculus a B C non extendatur vltra centrum circuli D E F, nec ipſum centrum attingat; ſed data V Z ſit maior minore rectarum a k, F C. & à puncto a ad circumferentiam k F ducatur a M æqualis a I: eſt enim a I maior, quam a F, minor autem, quàm a k. Dico ſi a k maior ſit, quàm F C compoſitam ex v N, N S, minorem eſſe, quàm a k, maiorem quam a M; ſin lem. 26 minor differentiam ipſarum v N, N S maiorem eſſe, quàm a F, minorem quam a M, atque punctum Z in vtroque Caſu exiſtere in recta P Z.

Connectantur enim G K, K D, quibus parallelæ agantur C y, y X ſecantes a k, a D in punctis y X. & compleatur circulus F E, D R, quem K a producta ſecet in R. & ſit primum V P æqualis compoſitæ ex V N, N S, & A k maior quam f C. ergo ipſa A K maxima erit omnium interceptarum inter circumferentiam f k, A B C; quare recta datæ V z æqualis poterit aptari inter circumferentias K M, a O; non etiam inter circumferentias M F, O C; cum ſit V z maior, quam A



B

corol lem. 31 F C, ex poſitione, ipſa vero F C * maxima omnium interceptarum inter circumferentias M F, O C.

lem. 59 Quoniam igitur eſt, vt A G ad A C, * ita a K ad a y. & ita V Z ad z L, ex conſtructione; erit vt V z ad z L, ita A K, hoc eſt A R ad a y; & permutando vt V z ad A R, ita erit z L ad A y. & ita * V L ad R y. omnes videlicet antecedentes ad omnes conſequentes. ſed V z minor eſt quam a R; ponitur enim V z minor maxima a K, cui æqualis eſt a R; ergo & V L minor erit quam R y.

36 tertij Et quoniam rectangulum P V Q * æquale eſt quadrato v S, vel quadrato A I, cui quoque * æquale eſt rectangulum y a K, hoc eſt y a R; ideo erunt C
lem. 17 æqualia rectangula v P L, y a R, & ideo * proportionales v P, y a, a R, P L.
16 ſexti ſed V L compoſita ex extremis oſtenſa eſt minor, quam R y compoſita ex me-
Th. 2. huius dijs. ergo altera * mediarum Y A, a R maxima erit; altera minima. itaque a R, quippe quæ maior eſt quam y a, maxima erit, & conſequenter v P minor quam ipſa a R, hoc eſt quam a K. Et cum ipſa V P maior ſit quam v S, ea quoque maior erit quam a M; ſunt enim æquales v S, a M; cum ſit vtraque æqualis recta a I, ex conſtructione.

Rurſus quoniam eſt vt a G ad a C, ita quadratum a K ad quadratum a I: & ita v Z ad z L: vtrumque ex conſtructione, erit vt v Z, ad z L, ita qua-
36 tertij dratum a K ad quadratum a I, hoc eſt ad quadratum v S, ſeu ad * rectan-
• ſexti gulum P v Q, vel v P L, ſed vt v z ad z L, ita eſt * quoque quadratum v z D
ad rectangulum v z L; eandem enim habent altitudinem v z. ergo vt quadratum v z ad rectangulum v z L, ita erit quadratum a k ad rectangulum v P L. ſed quadratum v z minus eſt quadrato a k; ponitur enim recta v z minor maxima, quæ eſt a k. ergo & rectangulum v z L, minus erit rectangulo v P L. quare punctum P propinquius erit ipſi N, quàm punctum z. atque ipſa puncta P, z ſunt in medietate N L. igitur punctum z erit in recta P L. exiſtente igitur a k maiori, quàm F C, recta v P æqualis compoſitæ ex v N, N S, minor eſt, quàm A k, maior quam a M; & punctum z exiſtit in recta P L; quod eſt primum.

A Deinde ſit V P æqualis differentiæ rectarum V N, N S, & A k minor, quàm F C. ergo F C * maxima erit omnium, quæ inter circumferentias F k, A B C intercipiuntur. quare recta datæ V Z æqualis poterit aptari inter circumferentias F M, O C, non autem inter circumferentias M k, A O; cum ponatur V Z maior, quàm A k, quæ eſt * maxima omnium interceptarum inter circumferentias k M, A O. Et quoniam eſt, vt A G ad A C * ita F C ad C x. & ita V Z ad Z L, ex conſtructione, erit vt V Z ad Z L, ita F C ad C x. & permutando vt V z ad F C, ita erit z L ad C x, & conſequenter * ita quoque V L ad F x, omnes videlicet antecedentes ad omnes conſequentes; ſed V z minor eſt, quam F C; ponitur enim V z minor maxima interceptarum inter circumferentias F k, A B C. ergo & V L minor erit
B quam F x.

lem. 13 · coroll. lem. 18 · lem. 17 · 12 quinti

Et quoniam rectangulum f a x * æquale eſt quadrato a I, & recta a I maior quàm a f erit a x multo maior. lem. 17

Et quoniam rectangulum P V Q, vel V P L æquale eſt quadrato. V S; hoc eſt quadrato A I, cui quoque æquale eſt rectangulum f a x; rectangulum V P L, f a x æqualia erunt; & ideo proportionales V P, F A, A x. P L. ſed V L compoſita ex extremis oſtenſa eſt minor, quam f x compoſita ex medijs. ergo altera mediarum f A, A x * maxima erit, altera minima. ſed a x oſtenſa eſt maior quàm a f, ergo ipſa a f minima erit, atque adeo V P maior, quam a f. Ipſam autem V P minorem eſſe, quam a f manifeſtum eſt. nam cum ſit V P minor quam V S; ea quoque minor erit, quam a M;
C ſunt enim æqualis V S, a M; cum ſit vtraque æqualis ipſi a I, ex conſtructione. Æque manifeſtum eſt punctum z exiſtere in recta P L. nam cum ſit vt a G ad a C, maior nempe ad minorem, ita V z ad z L ex conſtructione, erit & V z maior quàm z L. quare punctum z erit in medietate N L, & conſequenter in recta P L, exiſtente igitur a K minore, quam f C; recta V P æqualis differentiæ rectarum V N, N S, maior eſt, quam a f, minor quam a M. & punctum z exiſtit in recta P L, quod ſecundo loco erat oſtendendum.

lem. 16 · Theor. 13 huius

Quamuis in tertio & quarto, ac etiam ſeptimo Caſu ſatis dictum ſit de dignoſcendo termino quæſitam a E indicante è duobus de quibus Æquatio explicabilis eſt; tamen in hoc quoque Caſu, cum reſolutio incidat in Æqua-
D tionem, de duplici termino explicabilem, non alienum videtur exempla ad huiuſmodi cognitionem pertinentia ſubijcere.

Propoſitio prima.

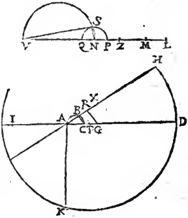
Terminum indicantem quæſitam a E in ſemicirculis ad primum præceptum pertinentibus dignoſcere.

Sit ratio a D ad a f non maior ratione a G ad a C. & oporteat iuſſum facere. Reſumatur conſtructionis figura ad huiuſmodi Caſum pertinens. termini de quibus Æquatio explicabilis eſt ſunt, V P maior, V Q

S3 mi-

minor, quorum V Q minor eſt, quam V S, hoc eſt quam a I, & conſequenter multo minor, quam a E de qua quæritur, cum ſit a I non maior quam A E terminus igitur V Q non indicat ipſam A E; per conſequens eam indicat V P, aggregatum rectarum V N, N S. Itaque exiſtente ratione A D ad A F non maiori ratione A G ad A C, agnitus eſt terminus quæſitam A E indicans, vt faciendum erat. Hinc præceptum primum conſtitutum eſt;

A



A F	4
A C	$1\frac{1}{2}$
C G	2
A D	9
A K	6
A I	℞. $15\frac{3}{4}$

B

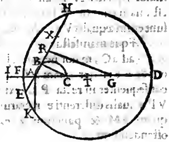
Propoſitio Secunda.

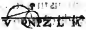
Terminum indicantem quæſitam A E in ſemicirculis ad ſecundum præceptum pertinentibus dignoſcere.

A	F		2
A	D		18
A	C		4
A	G		12
A	I	√	12

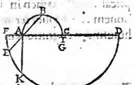
Sit ratio A D ad A F maior ratione A G ad A C, & ſemicirculus A B C, vel extendatur vltra centrum circuli D E F, vel ſaltem ipſum centrum attingat. Oportet terminum indicantem quæſitam A E dignoſcere. Reſumatur conſtructionis figura ad hunc Caſum pertinens. Termini de quibus æquatio explicabilis eſt ſunt, V P minor, V Q maior quorum V Q maior eſt quam V S, hoc eſt quam A I, & conſequenter multo maior quam A E quæſita, eſt enim A I non minor quam Ak. Nam cum ſit vt A G ad A C, ita quadratum A k ad quadratum A I, ex conſtructione, & A G in hac ſemicirculorum poſitione non maior, quam A C. ergo neque quadratum A K maius erit quadrato A I, quare nec recta A k maior quam recta A I. hoc eſt nec A I minor quam Ak.

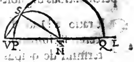
C





D



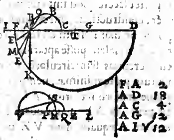


Terminus igitur V Q non indicat ipſam A E.

A ergo eam indicat V P differentia rectarum V N, N S. Agnitus eſt igitur terminus quæſitam A E indicans vt faciendum erat. Hinc præceptum ſecundum conſtitutum eſt.

Propoſitio tertia.

Terminum indicantem quæſitam A E in ſemicirculis ad tertium præceptum pertinentibus dignoſcere.



RVrſus ſit ratio A D ad A F maior ratione A G ad A C; ſed ſemicirculus A B C. non extendatur vltra cen-
B trum circuli D E F, nec ipſum centrum attingat, nec præterea data V Z ſit maior minore rectarum A K, F C. Oportet terminum indicantem quæſitam A E dignoſcere. Reſumatur cõſtructionis figura ad hunc Caſum pertinens. Quoniam igitur eſt vt A G ad A C, ita quadratum A k ad quadratum A I, ex conſtructione, & A G maior quam A C, erit & quadratum A k maius quadrato A I Vnde & recta A k maior, quam recta A I, ſeu quod idem eſt A I minor quam A k; ſed ipſa A I* maior eſt, quàm A F. ergo poterit à puncto A ad circumferentiam lem. 26
C F K duci recta a M æqualis a I; ducatur igitur a M, & producatur donec ſecet circulum a B C in O. Aut igitur a E quæſita terminatur in circumferentia F M aut in circumferentia M k; poteſt enim terminari in vtraque, nam recta datæ V Z æqualis poteſt aptari inter circumferentias ſemicirculorum ex vtraque parte minimæ, quæ * eſt M O; cum ipſa V Z ponatur non lem. 28
maior minore rectarum a k, F C. Si igitur a E terminatur in circumferentia F M. ea minor eſt, quam a M hoc eſt quam a I, ſeu quam V S, & multo minor quam V Q aggregatum rectarum V N, N S. quod eſt vnus è duobus terminis, de quibus Æquatio explicabilis eſt. alter vero terminus eſt V P differentia rectarum V N, N S. Terminus igitur V Q non indicat quæſitam a E, ergo eam indicat V P.

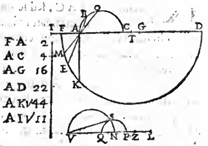
D Si vero ipſa a E terminatur in circumferentia M K. ea maior eſt, quam a M, hoc eſt quam a I, ſeu quam V S. & multo maior quam V P. recta igitur V P non indicat a E quæſitam, ergo eam indicat V Q. Cum igitur ratio a D ad a F maior eſt ratione a G ad a C, & ſemicirculus a B C non extenditur vltra centrum circuli D E F, nec ipſum centrum attingit, nec præterea data V Z maior eſt minore rectarum a K, F C, indicat quæſitam a E tum differentia tum aggregatum rectarum V N, N S; differentia quidem cum a E definit in circumferentia F M, aggregatum vero cum deſinit in circumferentia M k. Agnitus eſt igitur terminus quæſitam a E indicans, vt faciendum erat. Hinc præceptum tertium conſtitutum eſt.

Pro-

Propoſitio quarta. A

Terminum indicantem quæſitam A E in ſemicirculis ad præceptum quartum pertinentibus dignoſcere.

RVrſus ſit ratio a D, ad a F maior ratione a G ad a C, & ſemicirculus a B C non extendatur vltra centrum circuli D E F, nec ipſum centrum attingat; ſed data V Z ſit maior minore rectarum a k, F C. Oportet facere quod imperatum eſt.



Facta conſtructione, antecedenti propoſitione, manifeſtum eſt rectam datæ V Z æqualem poſſe aptari inter circumferentias ſemicirculorũ ex vna tantum parte minimæ, nempe è regione maioris rectarum A k, F C. ſit primum A k maior quam F C. ergo recta æqualis datæ V Z poteſt aptari inter circumferentias k M. A O, non etiam inter circumferentias M F, O C, cum ſit V Z maior, B quam F C vt ponitur. ipſaque F C* maxima omnium, quæ inter circumferentias M F, O C interijciuntur. ergo A E quæſita deſinit in circumferentia K M. vnde maior eſt quam A M, hoc eſt quam A I, ſeu quam V S. & C multo maior quam V Q differentia rectarum V N, N S. terminus igitur V Q non indicat quæſitam A E. ergo eam indicat terminus V P, aggregatum videlicet rectarum V N, N S.

*corol. lem. 3.

Sed ſit F C maior, quam A k ergo recta æqualis datæ V Z poteſt aptari inter circumferentias M f, O C, non etiam inter circumferentias k M, A O, atque A E quæſita deſinit in circumferentias M F. & ideo minor eſt quam A M, hoc eſt quam A I, ſeu quam V S, & conſequenter multo minor quam V P, aggregatum rectarum V N, N S. terminus igitur V P non indicat quæſitam A E, ergo V Q differentia ipſarum V N, N S eam indicat. Itaque cum ratio A D ad A F maior eſt ratione A G ad A C, & ſemicirculus A B C nec extenditur vltra centrum circuli D E F, nec ipſum centrum attingit, ſed data V Z maior eſt minore rectarum A k, F C. exiſtente D A K maiore, quam F C, aggregatum rectarum V N, N S indicat A E quæſitam; exiſtente vero F C maiore, quam A K differentia. Agnitus eſt igitur terminus quæſitam A E indicans, vt faciendum erat. Atque hinc præceptum quartum conſtitutum eſt.

Magna eſt inter grauiſsimos omnium ætatum viros de circuitu terræ diſcrepantia. Ariſtoteles in ſecundo libro de cælo aſſerit ex Mathematicorum illius temporis authoritate terræ circuitum eſſe ſtadiorum 400000. hoc eſt milliariorum 50000. Archimedes vero in libro de arenæ numero videtur

A tur aſſenſiſſe ijs, qui opinabantur ipſum circuitum eſſe ſtadiorum 300000. ſiue milliariorum 37500. At Hypparcus referente Plinio lib. 2. cap. 108. tribuit circuitui terræ ſtadia 277000, quæ ſint milliaria 34625. Eratholtenes vero ſtadia 252000. vel milliaria 315000. Dionyſiodorus autem nobilis Geometra ſcribens ex centro terræ ad ſuperos, vt Plinius refert eodem libro cap. vltimo affirmat ſe à ſepulchro ad infimam terram perueniſſe, eſſeque id ſpatium, hoc eſt ſemidiametrum terræ ſtadiorum 42000. hoc eſt milliariorum 5250. ex quo ſecundum Archimedis computationem fit circuitus eius milliariorum 33000. At Ptolæmeus, quem recentiores ſequuntur affirmat circuitum terræ continere ſtadia 180000. ſiue milliaria 22500. Alphraganus, ac Tebitius tribuunt circuitui terræ ſtadia 563200, ſiue millia-
B ria 20400.

Hæc tanta opinionum diuerſitas me impulit vt cogitarem quomodo circuitus terræ inueniri poſsit, & quidem duos inueni modos, quibus id aſſequi poterimus, eoſque Geometrica ratione demonſtrabo; quorum alter ita ſe habet.

Sumantur in crepidine lacus, ſilentibus ventis, duo loca diſtantia inter ſe ſpatio minimum trium milliariorum, in quorum altero erigatur ad perpendiculum ſupra aquam lamina habens foramen in latitudinem ductum, à tergo autem laminæ iuxta ipſum foramen ponatur lumen, & ſit interuallum inter ſumitatem foraminis, & ſuperficiem aquæ, vtpote vnius pedis; in altero autem loco ſit menſor attollens ſeſe; vel deprimens donec viſu perueniat ad
C lumen per lineam tangentem ſuperficiem aquæ, ita vt ſi oculus, vel modicum deprimeretur, lumen illud ob rotunditatem aquæ, quæ tunc inter oculum, & lumen interponeretur videri non poſſet; ſuperficies enim aquæ conſiſtentis, atque manentis ſphærica eſt, cuius ſferæ centrum idem eſt quod centrum terræ, vt demonſtrauit Archimedes. & notetur diligenter interuallum, quod eſt inter oculum menſoris, & ſuperficiem aquæ, quemadmodum notatum eſt interuallum inter ſumitatem foraminis laminæ, & ſuperficiem aquæ; datis enim his duobus interuallis, & diſtantia duorũ locorũ in crepidine lacus ſumptorum; dabitur diameter terræ, vt poſtea demonſtrabimus, & conſequenter per calculum Archimedæum, dabitur & circuitus eius. Dixi huiuſmodi operationem debere fieri in aliquo lacu, non autem in mari; nam propter
D fluxum, & refluxum maris fallax euaderet operatio. cum ad hoc negotium requiratur aqua conſiſtens, & manens, quapropter fieri hæc debere dixi ſilentibus etiam ventis, ne ſuperficies aquæ turbaretur; Quin etiam magis opportunus eſſet riuus, vel canalis in aliqua planitie in directum extenſus qualis in Germania inferiori, & præcipuè in Battauia vidi, cum in ijs tranquilla omnino, & immobilis maneat aqua. Alter autem modus inueniendi circuitum terræ, & quidem facilior atque exactior priore ita ſe habet.

E ligantur duo montes, ex quibus maris proſpectus pateat, ita vt ab aliquo loco altioris montis per apicem montis depreſsioris viſus noſter extendi poſsit vſque ad circulum orizontalem, mariſque contactum; deinde exquiratur

de-

depreſsionis montis altitudo, nempe perpendiculum ab eius vertice vſque ad A
ſuperficiem maris.

Similiter exquiratur altitudo loci, à quo per apicem montis ad orizontem viſus extenditur, hoc eſt perpendiculum ab eo loco vſque ad maris ſuperficiem; denique inueniatur diſtantia, quæ eſt inter dictum locum, & dictum apicem montis; quibus diligenter peractis, dabitur diameter terræ, vt perſpicuum fiet, atque adeo & circuitus. Vnico igitur Problemate duos Caſus habente omnia quæ dixi pręſtabo.

Lemma ad id quod ſequitur.

Si recta linea per centrum circuli ducta alteram rectam in circulo biſariam non ad rectos angulos ſecuerit centrum circuli in earum ſectione erit. B

RECta linea a B per centrum circuli ducta ſecet alteram rectam C D biſariam non autem ad rectos angulos in E. Dico punctum E eſſe centrum circuli. Ducatur enim per punctum E recta linea F E G ipſi C D ad rectos angulos, ergo cum ſint æquales C E, E D centrum* circuli erit in recta F G, ſed idem centrum eſt quoque in recta a E B, ergo centrum illud erit in puncto E, quod erat oſtendendum.

*Corol. prop. 1 tertij

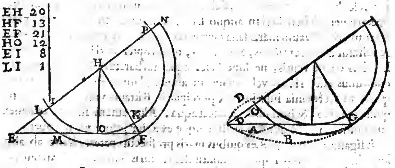
Problema III.

DAta baſe trianguli, & exceſsibus, quibus crura ſuperant eius altitudinem, inuenire triangulum.

Hoc Problema duos Caſus habet, vel enim altitudo trianguli, hoc eſt perpendicularis è vertice demiſſa intra triangulum cadit, vel extra. Primo Caſu oportebit compoſitam ex exceſsibus minorem eſſe baſe, ſecundo vero differentiam exceſsuum minorem eſse baſe. C

Reſolutio primi Caſus.

SIt data baſis trianguli B, exceſsus vero, quo crus maius ſuperat altitudinem D, exceſſus autem quo crus minus eandem altitudinem ſuperat G. Oportet inuenire triangulum.



D

Factum iam ſit, & ſit illud triangulum H E F, in cuius baſim cadat perpen-

pen-

A pendicularis H O, & centro H interuallo H O deſcribatur circulus I O P ſecans crura dicta, H f in punctis I K. productum vero crus maius e H in P. erunt igitur I c, K f exceſſus, quibus crura H e, H f ſuperant perpendicularem H O. Quoniam igitur dantur baſis E F, exceſſus maior I E exceſſus minor K F, ſit baſis B exceſſus vero maior D, exceſſus autem minor G, vt in figura reſolutionis deſignatum eſt. Rurſus centro H, interuallo autem H F alius circulus deſcribatur, ſecans baſim E F in M, crus vero E H in L. ipſumque productum in N, differentia igitur ſegmentorum E O, O F erit E M cum ſint * æquales M O, O F, differentia autem crurum H E, H F erit E L, ea ipſa quæ eſt exceſſuum I E. k F; eaque in figura reſolutionis erit D — G. Quæratur E M differentia ſegmentorum E O, O F. ea eſtò A. ergo B + A 16 tertij

B erit duplum ſegmentum E O. vnde ſimplum erit B $\frac{1}{2}$ + A $\frac{1}{2}$. co. 1 prob. 1 lib. primi

Et quoniam rectangulum L E N * æquale eſt rectangulo M E F, erit vt L e ad E M, ita E f ad E N hoc eſt in figura ad reſolutionem pertinente erit vt D — G ad A, ita B ad $\frac{b \text{ in } a}{d\text{-}g}$. itaque $\frac{b \text{ in } a}{d\text{-}g}$ erit ipſa E N, à qua ſi auferatur P N hoc eſt G; reliqua E P erit $\frac{b \text{ in } a}{d\text{-}g}$ — G. 36 tertij

Et quoniam rectangulum I E P * æquale eſt quadrato E O, hoc eſt rectangulum ſub D, & $\frac{b \text{ in } a}{d\text{-}g}$ — G æquale quadrato ex B $\frac{1}{2}$ + A $\frac{1}{2}$. ibid.

$\frac{d \text{ in } b \text{ in } a}{d\text{-}g}$ — B in G æquabitur B Q $\frac{1}{4}$ + A Q $\frac{1}{4}$ + B in A $\frac{1}{2}$.

Quadruplicentur omnia, vt Poteſtas æquationis integra fiat, ergo

$\frac{d \text{ in } b \text{ in } a\,4}{d\text{-}g}$ — D in G 4 æquabitur B Q + A Q + B in A 2.

Auferantur vtrinque B in A 2, & A Q. addatur autem D in G 4. vt cognita ab incognitis diſtinguantur, ergo

C

$\frac{d \text{ in } b \text{ in } a\,4}{d\text{-}g}$ — B in A 2 — A Q æquabitur B Q + D in G 4.

Vt autẽ æquatio facilius explicetur, tranſmutetur fractio $\frac{d \text{ in } b}{d\text{-}g}$ in integrã magnitudinẽ; ea eſto F. nam ſi fiat vt D—G ad D, ita B ad aliã, quæ ſit F. erit F eadem quæ $\frac{d \text{ in } b}{d\text{-}g}$. atq; adeo planum F in A 4 idem erit, quod planũ $\frac{d \text{ in } b \text{ in } a\,4}{d\text{-}g}$. tranſmutata igitur fractione in magnitudinem integram.

F in A 4 — B in A 2 — A Q, æquabitur B Q + D in G 4.

Seu quod idem eſt F 4 — B 2 in A — A Q æquabitur B Q + D in G 4.

Et explicata ſecundum tertium Canonem Æquatione.

F 2 - B - L. V. (F 2 - B Q - B Q - D in G 4) æquabitur A.

Vel F 2 - B + L. V. (F 2 B Q - B Q - D in G 4) æquabitur A.

D In hac Æquatione A explicabilis eſt de duobus terminis, quorum minor tantum indicat quæſitam E M differentiam ſegmentorum baſis. nam terminus maior manifeſto ſe oſtendit maiorem ipſa differentia. immo etiam tota baſe, vt in opere conſtructionis perſpicuum fiet.

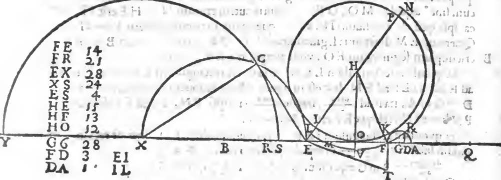
Poriſma.

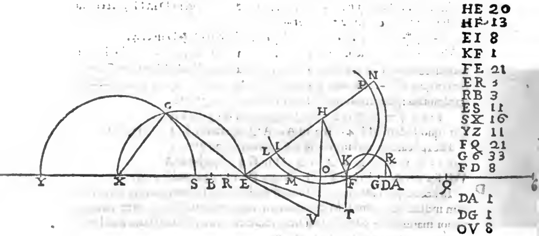
Fiat vt differentia exceſſuum ad exceſſum maiorem, ita baſis ad aliam rectam; differentiæ autem, qua dupla ea recta ſuperat baſim dematur recta, cuius quadratum æquale eſt exceſſui, quo quadratum eiuſdem differentiæ ſuperat quadratum baſis, & quadruplum rectangulum

ſub exceſsibus. reliqua erit terminus minor. A
Vel eidem differentiæ addatur eadem recta, & fiet terminus maior.

Compoſitio primi Caſus.

SIt data baſis trianguli E F: exceſſus autem quo crus maius ſuperat altitudinem trianguli F D, exceſſus vero, quo crus minus eandem altitu-





dinem ſuperat D A, ex quibus exceſsibus compoſita F A ſit minor baſe E F. Oportet inuenire triangulum. Erigatur ex puncto D perpendicularis D ℞, quam ſemicirculus in F A deſcriptus ſecet in ℞. ex puncto autem F. demittatur perpendicularis F T dupla ipſius D ℞. & connectatur F T. quadratum igitur F T quadruplum eſt quadrati D ℞, vel rectan-

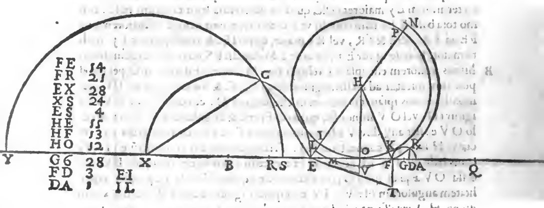
A ctanguli F D A. Deinde in F D ſumatur D G æqualis D A, & fiat vt F G ad F D, ita F E ad aliam, quæ ſit F R, eaque duplicetur in X, & in E x deſcribatur ſemicirculus x C E. in quo accommodetur recta E C æqualis E T, quam demonſtrabimus minorem eſſe diametro E x, & connectatur x C, & centro x interuallo x C deſcribatur circulus ſecans diametrum E x in S, eademque producta in y. Termini igitur de quibus A in Æquatione explicabilis eſt ſunt; E S minor; E y maior. & manifeſtum eſt terminum E y maiorem eſſe, quæſita differentia ſegmentorum baſis. immo tota baſe E F; nam cum ſit vt F G ad F D, minor nempe ad maiorem; ita F E ad F R, erit & f R, vel R x maior, quam f E. & conſequenter E y multo maior. in baſe igitur E f ſumatur E M æqualis E S, quam poſtea demonſtra-

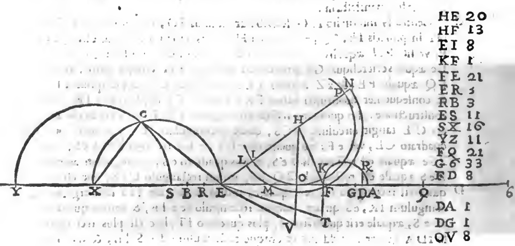
B bimus minorem eſſe ipſa E f. reliqua vero M f ſecetur bifariam in O, per quod punctum ducatur ad rectos angulos recta H O V. & fiat O V æqualis f D, demonſtrabimus ipſam f D minorem eſſe, quam E O. & connectatur E V. cũ igitur f D, vel O V minor ſit, quam O E; erit & angulus O E V minor angulo O V E. fiat angulo e V H æqualis angulus V e H, occurrens recta e H rectæ O H in H, & connectatur f H. Triangulum igitur conſtructũ eſt H e f, cuius baſis eſt data e f, crus vero H e excedit altitudinem trianguli H O exceſſu O V æquali ipſi f D; datæ ſunt enim æquales H e, H V, propter æqualitatem angulorum H e V, H V E. ſupereſt igitur vt crus H f excedat altitudinem H O exceſſu æquali datæ D A; id autem, repetitis Reſolutionis veſtigijs, ita fiet manifeſtum.

C Centro H interuallo H O deſcribatur circulus I O, k P ſecans crura e H, H f in punctis I k, & producatur e H ſecans circumferentiam circuli in P, vt ſit P N æqualis D G, cui æqualis ſumatur quoque I L. ergo reliqua L e æqualis erit reliquæ G f. producatur quoque y f ex vtraque parte, vt ſit F Q æqualis F E; & x Z æqualis x E. erit igitur Z Q dupla ipſius x F. & conſequenter quadrupla ipſius F R; cum ſit F x dupla ipſius f R, ex conſtructione. Et quoniam rectus eſt angulus x C E in ſemicirculo recta C E tangit circulum Y C S, quare rectangulum Y E S æquale * erit quadrato C E, vel e F: ſeu quadratis e f, f T: ſed rectangulum y e S, vel Z S e æquale eſt rectangulo z e S, minus quadrato e S, rectangulum autem Z e S æquale eſt rectangulo Z Q, e S, minus rectangulo Q e S; hoc eſt æ- 36 tertii

D quale eſt rectangulo f R, e S quater, minus rectangulo f e S bis. ergo rectangulum f R, e S quater, minus rectangulo f e S bis, & minus quadrato e S, æquale erit quadrato e f, plus quadrato f T, hoc eſt plus rectangulo f D A quater. Addatur vtrobique rectangulum f e S bis, & quadratum e S; auferatur autem rectangulum f D A quater. ergo rectangulum f R, e S quater, minus rectangulo f D A quater, æquale erit quadratis e f, e S, & rectangulo f e S bis, hoc eſt * æquale erit quadrato f S, vel quadrato e O quater. recta enim f S dupla eſt ipſius e O, cum ſint æquales S E, e M, & æquales quoque M O, O f, vtraque ex conſtructione. cum igitur quadruplum ſit æquale quadruplo, erit & ſimplum æquale ſimplo, 4 ſecundi

hoc eſt rectangulum F R, E S, vel F R, E M, minus rectangulo F D A, æquale erit quadrato E O. ſed quadrato e O æquale eſt rectangulum I E P, hoc eſt rectangulum I e N, minus rectangulo e I, P N, vel minus rectangulo e I L, ergo rectangulum f R, e M, minus rectangulo f D A, vel minus rectangulo e I L æquale erit rectangulo I e N, minus rectangulo e I L, addito communi rectangulo e I L rectangulum F R, e M, æquale





erit rectangulo I e N, vt igitur e M ad e N, ita erit e I ad F R. ſed cum ſit vt f G ad f D, hoc eſt vt e L ad e I, ita F e ad F R, ex conſtructione. eſt quoque permutando vt e L ad e F, ita e I ad f R. ergo vt e M ad E N, ita erit e L ad e F. quare rectangulum F e M ſub extremis æquale erit rectangulo L e N ſub medijs. ac proinde puncta L M, f N in circulo

A lo erunt, cuius quidem circuli, & centrum * eſt in recta H V ſecante rectam Mf biſariam, & ad rectos angulos in O, atque ipſa V H ſecat rectam N L biſariam in H; cum ſint æquales N P, I L, ex conſtructione, & æquales P H, H I, vt ſemidiametri, eamque ſecat non ad rectos angulos. ergo ex Lemmate præmiſſo punctum H erit centrum circuli L M, F N. atque adeo idem, quod centrum circuli I K P, vnde æquales erunt H F, H L. ſunt autem æquales & H K, H I. ergo & reliqua K F, ideſt exceſſus, quo crus H f ſuperat H O altitudinem trianguli. reliquæ I L, hoc eſt D A datæ æqualis erit. Ad datam igitur baſim E f conſtitutum eſt triangulum H E f, cuius crura H E, H f ſuperant altitudinem H O exceſsibus I E, K f, æqualibus datis f D, D A. quod facere oportebat. *coro. 1 prop. tertij*

B At vero rectam e T minorem eſſe diametro e X ſic demonſtrabimus.

Quoniam enim eſt, vt f G ad f D, ita f e ad f R, ex conſtructione: erit per diuiſionem rationis, vt f G ad G D, ita f e ad e R. ſed f G minor eſt, quàm f e: ergo & G D minor erit quam e R; atque adeo tota f D minor, quam tota f R; quare & rectangulum f D G, vel f D A, minus erit rectangulo f R e. & conſequenter rectangulum f D A quater minus erit rectangulo f R e quater, atque addito communi quadrato e f rectangulum f D A quater, hoc eſt quadratum f T, vnà cum quadrato f e, ſeu quod idem eſt quadratum e T minus erit rectangulo f R e quater, vna cum quadrato f e. hoc eſt minus erit quadrato compoſitæ ex f R, R e, ſeu quod idem eſt quadrato X e. ſunt enim æquales f R, R X, ex conſtructione. quare & re-

C cta e T minor erit, quam recta X e, quod erat oſtendendum.

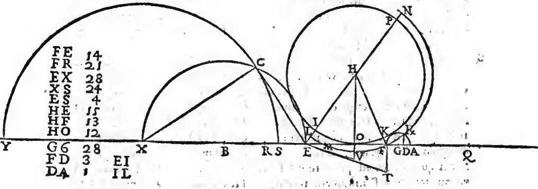
Rectam quoque e S minorem eſſe baſe e f ita demonſtrabo.

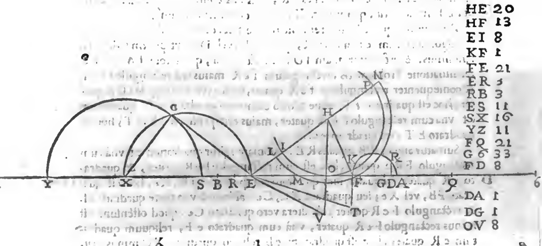
Quoniam enim e R maior eſt, quàm G D, vel D A, vt proxime demonſtrauimus. & e f maior quam f D, cum ſit maior, quàm tota f A, ex Determinatione Problematis, rectangulum f e R maius erit rectangulo f D A, & conſequenter rectangulum f e R quater, maius erit rectangulo f D A quater, hoc eſt quadrato f T, atque addito communi quadrato e f, quadratum e f vna cum rectangulo F E R quater, maius erit quadratis e F, f T, hoc eſt quadrato E T, vel quadrato e C.

Sumatur autem R B æqualis R E. quoniam igitur quadratum e f vnà cum rectangulo F R e quater, hoc eſt cum rectangulo F e R quater, & quadra-

D to e R quater, * æqualia ſunt quadrato compoſitæ ex f R, R e, hoc eſt quadrato F B, vel X e; ſeu quadratis X C, C e. ablato ab vna parte quadrato e f, & rectangulo F e R quater, ab altera vero quadrato C e, quod oſtenſum eſt minus rectangulo F e R quater, vnà cum quadrato e F; reliquum quadratum e R quater, hoc eſt quadratum e B reliquo quadrato X C minus erit, quare & recta e B minus erit, quàm recta X C, vel X S. atque addita, vel ablata vtrinque B S fiet e S minor, quàm X B, hoc eſt quam e F; ſunt enim æquales X B, e F, cum ſint æquales R X, R F, & æquales R B, R e ex conſtructione; quare conſtat propoſitum. Denique rectam F D minorem eſſe quam e O demonſtrabimus in hunc modum. *8 ſecundi*

Quoniam enim eſt, vt F G ad F D, ita F E ad F R, ex conſtructione. erit permutando vt F G ad F E, ita F D ad f R: fiat autem vt F G ad F E, ita E M ad aliam, quæ ſit G b. ergo vt f D ad F R, ita erit E M ad G B. quare rectangulum ſub extremis f D, G B, æquale erit rectangulo ſub medijs F R, E M. ſed rectangulum f R, E M, minus rectangulo F D A, vel f D G, oſtenſum eſt in Demonſtratione Problematis æquale quadrato E O. ergo &





rectangulum F D, G B, minus rectangulo f D G, hoc eſt rectangulum f D B, æquale erit quadrato E O; vnde proportionales erunt f D, E O, D B. ſunt autem & inæquales, vt poſtea demonſtrabimus ergo f B compoſita ex extremis maior erit, quàm dupla media E O, hoc eſt quam recta S F, quæ dupla eſt ipſius E O, nam compoſita ex tota f E, & E M, vel E S, differentia par-

A partium E O, O F, * æqualis eſt duplæ E O.

Et quoniam eſt vt f G ad F E, ita E M, vel E S ad G B, ex quarum extremis cópoſita F b oſtenſa eſt maior, quàm S f, compoſita ex medijs; erit * altera extremarum F G, G b minima, altera maxima. ſed f G non eſt maxima cum ſit minor, quam F E. ergo minima erit, & per conſequens minor, quàm E S; ſed & F A minor eſt, quàm F E, ex Determinatione; ergo compoſita ex F G, & F A hoc * eſt F D dupla minor erit, quàm S f compoſita ex S E, & E f, hoc eſt quam dupla E O. quare & ſimpla f D minor erit, quàm ſimpla E O. quod erat oſtendendum. (20.& 1 prob. 1 lib primi; th 2 huius; corol. ibid.)

At vero rectas proportionales f D, E O, D b inæquales eſſe ſic demonſtrabitur.

B Si enim non ſunt inæquales. ſint ſi fieri poteſt æquales. ergo f b compoſita ex extremis æqualis erit duplæ E O, hoc eſt rectæ S f. & cum ſit vt f G ad f E, ita E M, vel E S ad G b. atque F b compoſita ex extremis æqualis S f compoſitæ ex medijs, minor * extremarum f G, G B, minori mediarum f E, E S æqualis erit, maior autem maiori. quare f G, quippe quæ minor eſt quam f E æqualis erit ipſi E S, vel E M; ſed & f D ponitur æqualis E O. ergo & reliqua G D erit æqualis reliquæ M O: & per conſequens etiam D A æqualis erit O f, atque adeo tota f A æqualis erit toti f E, quod eſt abſurdum, ponitur enim f A minor quam f E, ex determinatione Problematis. Inæquales ſunt igitur f D, E O, D b, quod oſtendiſſe oportuit. (th 3 huius)

Ex hoc Problematis conſtructione diametrum terræ inueniemus hac ra-
C tione.

Diſtantia duorum locorum, quæ in crepidine lacus ſumpſimus. ideſt recta linea tangens ſuperficiem aquæ interiecta inter oculum menſoris, & foramen laminæ. intelligatur baſis trianguli verticem habentis in centro terræ, altitudinem vero ſemidiametrum terræ. nam ipſa altitudo ſiue perpendicularis è vertice trianguli ducta ad baſim ſecat ipſam baſim in puncto contactus, in quo ſcilicet baſis trianguli tangit ſuperficiem aquæ, quam ſphæricam eſſe demonſtratum eſt interuallum vero, quod eſt inter ſumitatem foraminis laminæ, & ſuperficiem aquæ intelligatur exceſſus, quo crus vnum trianguli ſuperat eius altitudinem, interuallum autem quod eſt inter oculum menſoris, & ſuperficiem aquæ intelligatur exceſſus, quo crus alterum trianguli ſu-
D perat eius altitudinem. atque ex data baſe, & illis exceſsibus dabitur triangulum. quare & eius altitudo hoc eſt ſemidiameter terræ.

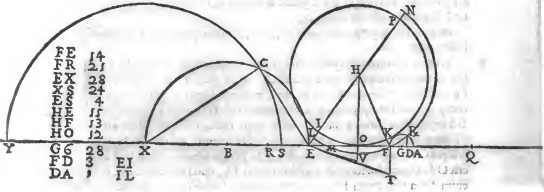
Ratio igitur inueniendi diametrum terræ ita ſe habet.

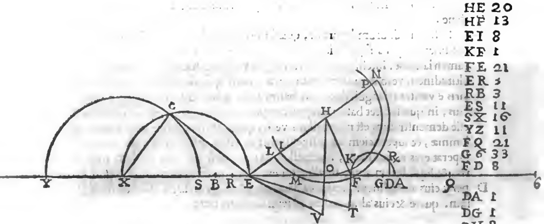
Fiat vt differentia exceſſuum ad exceſſum maiorem, ita baſis ad aliam rectam; differentiæ autem, qua dupla ea recta ſuperat baſim dematur recta, cuius quadratum æquale eſt exceſſui, quo quadratum eiuſdem differentiæ ſuperat quadratum baſis, & quadruplum rectangulum ſub exceſſibus, reliqua vero ponatur pro tertia quatuor proportionalium, quarum prima

ma

ma eſt differentia exceſſuum, ſecunda vero baſis, quarta erit æqualis compoſitæ ex exceſsibus, & diametro circuli, de qua quæritur.

Eſt enim ex conſtructione vt F G ad F D, hoc eſt vt E L ad E I, ita F E ad f R, cuius dupla eſt f X, differentia autem, qua ipſa X f ſuperat baſim E f, eſt X E, cuius quadratum excedit quadratum C E, quadrato X C; quadratũ
47 primi autem C E, vel E T æquale eſt quadratis E f, f T, hoc eſt quadrato E f, &





quadruplo rectangulo f D A, vel E I L. itaque quadratum X C eſt exceſſus, quo quadratum X E ſuperat quadratum E f, & quadruplũ rectangulum E I L. a recta autem X E dempta eſt X S æqualis X C, reliquæ vero S E facta eſt æqualis E M, differentia ſegmentorum E O, O F; quam quidem E M ponendam eſſe diximus pro tertia quatuor proportionalium, quarum prima eſt E L dif-

A differentia exceſſuum E I, K f: ſecunda vero baſis E f, quartam autem futuram eſſe diximus æqualem compoſitæ ex exceſsibus, & diametro circuli, de qua quæritur. quod quidem verum eſt, nam vt E L ad E F, ita eſt E M ad E N compoſitam ex exceſsibus E I, P N; & diametro I P.

In numeris ſit data baſis trianguli E F 21, exceſſus vero I E 8, exceſſus autem K F I, fiat vt 7 differentia videlicet exceſſuum ad 8 exceſſum maiorem, ita 21, ideſt baſis ad aliam rectam, ea erit 24 eius dupla 48, differentia autem inter 48 & 21 eſt 27. ab hac auferatur 16 nempe recta, cuius quadratum æquale eſt exceſſui, quo quadratum ex 27 ſuperat quadratum ex 21, & quadruplum eius quod fit ex 8 & 1, hoc eſt ex exceſsibus; remanebunt 11 pro E M differentia ſegmentorum E N, N F.
B hæc differentia ponenda eſt pro tertia quatuor proportionalium, quarum prima eſt 7, nempe differentia exceſſuum, ſecunda vero 21, hoc eſt baſis; quarta erit 33 compoſita ex exceſsibus, & diametro quæſita, à qua compoſita ſi auferantur exceſſus nempe 8 & 1 remanebunt 24 pro diametro circuli, de qua quæritur.

Vel ſit data baſis 14, exceſſus maior 3, exceſſus minor 1. Fiat vt 2 differentia exceſſuum ad 3 exceſſum maiorem, ita 14 ad aliam rectam. ea erit 21, eius dupla 42. differentia autem inter 42, & 14 eſt 28. ab hac auferatur 24, nempe recta cuius quadratum æquale eſt exceſſui, quo quadratum ex 28 ſuperat quadratum ex 14, & quadruplum eius, quod fit ex 3 & 1, hoc eſt ex exceſsibus. remanebunt 4 pro E M differentia
C ſegmentorum E N, N F. hæc differentia ponenda eſt pro tertia quatuor proportionalium, quarum prima eſt 2 differentia exceſſuum, ſecunda vero 14 hoc eſt baſis, quarta erit 28 compoſita ex exceſsibus, & diametro quæſita, auferantur exceſſus, nempe 3 & 1 remanebunt 24 pro diametro circuli, de qua quæritur.

Aliam quoque rationem inueniendi diametrum terræ exponemus, & quidem faciliorem quia per numeros minores procedet.

Fiat vt differentia exceſſuum ad exceſſum maiorem, ita baſis ad aliam rectam. differentiæ autem, qua dupla eā recta inuenta ſuperat baſim dematur recta, cuius quadratum æquale eſt exceſſui, quo quadruplum rectangulum ſub recta inuenta, & differentia ipſius inuentæ, & baſis ſuperat quadru-
D plum rectangulum ſub exceſsibus; reliqua vero ponatur pro tertia quatuor proportionalium, quarum prima eſt differentia exceſſuum, ſecunda vero baſis, quarta erit compoſita ex exceſsibus, & diametro quæſita.

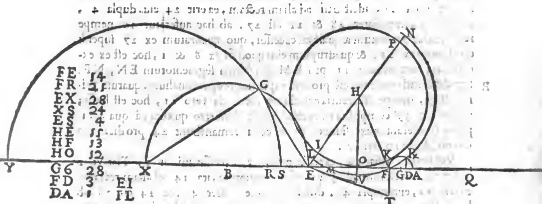
Ratio hæc inueniendi diametrum terræ eadem eſt quæ ratio ſupra expoſita. licet operatione differant. nam quadruplum rectangulum F R E ſub recta inuenta F R & R E; differentia ipſius F R, & baſis E F ſuperat quadruplum rectangulum E I L ſub exceſsibus, eodem exceſſu, quo quadratum x E ſuperat quadratum baſis E F, & quadruplum rectangulum E I L. idque ſic demonſtrabitur.

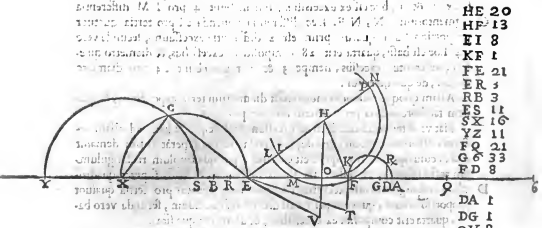
Quoniam enim quadratum x E ſuperat quadratum C E, vel E T, ſeu

qua-

quadrata E F, F T quadrato x C; quadratum autem F T æquale eſt quadruplo rectangulo F D A, vel E I L. ergo ipſum quadratum x E ſuperabit quadratum E F, & quadruplum rectangulum E I L quadrato x C.

Et quoniam quadruplum rectangulum f R e, vna cum quadrato e f æ-
8 ſecundi. quale eſt quadrato compoſitæ ex f R, R e; hoc eſt, quadrato x e; quod quidem quadratũ ſuperat quadratũ e f, & quadruplum rectangulum e I L quadra-





to x C, vt demonſtrauimus. ergo & quadruplum rectangulum f R e, vnà cum quadrato e f, ſuperabit quadratum E F, & quadruplum rectangulum E I L eodem quadrato X C. auferatur commune quadratum E F, ergo quadruplum rectangulum F R E itidem ſuperabit quadruplum rectangulum E I L, quadrato X C. ſed & quadratum X E ſuperat quadratum E F, & qua-

qua-

A quadruplum rectangulum E I L quadrato X G. ergo quadruplum rectangulum F R E ſuperat quadruplum rectangulum E I L eodem exceſſu, quo quadratum X E ſuperat quadratum E F, & quadruplum rectangulum E I L; quod erat oſtendendum.

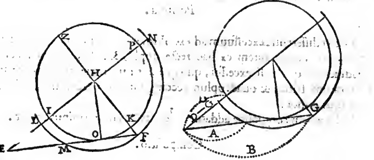
Sit data baſis trianguli 21 exceſſus maior 8, exceſſus minor 1. Fiat vt 7 differentia exceſſuum, ad 8 exceſſum maiorem, ita 21 hoc eſt baſis, ad aliam rectam. ea erit 24, eius dupla 48 differentia autem inter 48, & 21, eſt 27. ab hac auferatur 16, nempe recta, cuius quadratum æquale eſt exceſſui, quo quadruplum rectangulum ſub 3, & 24; hoc eſt, ſub recta inuenta, & differentia eiuſdem inuentæ; & baſis, ſuperat rectangulum ex 8 & 1 hoc eſt ex exceſsibus; remanebunt 11 pro E M differentia ſeg-
B mentorum E N, N F. hæc differentia ponatur pro tertia quatuor proportionalium, quarum prima eſt 7 differentia exceſſuum, ſecunda vero 21. ideſt baſis, quarta erit 33 compoſita ex exceſsibus, & diametro quæſita, demptis exceſsibus nempe 8, & 1, remanebit diameter, eaque erit 24.

Eundem Caſum Problematis alia via & reſoluam, & componam quamuis in hac quoque, quæ ſequitur Reſolutione idem quæſitum erit.

Alia Reſolutio primi Caſus.

Sit data baſis trianguli, vt in antecedenti Reſolutione B, exceſſus vero quo crus maius ſuperat altitudinem trianguli D. exceſſus autem, quo crus
C minus eamdem altitudinem ſuperat G. Oportet inuenire triangulum. Factum iam ſit, & reſumantur antecedentis Reſolutionis figuræ, & quæ-

D



ratur, vt prius E M differentia ſegmentorum E O, O F. eſto illa A. ergo B — A erit M F, & conſequenter F O erit $B\frac{1}{2}$ — $A\frac{1}{2}$.

Et quoniam rectangulum L E N æquale eſt rectangulo M E F; erit vt L E ad E M, ita E F ad E N. hoc eſt in figura reſolutionis, vt D — G ad A, ita B ad $\frac{B \text{ in } A}{D - G}$. itaque $\frac{B \text{ in } A}{D - G}$ erit ipſa E N à qua ſi auferatur I E, hoc eſt D; reliqua I N erit $\frac{B \text{ in } A}{D - G}$ — D.

Pro-

Producatur autem F H vſque ad circumferentiam O I P in Z; erit F Z æqualis I N; atque adeo & ipſa F Z erit $\frac{B \text{ in } A}{D - G}$ — D. A

35 tertij Et quoniam rectangulum K F Z * æquale eſt quadrato O F, hoc eſt rectangulum ſub G, & $\frac{B \text{ in } A}{D - G}$ — D æquale quadrato ex B $\frac{1}{2}$ — A $\frac{1}{2}$

$\frac{G \text{ in } B \text{ in } A}{D - G}$ — G in D, æquabitur B Q $\frac{1}{4}$ + A Q $\frac{1}{4}$ — B in A $\frac{1}{2}$

Quadruplicentur omnia, vt Poteſtas æquationis integra fiat, ergo

$\frac{G \text{ in } B \text{ in } A\ 4}{D - G}$ — G in D 4 æquabitur B Q + A Q — B in A 2

Addatur vtrique parti B in A 2, & G in D 4. auferatur autem A Q, vt cognita ab incognitis ſeparentur; ergo

$\frac{G \text{ in } B \text{ in } A\ 4}{D - G}$ + B in A 2 — A Q; æquabitur B Q + G in D 4

Vt autem æquatio facilius explicetur, tranſmutetur fractio $\frac{G \text{ in } B}{D - G}$ in integram magnitudinem, ea eſto F. nam ſi fiat vt D — G ad G, ita B ad aliam, quæ ſit F; erit F eadem quæ $\frac{G \text{ in } B}{D - G}$. atque adeo planum F in A 4 idem erit, quod planum $\frac{G \text{ in } B \text{ in } A\ 4}{D - G}$. tranſmutata igitur in magnitudinem integram fractione. B

E in A 4 + B in A 2 — A Q æquabitur B Q + G in D 4

Vel quod idem eſt F 4 + B 2 in A — A Q æquabitur B Q + G in D 4.

Et explicata Æquatione.

F 2 + B — L. V. F 2 + B Q — B Q — G in D 4, æquabitur A

Vel F 2 + B + L. V. F 2 + B Q — B Q — G in D 4 æquabitur A.

In hac Æquatione A explicabilis eſt de duobus terminis, quorum minor tantum indicat quæſitam E M differentiam ſegmentorum baſis, maior enim terminus maior eſt ipſa differentia, immo etiam tota baſe, vt in conſtructione manifeſtum fiet. C

Poriſma.

Fiat vt differentia exceſſuum ad exceſſum minorem, ita baſis ad aliam rectam, compoſitæ autem ex hac recta dupla, & baſe demátur recta, cuius quadratum æquale eſt exceſſui, quo quadratum eiuſdem compoſitæ ſuperat quadratum baſis, & quadruplum rectangulum ſub exceſsibus, reliqua erit terminus minor.

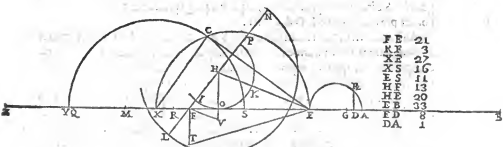
Vel ſi eidem compoſitæ addatur eadem recta, fiet terminus maior. D

Compoſitio.

Sit data trianguli baſis E F; exceſſus vero, quo crus maius ſuperat altitudinem trianguli e D: exceſſus autem, quo crus minus eamdem altitudinem ſuperat D A. ex quibus exceſsibus compoſita e A ſit minor baſe e f. Oportet inuenire triangulum. Erigatur ex puncto D perpendicularis D ℞, quam ſemicirculus in e A deſcriptus ſecet in ℞. ex puncto autem f demittatur perpendicularis f T, dupla ipſius D ℞, & connectatur e T. quadratum igitur f T quadruplum erit quadrati D ℞, vel rectanguli e D A.

Dein-

A Deinde e D ſumatur D G æqualis D A, & fiat vt E G ad G D, ita E F ad aliam, quæ ſit F R. eaque duplicetur in X, & in E X deſcribatur ſemicirculus



B X C E, in quo accommodetur recta E C æqualis E T, quam demonſtrauimus minorem eſſe diametro E X; & connectatur X C, & centro X interuallo X C deſcribatur circulus ſecans diametrum E X productam in y. is circulus ſecabit quoque rectam F E, quia x C maior eſt, quam x F. vt infra oſtendetur, ſecet ergo in S, termini igitur, de quibus A in Æquatione explicabilis eſt ſunt S E minor, E y maior. & manifeſtum eſt terminum E y maiorem eſſe quæſita differentia ſegmentorum baſis; immo tota baſe. ſecetur ergo F S bifariam, & ad rectos angulos in O à recta H O V, & fiat O V æqualis D A, quam demonſtrabimus minorem eſſe recta, O F. & connectatur f V. angulus igitur O V f maior erit angulo O f V: fiat angulo o V f æqualis angulus V f H occurrens recta f H, rectæ O H in H, & connectatur E H. Trian-

C gulum igitur conſtructum eſt H e f, cuius baſis eſt data E f, crus vero Hf excedit altitudinem trianguli H O exceſſu O V æquali ipſi D A datæ; ſunt enim æquales H f, H V, propter æqualitatem angulorum H f V, H V f. ſupereſt igitur vt crus H E excedat altitudinem H O, exceſſu æquali datæ E D: id autem ita fit manifeſtum.

Centro H interuallo H O deſcribatur circulus O I, P k ſecans crura H f, H E in punctis I K, & producatur f H ſecans circumferentiam in P, vt ſit P N æqualis E D, cui æqualis ſumatur quoque I L. ergo cum ſit I L æqualis E D, & I f æqualis D A, vel D G: erit & reliqua f L æqualis reliquæ E G. Producatur quoque E y in Z, vt ſit x Z æqualis X E, & ſumatur f Q æqualis f E. atque f M æqualis S E. Quoniam igitur X e ſuperat F E exceſſu X F du-

D pla X E, hoc eſt Z E ſuperabit duplam f E, quæ eſt Q E exceſſu X F duplo: ſed Z E ſuperat Q E exceſſu Z Q. ergo Z Q dupla erit ipſius X F, & conſequenter quadrupla rectæ R f.

Et quoniam rectus eſt angulus x C e in ſemicirculo: recta C e tangit circulum Y C S. quare rectangulum Y e S æquale erit quadrato C e, vel e T, ſeu quadratis e F, F T. ſed rectangulum y e S, vel Z S E æquale eſt rectangulo z e S, minus quadrato e S, rectangulum autem z e S æquale eſt re-

Aa ctan-

ctangulis Z Q, E S, Q E S, hoc eſt rectangulo R F, E S quater, & rectangulo A
f E S bis; Z Q enim oſtenſa eſt quadrupla ipſius R f. ipſa autem Q E dupla
eſt ipſius f E, ex conſtructione. ergo rectangulum f R, E S quater, plus rectan-
gulo f E S bis, minus quadrato E S, æquale erit quadrato f E, plus quadrato f T,
hoc eſt plus rectangulo E D A quater.

Auferatur vtrinque rectangulum f E S bis, & rectangulum e D A quater
addatur autem quadratum e S. ergo rectangulum R f, e S quater, minus re-
ctangulo e D A quater, æquale erit quadratis f e, e S, minus rectangulo f e S
bis. hoc * eſt æquale erit quadrato f S, vel quadrato f O quater, quare & ſim-
plum erit æquale ſimplo, hoc eſt rectangulum R f, e S minus rectangulo e D
A, vel minus rectangulo f I L erit æquale quadrato f O. ſed quadratum f O 1
æquale eſt rectangulo I F P, hoc eſt rectangulo I F N, minus rectangulo I E, B
P N, vel minus rectangulo F I L; ergo rectangulum R f, E S, minus rectan-
gulo F I L, æquale erit rectangulo I F N, minus rectangulo F I L; addito
communi rectangulo F I L; rectangulum R F, E S, hoc eſt R F M rectan- I
gulo I F N æquale erit. vt igitur F M ad F N, ita erit f I, ad f R; ſed cum
ſit vt E G ad G D, hoc eſt vt L f ad f I, ita e f ad f R; eſt quoq; permutando
vt L f ad f E, ita f I ad f R. ergo vt f M ad f N, ita erit f L ad f E. vnde
rectangulum M f E ſub extremis æquale erit rectangulo N f L ſub medijs.
quare puncta M N, E L in circulo erunt, cuius quidem circuli centrum eſt
Corol. prop. 1 tertij * in recta H V ſecante rectam M E bifariam, & ad rectos angulos in O;
cum ſint æquales M f, f O ipſis E S, S O, vtraque vtrique, ex conſtructio-
ne; atque ipſa V H ſecat rectam N L bifariam in H, cum ſint æquales N P, C
I L, ex conſtructione, & æquales P H, H I, vt ſemidiametri, eamque ſecat
non ad rectos angulos. ergo ex Lemmate, quod huic Problemati præmiſſum
eſt, punctum H; erit centrum circuli M N, E L, idemque quod centrum cir- Ↄ
culi P k I, atque adeo æquales erunt H E, H L: ſunt autem æquales & H K, H I;
ergo & reliqua k E, reliquæ I L, hoc eſt E D, æqualis erit. quod erat oſten-
dendum. ad datam igitur baſim e f conſtitutum eſt triangulum H e f, cu-
ius crura H e, H f ſuperant altitudinem H O, exceſsibus k e, I f æqualibus
datis e D, D A. quod erat faciendum.

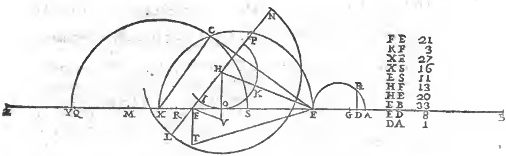
Rectam autem e T minorem eſſe diametro e X. ita oſtendam.

Quoniam enim eſt vt e G ad G D, ita e f ad f R, ex conſtructione; & e S
minor quam e f, erit & G D minor, quàm f R; atque tota e D minor, quam D
tota e R. vnde & rectangulum e D G, vel e D A minus erit rectangulo e R f,
& conſequenter quadruplum rectangulum e D A, hoc eſt quadratum f T, mi-
nus erit quadruplo rectangulo e R f. atque addito vtrique parti quadrato f e, qua- (I
47 primi drata f T, f e, hoc * eſt quadratum e T, minus erit quadruplo rectangulo e R f,
8 ſecundi vnà cum quadrato e f; hoc * eſt minus erit quadrato compoſitæ ex e R, R f,
id eſt quadrato e X; quare & recta e T minor erit, quam recta e X. quod
erat oſtendendum.

Rectam vero X C maiorem eſſe quam X f. ita fiet manifeſtum.

Quoniam enim f R oſtenſa eſt maior, quam G D, & f e maior eſt quã e D;

A tota enim e A minor eſt quàm fe ex Determinatione Problematis; rectangulum efR maius erit rectangulo eDG, vel eDA. & conſequenter qua-



B druplum EFR, maius quadruplo EDA, hoc eſt quadrato FT. atque addito vtrique parti quadrato Fe, quadruplum rectangulum efR vnà cũ quadrato fE maius erit quadratis fT, fe, hoc eſt quadrato eT, vel quadrato EC.

Et quoniam quadratum Ef, vnà cum rectangulo eRf quater, vel cum rectangulo efR quater, & quadrato fR quater * æqualia ſunt quadrato compoſitæ ex eR, Rf; hoc eſt quadrato eX, ſeu quadratis XC, Ce; ablato ab vna parte quadrato ef, & rectangulo efR, quater; ab altera vero quadrato Ce, quod oſtenſum eſt minus rectangulo efR quater, vna cum quadrato ef; reliquum quadratum fR quater, hoc eſt quadratum XF, reliquo quadrato XC minus erit. quare & recta XF minor quam recta XC. quod erat oſtendendum. *8 ſecundi*

C Rectam denique DA minorem eſſe recta OF. ſic demonſtrabitur.

Quoniam enim eſt vt EG ad GD, ita EF ad FR ex conſtructione, erit permutando vt EG ad EF, ita GD ad FR. fiat autem vt Eg ad EF, ita ES ad aliam, quæ ſit EB. ergo vt GD ad FR, ita erit ES ad EB. quare rectangulum ſub extremis GD, EB æquale erit rectangulo ſub medijs FR, ES; ſed rectangulum FR, ES, minus rectangulo EDA, vel eDG oſtenſum eſt in demonſtratione Problematis æquale quadrato FO. ergo & rectangulum GD, eB, minus rectangulo EDG, hoc eſt rectangulum GDB, æquale erit quadrato FC. vnde proportionales erunt GD, FO, DB; ſunt autẽ & inæquales, vt poſtea demonſtrabimus, ergo GB compoſita ex extremis maior erit quam dupla media FO, hoc eſt quam recta FS.

D Et quoniá eſt vt eG ad ef, ita eS ad eB, GB autem differentia extremarũ eG, eB oſtẽſa eſt maior, quàm FS, differentia mediarum ef, eS. ergo altera extremarum eG, eB minima erit; altera maxima. ſed eG non eſt maxima, cum ſit minor, quàm Ef. ergo minima erit, & per conſequens minor quam eS. ſed & eA minor eſt quàm eF, ex determinatione. ergo cõpoſita ex eA, & eG, hoc eſt dupla eD minor erit quàm cõpoſita ex ef, & eS. hoc eſt quam dupla eO. quare & ſimpla eD minor erit, quàm ſimpla *theo.2.li.4* *Corol.1 Prob.8 lib. primi*

E O: & cum ſit E G minima, & extrema quatuor proportionalium E G, E f, e S, e B; erit altera extrema E B maxima. vnde maior quam e F. ſed e D oſtenſa eſt maior, quam e O. ergo reliqua D B maior erit, quam reliqua O f. ſed vt B D ad O F, ita eſt O f ad D G. ergo & O f maior erit quam D G, vel D A, quod erat oſtendendum. A

At vero rectas proportionales G D, O f, D B inęquales eſſe ſic demonſtrabitur.

Si enim non ſunt inæquales, ſint ſi fieri poteſt æquales. ergo G B compoſita ex extremis æqualis erit duplæ F O, hoc eſt rectæ F S. & cum ſit vt E G ad E f, ita E S ad E B, atque G B differentia extremarum E G, e B æqualis f S differentiæ mediarum e F, E S, minor extremarum minori mediarum* æqualis erit, maior autem maiori. quare E G, quippe quæ minor eſt, quàm E F, æqualis erit e S: ſed cum ponantur æquales tres proportionales G D, O f, D B, erit & G D æqualis F O, vel S O, & per conſequens D A quoque æqualis O f. ergo tota e A æqualis erit toti e f, quod eſt abſurdum; ponitur enim e A minor quam e f, ex determinatione Problematis. inæquales igitur ſunt G D, O F, D B, quod erat oſtendendum. B

*ib. 3 lib. 4

Ex hac conſtructione Problematis, inuenitur diameter tertæ hoc modo.

Fiat vt differentia exceſſuum ad exceſſum minorem, ita baſis ad aliam rectam compoſitæ autem ex hac recta dupla, & baſe, demtur recta, cuius quadratum æquale eſt exceſſui, quo quadratum eiuſdem compoſitæ ſuperat quadratum baſis, & quadruplum rectangulum ſub exceſſibus; reliqua vero ponatur pro tertia quatuor proportionalium, quarum prima eſt differentia exceſſuum, ſecunda vero baſis, quarta erit æqualis compoſitæ ex exceſſibus, & diametro circuli, de qua quæritur. C

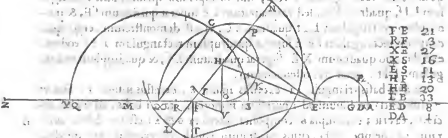
Eſt enim ex conſtructione, vt e G ad G D, hoc eſt, vt L f ad f I, ita e f ad R R, cuius dupla eſt f X compoſita autem ex X f, & f e eſt X e. eius quadratum ſuperat quadratum C e quadrato X C. quadratum autem C e, vel e T* æquale eſt quadrato e f, vna cum quadrato f T, hoc eſt vna cum rectangulo B D A quater, vel L I f quater. itaque quadratum x C erit exceſſus, quo quadratum x e ſuperat quadratum e f, & quadruplum rectangulum L I f, à recta autem x e dempta eſt x S æqualis x C; reliqua vero S e facta eſt differentia ſegmentorum e O, O f; quam quidem ſeu ipſi æqualem f M ponendam eſſe diximus pro tertia quatuor proportionalium, quarum prima eſt L f differentia exceſſuum k e, I f, ſecunda vero baſis f e, quartam autem futuram eſſe diximus æqualem compoſitæ ex exceſſibus, & diametro circuli, de qua quæritur. quod quidem verum eſt, nam vt L f ad f e, ita eſt f M ad f N compoſitam ex exceſſibus f I, P N, & diametro I P. D

*47 primi

In numeris ſit data baſis trianguli 21. exceſſus vero maior 8. exceſſus autem minor 1. Fiat vt 7 differentia exceſſuum ad 1 exceſſum minorem, ita 21, hoc eſt baſis, ad aliam rectam. ea erit 3. eius dupla 6 compoſita autem ex 6, & 21 eſt 27. ab hac auferatur 16 recta videlicet, cuius quadratum æquale eſt exceſſui, quo quadratum ex 27 ſuperat

qua-

A quadratum ex 21, & quadruplum eius, quod fit ex 8 & 1, hoc eſt ex exceſſibus remanebunt 11 pro tertio quatuor proportionalium termino, quorum



B primus eſt 7 differentia exceſſuum, ſecundus vero 21 baſis, quartus erit 33, hoc eſt compoſita ex exceſsibus, & diametro quæſita. & ablatis exceſſibus 8 & 1, remanebit diameter 24.

Et hic quoque exponam rationem inueniendi diametrum terræ faciliorem nimirum per numeros minores progredientem.

Fiat vt differentia exceſſuum ad exceſſum minorem, ita baſis ad aliam rectam. compoſitæ autem ex hac recta dupla, & baſe, dematur recta, cuius quadratum æquale eſt exceſſui, quo quadruplum rectangulum ſub recta inuenta, & compoſita ex eadem inuenta, & baſe ſuperat quadruplum rectangulum ſub exceſsibus, reliqua verò ponatur pro tertia quatuor proportionalium, quarum prima eſt differentia exceſſuum, ſecunda vero baſis, quarta erit compoſita ex exceſsibus, & diametro de qua quæritur.

C Hæc ratio inueniendi diametrum terræ non eſt diſsimilis ab ea, quæ ſupra expoſita eſt ratione. nam recta, cuius quadratum æquale eſt exceſſui, quo quadruplum rectangulum F R E ſub recta inuenta F R, & R E compoſita ex ipſa F R, & baſe F E ſuperat quadruplum rectangulum E D A ſub exceſſibus, vel L I F: eadem eſt, quæ recta, cuius quadratum æquale eſt exceſſui, quo quadratum X E ſuperat quadratum F E, & quadruplum rectangulum L I F. Quadruplum enim rectangulum F R E ſuperat quadruplum rectangulum L I F eodem exceſſu, nempe quadrato X C, quo etiam quadratum X E ſuperat quadratum E F, & quadruplum rectangulum L I F. vt mox demonſtrabimus.

D Quoniam enim quadratum X E ſuperat quadratum C E, vel E T, ſeu quadrata E F, F T, quadrato X C; quadratum autem F T æquale eſt quadruplo rectangulo E D A, vel L I F. ergo ipſum quadratum X E ſuperabit quadratum E F, & quadruplum rectangulum L I F, quadrato X C.

Et quoniam quadruplum rectangulum F R E vna cum quadrato F E æquale eſt quadrato compoſitæ ex F R, R E, hoc eſt quadrato X E, quod quidem quadratum ſuperat quadratum F E, & quadruplum rectangulum L I F quadra- 8 ſecundi

 dra-

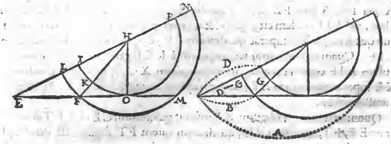
drato X C, vt demonſtrauimus. ergo & quadruplum rectangulum F R E A.
vna cum quadrato f E ſuperabit quadratum f E, & quadruplum rectāgulum
L I f eodem quadrato X C. & ablato vtrinque quadrato f E, reliquum, hoc eſt
quadruplum rectangulum F R E, itidem ſuperabit quadruplum rectangulum
L I f, quadrato X C. ſed & quadratum x E ſuperat quadratum f E, & quadruplum
rectangulum L I f quadrato x C, vt eſt demonſtratum. ergo quadruplum
rectangulum f R E ſuperat quadruplum rectangulum L I f eodem
exceſſu, quo quadratum X E ſuperat quadratum E f, & quadruplum rectangulum
L I f. quod erat oſtendendum.

Sit data baſis trianguli 21. exceſſus maior 8, exceſſus minor 1. Fiat vt
7 differentia exceſſuum ad 1 exceſſum minorem, ita 21 baſis, ad aliam rectam,
ea erit 3 eius dupla 6. compoſita autem ex 6 & 21 eſt 27. ab hac auferatur 16, nempe recta, cuius quadratum æquale eſt exceſſui, quo quadruplum rectangulum ſub 3 & 24, hoc eſt ſub recta inuenta, & compoſita; ex
eadem inuenta & baſe ſuperat quadruplum rectangulum ex 8 & 1, hoc eſt ex
exceſsibus. remanebunt 11 pro tertio quatuor proportionalium termino, quorum primus eſt 7 differentia exceſſuum, ſecundus vero 21, idel. baſis, quarta
erit 33 compoſita ex exceſsibus, & diametro, de qua quæritur, atque adeo
ablatis exceſsibus 8. & 1 remanebit ipſa diameter 24. B

Reſolutio ſecundi caſus.

SEd cadat perpendicularis trianguli extra triangulum, & ſit data baſis
B; exceſſus vero, quo crus maius ſuperat altitudinem D, exceſſus autem, quo crus minus eandem altitudinem ſuperat G. Oportet inuenire triangulum. C

Factum iam ſit, & ſit illud triangulum H E f, in cuius baſim productam
cadat perpendicularis H O; & centro H interuallo H O deſcribatur circulus
I O P ſecans crura H E, H f in punctis I K. productum vero crus maius



D

E H in P, erunt igitur I E, k F exceſſus, quibus crura H E, H f ſuperant
perpendicularem H O. quoniam igitur dantur baſis E f, exceſſus maior I E,
& exceſſus minor k f, ſit baſis B, exceſſus vero maior D, exceſſus autem

A item minor G, vt in figura ad reſolutionem pertinente deſignatum eſt.

Rurſus centro H interuallo autem H f, alius circulus deſcribatur ſecans productam baſim E F in M; crus vero E H in L, ipſumque productum in N. differentia igitur rectarum E O, O M, erit baſis E F. ſunt enim * æquales f O, O M; differentia autem crurum H E, H f erit E L; ea ipſa quæ eſt exceſſuum I E, K f. eaq. in figura Reſolutionis erit D -- G. Quæratur E M compoſita ex baſe, & dupla continuatione baſis, vſque ad perpendicularem, hoc eſt compoſita ex E f, & dupla f O; eſto illa A, ergo A + B * erit duplum ſegmentum E O. vnde ſimplum ſegmentum E O erit A $\frac{1}{2}$ + B $\frac{1}{2}$. *3 tertij* *co. 1 prob. 1 lib. primi. 3*

Et quoniam rectangulum L E N * æquale eſt rectangulo F E M. erit vt L e ad E f. ita E M ad E N, hoc eſt in figura ad reſolutionem pertinente, erit vt *36 tertij*
B D — G ad B, ita A ad $\frac{\text{b in a}}{\text{d-g}}$. itaque $\frac{\text{b in a}}{\text{d-g}}$ erit ipſa EN, ex qua ſi abſcindatur P N hoc eſt G; reliqua P E erit $\frac{\text{b in a}}{\text{d-g}}$ — G.

Et quoniam rectangulum I E P * æquale eſt quadrato E O, hoc eſt rectangulum ſub D, & $\frac{\text{b in a}}{\text{d-g}}$ — G æquale quadrato ex A $\frac{1}{2}$ + B $\frac{1}{2}$. *ibid.*

$\frac{\text{d in b in a}}{\text{d-g}}$ — D in G æquabitur A Q $\frac{1}{4}$ + B Q $\frac{1}{4}$ + B in A $\frac{1}{2}$.

Quadruplicentur omnia, vt Poteſtas æquationis integra fiat, ergo

$\frac{\text{d in b in a 4}}{\text{d-g}}$ — D in G 4 æquabitur A Q + B Q + B in A 2.

Auferantur vtrinque B in A 2, & A Q: addatur autem D in G 4. vt cognita ab incognitis diſtinguantur, ergo

$\frac{\text{d in b in a 4}}{\text{d-g}}$ — B in A 2 — A Q æquabitur B Q + D in G 4.

Vt autẽ æquatio facilius explicetur, tranſmutetur fractio $\frac{\text{d in b}}{\text{d-g}}$ in integrã
C magnitudinẽ; ea eſto F. ſi enim fiat vt D — G ad D, ita B ad aliã, quæ ſit F. erit F eadem quæ $\frac{\text{d in b}}{\text{d-g}}$. atq; adeo planum F in A 4 idem erit, quod planũ $\frac{\text{d in b in a 4}}{\text{d-g}}$. tranſmutata igitur fractione in magnitudinem integram.

F in A 4 — B in A 2 -- A Q, æquabitur B Q † D in G 4.

Seu quod idem eſt F 4 -- B 2 in A -- A Q æquabitur B Q † D in G 4.

Et explicata Æquatione.

F 2 - B + L. V. (F 2 - B Q - B Q - D in G 4) æquabitur A.

Vel F 2 - B - L. V. (F 2 B Q - B Q - D in G 4) æquabitur A.

Poriſma.

Fiat vt differentia exceſſuum ad exceſſum maiorem, ita baſis ad aliam
D rectam; differentiæ autem, qua dupla ea recta ſuperat baſim addita recta, cuius quadratum æquale eſt exceſſui, quo quadratum eiuſdem differentiæ ſuperat quadratum baſis, & quadruplum rectangulum ſub exceſſibus, fiet terminus maior.

Vel ſi eidem compoſitæ addatur eadem recta, fiet terminus minor.

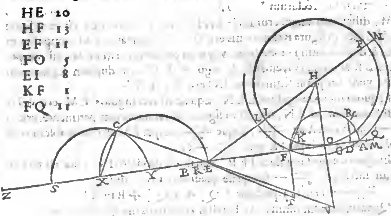
In hac quoque Æquatione A explicabilis eſt de duobus terminis, ſed maior tantum indicat quæſitam E M.

hic deeſt aliquid.

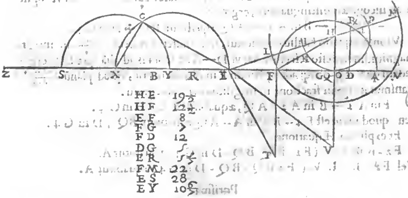
Com-

Compoſitio ſecundi Caſus. A

Sit data trianguli baſis E F. exceſſus vero, quo crus maius ſuperat altitudi-



B



C

nem trianguli F D; exceſſus autem quo crus minus eandem altitudinem ſuperat D G; quorum exceſſuum differentia F G ſit minor baſe E F. Oportet inuenire triangulum. Producatur F D, in A, vt ſit D A æqualis D G, & in ipſa F A deſcribatur ſemicirculus quem ducta ex D. perpendicularis D ℞ ſecet in ℞. ex puncto autem F demittatur perpendicularis F T dupla ipſius D ℞, & connectatur E T; quadratum igitur F T quadruplum erit quadrati D ℞ vel rectanguli F D A. Deinde fiat vt F G ad F D, ita F E ad aliam, quæ ſit F R. eaque duplicetur in X, & in E X deſcribatur ſemicirculus, in quo accommodetur recta E C æqualis E T; quam demonſtrabimus minorem eſſe diametro E X, & connectatur X C, & centro X in- D

ter-

A teruallo X C deſcribatur circulus ſecans diametrum E X in Y; productam vero in S; termini igitur de quibus in Æquatione explicabilis eſt A ſunt E S maior, E y minor.

Deeſt aliquid non ad demonſtrationem Problematis, ſed ad Reſolutionem; quia vnus ex terminis Reſolutionis aſsignatis in Poriſmate debet aſſumi, non alius: vel cur vnus debeat aſſumi, & non alius.

Producatur autem E F in M, vt ſit E M æqualis E S, & ſecetur F M bifariam, & ad rectos angulos à recta H O V, & fiat O V æqualis F D, quam oſtendam minorem eſſe recta E O. ergo angulus O V E maior erit angulo O E V. fiat igitur angulo O V E æqualis angulus V e H, & recta e H ſecet rectam O H in H, & connectatur F H; triangulum igitur conſtructum eſt B H e f, cuius baſis eſt data e F; crus vero H e ſuperat perpendicularem H O exceſſu O V, æquali ipſi F D datæ; ſunt enim æquales H e, H V, propter æqualitatẽ angulorũ H e V, H V e. ſupereſt igitur vt crus H F excedat perpendicularem H O exceſſu æquali datæ D G. id autem repetitis reſolutionis veſtigijs ita fit manifeſtum.

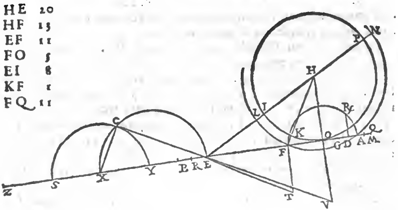
Centro H interuallo H O deſcribatur circulus O k, I P ſecans crura H F, H e in punctis k I, & producatur e H vltra circumferentiam circuli K I P ſecans eam in P, & fiat P N æqualis G D, cui æqualis ſumatur quoque I L. ergo reliqua L e æqualis erit reliquæ G F. ſumatur quoque F Q æqualis F e, & x Z æqualis x e. erit igitur Z Q dupla ipſius x f, & conſequenter quadrupla ipſius f R cum ſit f x dupla ipſius f R, ex conſtructione.

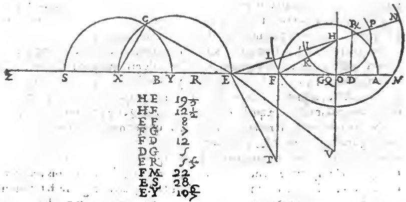
C Et quoniam rectus eſt angulus x C e in ſemicirculo, recta C e tangit circulum y C S; quare rectangulum y e S * æquale erit quadrato C e, vel e T ſeu quadratis e F, f T. ſed rectangulum y e S, vel Z S e æquale eſt rectangulo y e S, Z S e, æquale eſt rectangulo Z e S minus quadrato e S; ipſum autem rectangulum Z e S, æquale eſt rectangulo Z Q, e S, minus rectangulo Q e S. hoc eſt æquale eſt rectangulo f R, e S quater minus rectangulo f e S bis, ergo rectangulum f R, e S quater, minus rectangulo f e S bis & minus quadrato e S, æquale erit quadrato e f, plus quadrato f T, hoc eſt plus rectangulo f D A quater. addatur vtrobique rectangulum f e S bis, & quadratum e S. anferatur autem rectangulum f D A quater. ergo rectangulum f R, e S quater, minus rectangulo f D A quater; æquale erit quadratis e f, D e S, & rectangulo f e S bis, hoc eſt * æquale erit quadrato f S; vel quadrato e O quater; recta enim f S dupla eſt rectæ e O, cum ſit ipſa f S æqualis compoſitæ ex M e, & f e ſunt enim æquales e S, e M, ex conſtructione. Cum igitur quadruplum æquale ſit quadruplo, erit & ſimplum æquale ſimplo. hoc eſt rectangulum f R, e S, vel f R, e M, minus rectangulo f D A, æquale erit quadrato e O, ſed quadrato e O æquale eſt rectangulum I e P, hoc eſt rectangulum I e N, minus rectangulo e I, P N, vel minus rectangulo e I L; ergo rectangulum f R, e M, minus rectangulo f D A, vel minus rectangulo e I L; æquale erit rectangulo I e N, minus rectangulo e I L; addito communi rectangulo e I L, rectangulum f R, e M, æquale

erit

[Margin notes: 15 tertii; 4 ſecundi]

erit rectangulo I e N. vt *igitur e M ad e N, ita erit e I ad f R. ſed cum ſit A vt F G ad F D: hoc eſt vt E L ad E I, ita F E ad F R; eſt quoque permutando, vt E L ad E F, ita E I ad F R; ergo vt E M ad E N, ita erit E L ad e F





quare rectangulum F E N ſub extremis æquale erit rectangulo L e N ſub B medijs. puncta igitur L F, M N in circulo erunt, cuius quidem circuli centrum eſt in recta H V, ſecante rectam F M bifariam, & ad rectos angulos in O atque ipſa V H ſecat rectam N L bifariam in H, cum ſint æquales N P, I L, ex conſtructione, & æquales P H, H I, vt ſemidiametri, eamque ſecat non ad rectos angulos; ergo ex præmiſſo Lemmate punctum H erit centrum circuli L F, M N, atque adeo idem, quod centrum circuli I O P. vnde æquales erunt H F, N L: ſunt autem æquales & H K, H I. ergo & reliqua k F, ideſt exceſſus, quo crus H F ſuperat H O altitudinem trianguli; reliquæ I L, hoc eſt D G datæ, æqualis erit. Ad datam igitur baſim E F

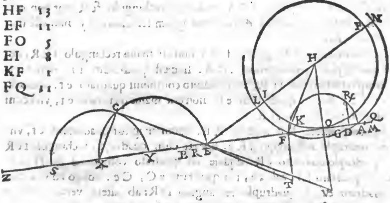
con-

A conſtitutum eſt triangulum H E F, cuius crura H E, H f ſuperant altitudinem H O exceſsibus æqualibus datis, f D, D G. quod facere oportebat.

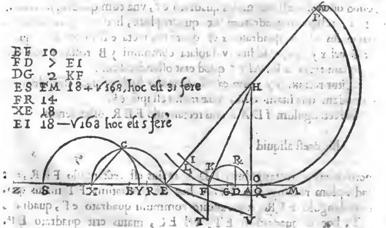
At vero rectam E T minorem eſſe diametro E x. ſic demonſtrabimus.

Quoniã enim eſt vt f G ad f D, ita f E ad f R, ex conſtructione, erit per diuiſionem rationis, vt f G ad G D, ita fe ad E R: ſed f G minor eſt quam f E, ex determinatione ergo & G D minor erit, quam E R. atque adeo tota f D minor quam tota f R. quare & rectangulũ f D G, vel f D A, minus erit rectangulo f R E, & conſequenter rectangulum F D A quater minus erit rectangulo F R E quater, atque addito communi quadrato E F, quadratum E F, vna cum rectangulo F D A quater, hoc eſt cum quadrato F T, ſeu quod idem eſt quadratum e T minus erit quadrato F E, vna cum rectangulo F R E quater,
B hoc eſt minus, erit quadrato compoſitæ ex f R, R E, hoc eſt quadrato x e; ſunt enim æquales F R, R x ex conſtructione; quare & recta E T minor erit, quam recta x E, quod erat oſtendendum.

HE 20
HF 13
EF 11
FO 5
EI 8
KF 1
FQ 11



EF 10
FD > EI
DG 2 KF
ES FM 18 + √168, hoc eſt 31 ſere
FR 14
XE 18
EI 18 — √168 hoc eſt 5 ſere



Æque

Æque rectam f D minorem eſſe recta E O, hoc modo oſtendemus. A

Quoniam enim rectangulum f D A quater, æquale eſt quadrato F T, vt demonſtrauimus, quadratum autem f G minus eſt quadrato E f, cum recta f G minor ſit, quam recta e f ex determinatione. ergo rectangulum f D A
8 ſ.condi quater, vnà cum quadrato f G; hoc eſt quadratum f A minus erit quadratis f T, f e, hoc eſt quadrato e T. quare & recta f A minor erit quam recta e T, vel e C. & conſequenter multo minor, quam E x. atque multo minor quã e S, vel e M. ſed & f G minor eſt quam e f ex determinatione. ergo compoſita ex A f, f G minor erit, quam compoſita ex M e, e f ſed compoſita ex
Coro.1.prob. 1.lib.1 A f, f G dupla * eſt ipſius f D; compoſita vero ex M e, e f dupla ipſius e O. ergo dupla f D minor erit, quam dupla e O. & ſimpla f D, minor quam ſimpla e O. quod erat oſtendendum. B

Nunc oſtendemus e y terminum minorem è duobus e y, e S, de quibus in Æquatione eſt explicabilis, non eſſe idoneum ad indicandam e M quæſitam.

Aut enim rectangulum f D A maius eſt rectangulo fe R, aut non maius. ſit primum non maius. oſtendemus ipſum terminum e y non eſſe maiorem data baſe e f.

Quoniam enim rectangulum f D A non eſt maius rectangulo f E R, neque quadruplum rectangulum f D A, hoc eſt quadratum f T. maius erit quadruplo rectangulo fe R, atque addito communi quadrato e f, quadrata e f, f T, hoc eſt quadratum e C non erit maius quadrato e f, vna cum quadruplo rectangulo fe R. C

Sumatur autem R B æqualis R E. quoniam igitur quadratum e f, vna cum quadruplo rectangulo f R e, hoc eſt cum quadruplo rectangulo f e R
8 ſecundi & quadruplo quadrato e R * æquale eſt quadrato compoſitæ ex f r, r e. hoc eſt quadrato f B, vel x e, ſeu quadratis x C, C e. ablato ab vna parte quadrato e f, & quadruplo rectangulo fe R: ab altera vero quadrato C e, quod oſtenſum eſt non maius quadrato e f, vna cum quadruplo rectangulo fe r, reliquum quadratum e r quadruplum, hoc eſt quadratum e B non erit maius reliquo quadrato x C. quare nec recta e B maior erit, quam recta x C vel x y. atque addita, vel ablata communi y B recta e y non erit maior, quam recta x B, vel e f quod erat oſtendendum.

Patet igitur rectam e y, cum ea non ſit maior baſe e f, non eſſe idoneam D ad indicandam quæſitam e M, quæ maior eſt ipſa e f.

Sed ſit rectangulum f D A maius rectangulo F E R oſtendemus.

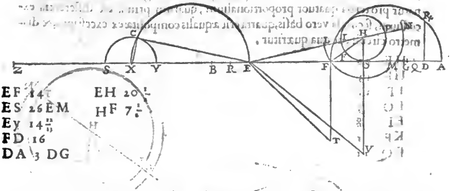
hic deeſt aliquid

Quoniam enim rectangnlnm F D A maius eſt rectangulo F E R, erit & quadruplum rectangulum F D A hoc eſt quadratum F T maius quadruplo rectangulo F E R, atque addito communi quadrato e F, quadrata F F, F T, hoc eſt quadratum E T, vel E C, maius erit quadrato E F,

vna

A vna cum quadruplo rectangulo F E R.

Et quoniam quadratum E F vna cum quadruplo rectangulo F E R, hoc eſt cum quadruplo rectangulo F E R, & quadruplo quadrato E R, æquale eſt quadrato compoſitæ ex f R, R E, hoc eſt quadrato X E, ſeu quadratis ſecundi



X C, C E, ablato ab vna parte quadrato E f, & quadruplo rectangulo f E R, ab altera vero quadrato C E, quod oſtenſum eſt maius quadrato E f, vna cum quadruplo rectangulo f E R, reliquum quadratum E R quadruplum

B hoc eſt quadratum E B, maius erit reliquo quadrato X C. quare & recta E B maior erit, quam recta X C, vel X y. atque ablata vel addita communi y B recta E y maior erit, quam X B vel E f.

hic deeſt aliquid

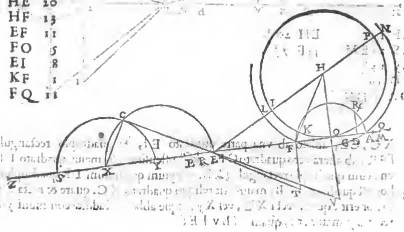
Ex hac ſecundi Caſus conſtructione alia colligitur ratio inueniendi diametrum terræ, eaque ita ſe habet. Diſtantia inter locum in altiori monte ſumptum, & ſummitatem montis depreſsionis, per quam ab ipſo loco viſus menſoris extenditur ad circulum orizontalem, ideſt linea recta tangens ſuperficiem maris interiecta inter locum in altiori monte ſumptum, & ſummitatem montis depreſsionis, intelligatur baſis trianguli verticem ha-

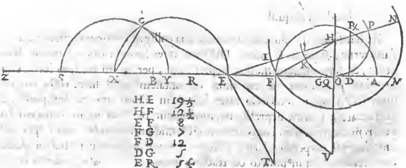
C bentis in centro terræ, cuius altitudo eſt ſemidiameter terræ. nam ipſa altitudo hoc eſt perpendicularis è vertice trianguli ducta occurrit baſi productæ extra triangulum in puncto contractus, in quo ſcilicet baſis producta tangit ſuperficiem maris; altitudo vero loci, quod in altiori monte ſumpſimus, hoc eſt perpendiculum ab eo loco vſque ad ſuperficiem maris, intelligatur exceſſus, quo crus maius trianguli ſuperat eius altitudinem, altitudo autem montis depreſsionis nempe perpendiculum ab eius apice, vſque ad ſuperficiem maris intelligatur exceſſus, quo crus minus trianguli ſuperat eius altitudinem, & ſic ex data baſe, & huiuſmodi exceſsibus dabitur triangulum; quare & eius altitudo, hoc eſt ſemidiameter terræ.

Ratio igitur inueniendi diametrum terræ hæc erit. A

Fiat vt differentia exceſſuum ad exceſſum maiorem, ita baſis ad aliam rectam; differentia autem qua dupla ea recta ſuperat baſim aucta longitudine rectæ, cuius quadratum æquale eſt exceſſui, quo quadratum eiuſdem differentiæ ſuperat quadratum baſis, & quadruplum rectangulum ſub exceſsibus; ponatur pro tertia quatuor proportionalium, quarum prima eſt differentia exceſſuum, ſecunda vero baſis, quarta erit æqualis compoſitæ ex exceſsibus, & diametro circuli, de qua quæritur.

HE	20
HF	13
EF	11
FO	5
EI	8
KF	1
FQ	11





HE	$19\frac{1}{5}$
HF	$12\frac{1}{2}$
EF	8
FG	7
FD	12
DG	5
ER	$5\frac{5}{7}$
FM	22
ES	28
EY	$10\frac{5}{7}$

Eſt enim ex cõſtructione vt E G ad F D; hoc eſt vt E L ad E I, ita F e ad f R, B
cuius dupla eſt f X: differentia autem qua ipſa x F ſuperat baſim E F eſt X E: huius quadratum excedit quadratum C E quadrato X C: quadratum autẽ C E, vel E T æquale eſt quadrato E F, E T; hoc eſt quadrato e F, & quadruplo rectangulo

A gulo F D G, vel E I L. itaque quadratum X C eſt exceſſus, quo quadratum X E ſuperat quadratum E F, & quadruplum rectangulum E I L; recta autem E S compoſitæ ex E X, & X S æquali X C, facta eſt æqualis E M compoſita ex E F, & dupla F O, hoc eſt ex baſe, & dupla continuatione baſis, vſque ad perpendicularem; quam quidem E M ponendam eſſe diximus pro tertia quatuor proportionalium, quarum prima eſt E L differentia exceſſuum E I, F K. ſecunda vero baſis E F, quartam autem futuram eſſe diximus æqualem compoſitæ ex exceſsibus, & diametro circuli, de qua quæritur. quod quidem verum eſt. nam vt E L ad E F, ita eſt E M ad E N compoſitam ex exceſsibus E I, P N, & diametro I P.

In numeris ſit data baſis trianguli E F 4; exceſſus vero E I 3; exceſſus autem
B tem F K 1. Fiat vt 2 differentia videlicet exceſſuum ad 3 exceſſum maiorem, ita 4 nempe baſis, ad aliam rectam. ea erit 6, eius dupla 12, differentia autem inter 12, & 4 eſt 8. huic addatur 6. nempe recta cuius quadratum æquale eſt exceſſui, quo quadratum ex 8 ſuperat quadratum ex 4, & quadruplum eius, quod fit ex 3, & 1. hoc eſt ex exceſsibus, fiet 14. pro recta E M compoſita ex baſe E F, & dupla F O continuatione baſis, vſque ad perpendicularem O H. hæc compoſita ponenda eſt pro tertia quatuor proportionalium, quarum prima eſt 2 nempe differentia exceſſuum 3, & 1, ſecunda vero 4, id eſt baſis, quarta erit 28 compoſita ex exceſsibus, & diametro quæſita, à qua compoſita ſi auferantur exceſſus nempe 3, & 1 remanebunt 24 pro diametro circuli, de qua quæritur.

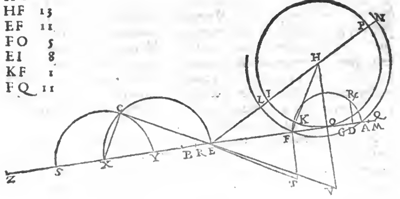
C Aliter eandem diametrum terræ inueniemus in hunc modum.

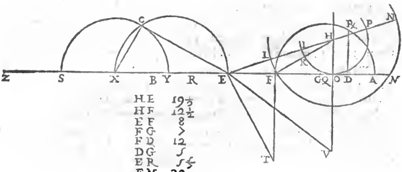
Fiat vt differentia exceſſuum ad exceſſum maiorem, ita baſis ad aliam rectam; differentia autem, qua dupla ea recta inuenta ſuperat baſim aucta longitudine rectæ, cuius quadratum æquale eſt exceſſui, quo quadruplum rectangulum ſub recta inuenta, & differentia ipſius inuentæ, & baſis, ſuperat quadruplum rectangulum ſub exceſsibus. ponatur pro tertia quatuor proportionalium, quarum prima eſt differentia exceſſuum, ſecunda vero baſis, quarta erit compoſita ex exceſsibus, & diametro quæſita.

Neque hæc ratio conueniendi diametrum terræ diſsimilis eſt ab ea, quæ ſupra expoſita eſt ratione. Nam recta, cuius quadratum æquale eſt exceſſui, quo quadruplum rectangulum f R E ſub recta inuenta f R, & R E
D differentia ipſius f R, & baſis E f, ſuperat quadruplum rectangulum E I L ſub exceſsibus, eadem eſt, quæ recta, cuius quadratum æquale eſt exceſſui, quo quadratum X e ſuperat quadratum baſis e F, & quadruplum rectangulum e I L. Quadruplum enim rectangulum f R e ſuperat quadruplum rectangulum e I L eodem exceſſu. nempe quadrato X C, quo etiam quadratum X e ſuperat quadratum e f, & quadruplum rectangulum e I L, idque ſic demonſtrabitur.

Quoniam enim quadratum X e ſuperat quadratum C e, vel e T, ſeu quadrata e f, f T quadrato X C, quadratum autem f T, æquale eſt quadruplo rectangulo f D G; vel e I L. ergo ipſum quadratum x e ſuperabit

HE	20
HF	13
EF	11
FO	5
EI	8
KF	1
FQ	11





HE	19 1/5
HF	12 1/2
EF	8
FG	7
FD	12
DG	5
ER	5 4/5
FM	22
ES	28
EY	10 6/7

bit quadratum e f, & quadruplum rectangulum e I L quadrato x C. **A**

Et quoniam quadruplum rectangulum F R E vna cum quadrato E F, æquale eſt quadrato compoſitæ ex F R, R E, hoc eſt quadrato x E, quod quidem quadratum, ſuperat quadratum E F, & quadruplum rectangulũ E I L, quadrato x C vt demonſtraui. ergo & quadruplum rectangulũ f R E, vna cũ quadrato E F ſuperabit quadratum E F, & quadruplũ rectangulum E I L eodem quadrato x C. auferatur commune quadratum E F. ergo quadruplũ rectangulum F R E itidem ſuperabit quadruplum rectangulum E I L quadrato x C. ſed & quadratum x E ſuperat quadratum E F, & quadruplũ rectangulum E I L quadrato x C, vt demonſtrauimus; ergo quadruplum rectangulum F R E ſuperat quadruplum rectangulum E I L eodem exceſſu, quo quadratum x E ſuperat quadratum E F, & quadruplum rectangulum e I L. quod erat oſtendendum. **B**

Sit

A Sit vt prius data trianguli baſis 4, exceſſus verò maior 3. exceſſus autem minor 1 fiat vt 2 differentia exceſſuum ad 3 exceſſum maiorem, ita 4 nempe baſis ad aliam rectam. ea erit 6. eius dupla 12 differentia autem inter 12, & 4 eſt 8. huic addatur 6 nempe recta, cuius quadratum æquale eſt exceſſui, quo quadruplum rectangulum ſub 6, & 2, hoc eſt ſub recta inuenta, & differentia eiuſdem inuentæ, & baſis ſuperat quadruplum rectangulum ſub 3 & 1, hoc eſt ſub exceſsibus. & fiet 14 pro tertia quatuor proportionalium, quarum prima eſt 2, ſecunda vero 4, quarta erit 28 compoſita ex exceſsibus, & diametro quæſita, ablatis igitur exceſsibus 3 & 1, remanebit ipſa diameter 24.

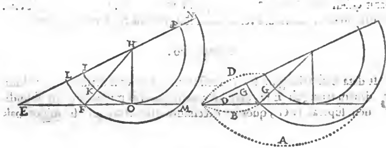
Alia via eundem Caſum Problematis & reſoluam, & componam.

B

Alia Reſolutio ſecundi Caſus.

Sit data baſis trianguli, vt in antecedenti Reſolutione B. exceſſus vero, quo crus maius ſuperat altitudinem trianguli D, exceſſus autem, quo crus minus eandem altitudinem ſuperat G. Oportet inuenire triangulũ.

C



Factum iam ſit, & reſumantur antecedentis Reſolutionis figuræ, & quæratur vt prius E M compoſita ex baſe E F, & dupla F O continuatione baſis. eſto illa A, ergo A -- B erit ipſa F M, & per conſequens ipſa F O erit A $\frac{1}{2}$ -- B $\frac{1}{2}$

D Et quoniam rectangulum L E N æquale eſt rectangulo F E M; erit vt L e ad E f, ita E M ad E N. hoc eſt in figura ad reſolutionis, vt D -- G ad B, ita A ad $\frac{b \text{ in } a}{d\text{-}G}$. itaque $\frac{b \text{ in } a}{d\text{-}g}$ -- D.

Producatur autem F H vſque ad circumferentiam I O P in Z: erit F Z æqualis I N, atque adeo ipſa F z erit $\frac{b \text{ in } a}{d\text{-}g}$ -- D.

Et quoniam rectangulum K F L * æquale eſt quadrato F O, hoc eſt rectangulum ſub G, & $\frac{b \text{ in } a}{d\text{-}g}$ -- D æquale quadrato ex A $\frac{1}{2}$ -- B $\frac{1}{2}$.

$\frac{g \text{ in } b \text{ in } a}{d\text{-}g}$ -- G in D æquabitur A Q $\frac{1}{4}$ + B Q $\frac{1}{4}$ -- B in A $\frac{1}{2}$.

Quadruplicentur omnia, vt Poteſtas æquationis integra fiat, ergo

$\frac{g \text{ in } b \text{ in } a\ 4}{d\text{-}g}$ -- G in D 4 æquabitur A Q + B Q -- B in A 2.

Addatur vtrique parti G in D 4. & B in A 2, auferatur autem A Q: vt cognita ab incognitis ſeparentur, ergo A

$\frac{g \text{ in } b \text{ in } a\,4}{d \text{-} g}$ ✣ B in A 2 — A Q æquabitur B Q ✣ G in D 4.

Et vt æquatio facilius explicetur, tranſmutetur fractio $\frac{g \text{ in } b}{d \text{-} g}$ in integrã magnitudinẽ; ea eſto F. nam ſi fiat vt D — G ad G, ita B ad aliã, quæ ſit F. erit F eadem quæ $\frac{g \text{ in } b}{d \text{ in } g}$. atq; adeo planum F in A 4 idem erit, quod planũ $\frac{g \text{ in } b \text{ in } a\,4}{d \text{-} g}$. tranſmutata igitur fractione in magnitudinem integram.

F in A 4 ✣ B in A 2 -- A Q, æquabitur B Q † G in D 4.

Seu quod idem eſt F 4 † B 2 in A -- A Q æquabitur BQ † G in D 4.

Et explicata Æquatione.

F 2 † B ✣ L. V. (F 2 † B Q = B Q - G in D 4) æquabitur A.

Vel F 2 † B - L. V. (F 2 ✣ B Q - B Q - G in D 4) æquabitur A. B

In hac Æquatione A explicabilis eſt de duobus terminis, ſed maior.

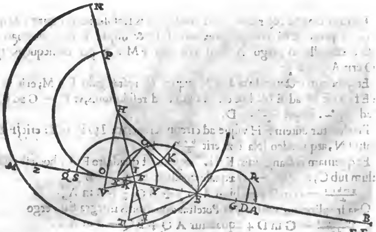
Poriſma.

Fiat vt differentia exceſſuum ad exceſſum minorem, ita baſis ad aliam rectam; compoſita autem ex dupla ea recta, & baſe, aucta longitudine rectæ cuius quadratum æquale eſt exceſſui, quo quadratum eiuſdem compoſitæ ſuperat quadratum baſis, & quadruplum rectangulum ſub exceſsibus, fiet terminus maior. contracta vero eadem longitudine fiet terminus minor.

Compoſitio.

C

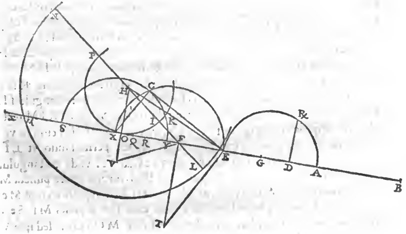
SIt data baſis trianguli E F; exceſſus verò, quo crus maius ſuperat altitudinem trianguli E D, exceſſus autem quo crus minus eandem altitudinem ſuperat D G, quorum exceſſuum differentiã E G ſit minor baſe



E F.

A EF. Oportet inuenire triangulum. Producatur ED in A, vt ſit DA æqualis DG, & in ipſa EA deſcribatur ſemicirculus, quem ducta ex D perpendicularis D℞ ſecet in ℞. ex puncto autem F demittatur perpendicularis FT dupla ipſius D℞, & connectatur ET, quadratum igitur FT quadruplum erit quadrati D℞, vel rectanguli EDA. Deinde fiat vt EG ad GD, ita EF ad aliam, quæ ſit FR, eaque duplicetur in X, & in EX deſcribatur ſemicirculus, in quo accommodetur recta EC æqualis ET, quam demonſtrabimus minorem eſſe diametro EX, & connectatur XC. & centro X interuallo XC. deſcribatur circulus ſecans diametrum EX in y; productam vero in S. Termini igitur, de quibus A in Æquatione explicabilis eſt ſunt ES maior, Ey minor.

B Secetur SF bifariam in O, per quod punctum ducatur ad rectos angulos recta HOV, & fiat OV æqualis DG, quam demonſtrabimus mi-

C 

norem eſſe recta OF, & connectatur VF, angulus igitur OVF maior erit angulo OFV, fiat angulo OVF æqualis angulus VFH occurrens recta FH rectæ OH in H, & connectatur EH. Triangulum igitur conſtructum eſt HEF, cuius baſis eſt data EF; crus vero HF excedit altitudinem trianguli HO exceſſu OV æquali ipſi DG datæ; ſunt enim æquales HF, HV propter æqualitatem triangulorum HFV, HVF. ſupereſt igitur, vt crus HE excedat altitudinem HO exceſſu æquali datæ ED. id autem ita fit manifeſtum.

D Centro H interuallo HO deſcribatur circulus OI, kP, ſecans crura HF, HE in punctis I, K, & producatur Fk ſecans circumferentiam in P, vt ſit PN æqualis ED, cui æqualis ſumatur quoque IL; ergo cum ſit IL æqualis ED, & If æqualis DG, erit & reliqua fL æqualis reliquæ EG.

E G. Producatur quoque E S in Z, vt ſit X Z æqualis X E, & ſumatur F Q A
æqualis F E, atque F M æqualis S E. Quoniam igitur X E ſuperat F E exceſ-
ſu X F, dupla X E, hoc eſt Z E ſuperabit duplam F E, quæ eſt Q E duplo ex-
ceſſu X F; ſed Z E ſuperat Q E exceſſu Z Q, ergo Z Q dupla erit ipſius x F,
& conſequenter quadrupla rectæ R F.

Et quoniam rectus eſt angulus X C E in ſemicirculo, recta C E tangit
circulum Y C S. quare rectangulum Y E S, æquale erit quadrato C E, vel
E T, ſeu quadratis E F, F T: ſed rectangulum Y E S, vel Z S E æquale eſt re-
ctangulo Z E S, minus quadrato e S; rectangulum autem Z e S, æquale eſt re-
ctangulis Z Q, e S, & Q e S, hoc eſt rectangulo R F, e S quater, & rectangulo
f e S bis: Z Q enim oſtenſa eſt quadrupla ipſius R f, Q e autem dupla eſt ipſius
f e, ex conſtructione. ergo rectangulum f R, e S quater, plus rectangulo f e S B
bis, minus quadrato e S, æquale erit quadrato f e, plus quadrato f T, hoc eſt
plus rectangulo e D A quater; addatur vtrobique quadratum e S, auferatur au-
tem rectangulum f e S bis, & rectangulum e D A quater. ergo rectangulum
f R, e S quater, minus rectangulo e D A quater, æquale erit quadratis f e, e S, mi
nus rectangulo f e S bis, hoc eſt æquale erit quadrato f S, vel quadrato f O qua-
ter. quare & ſimplum æquale erit ſimplo, hoc eſt rectangulum R f, e S, mi-
nus rectangulo e D A, vel minus rectangulo L I f, æquale erit quadrato f O;
ſed quadratum f O æquale eſt rectangulo I f P. hoc eſt rectangulo I f N, minus
rectangulo I f, N P, vel minus rectangulo f I L. ergo rectangulum R f, e S,
minus rectangulo f I L, æquale erit rectangulo I f N minus rectangulo f I L,
addito communi rectangulo f I L, rectangulum f R, e S, hoc eſt R f M rectan- C
gulo I f N, æquale erit. vt igitur f M ad f N. ita erit f I ad f R. ſed cum ſit vt e G
ad G D, hoc eſt vt L f ad f I, ita e f ad f R; eſt quoque permutando vt L f ad
f e, ita f I ad f R. ergo vt f M ad f N. ita erit f L ad f e. vnde rectangulum
M f e ſub extremis æquale erit rectãgulo N f L ſub medijs. quare puncta M L
e N in circulo erunt, cuius centrum eſt in recta H V ſecante rectam M e ad
rectos angulos in O, atque bifariam. nam cum ſint æquales M f, S e ab-
latis æqualibus O f, O S, fiunt æquales & reliquæ M O, O e. ſed ipſa V H
ſecat quoque rectam N L bifariam in H, cum ſint æquales N P, I L, ex
conſtructione, & æquales P H, H I, vt ſemidiametri, eamque ſecat non ad
rectos angulos. ergo ex Lemmate huic Problemati præmiſſo punctum H erit
centrum circuli M L, e N; idemque quod centrum circuli O I, K P; atque D
adeo æquales erunt H e, H L; ſunt autem æquales & H k, H I, ergo & reli-
qua K e reliquæ I L, hoc eſt e D æqualis erit, quod erat oſtendendum. Ad
datam igitur baſim e f conſtitutum eſt triangulum H e f, cuius crura H e
H f ſuperant altitudinem H O exceſſibus K e, I f æqualibus datis e D, D G.
quod erat faciendum.

At vero rectam e T minorem eſſe diametro e X, ita oſtendemus.

Quoniam enim eſt, vt e G ad G D, ita e f ad f R, ex conſtructione; & e G
minor, quàm e f ex determinatione erit & G D minor, quàm f R. atq; tota
e D minor quam tota e R. vnde & rectangulum e D G, vel e D A minus erit

re-

A reƈtangulo E R f, & conſequenter quadruplum reƈtangulum E D A, hoc eſt quadratum f T, minus erit quadruplo reƈtangulo E R f. atque addito vtrique parti quadrato f E, quadrata f T, f E, hoc * eſt quadratum E T, minus erit quadruplo reƈtangulo E R f, vnà cum quadrato E f, hoc * eſt, minus erit quadrato compoſitæ ex e R, R f, ideſt quadrato E X. quare & recta E T minor erit, quam recta E X, quod erat oſtendendum. 47 primi 8 ſecundi

Item rectam D G minorem eſſe, quam O f. ſic demonſtrabitur.

Quoniam enim reƈtangulum E D A quater, æquale eſt quadrato f T; quadratum autem E G, minus eſt quadrato e f, cum recta e G minor ſit, quam recta e f, ex determinatione. ergo reƈtangulum e D A quater, vnà cum quadrato e G, hoc * eſt quadratum e A minus erit quadratis f T, f e. ibid.

B hoc eſt quadrato e T. quare & recta e A minor erit, quàm recta e T, vel e C, & conſequenter multo minor, quàm e X. atque multo minor quam e S. ſed & e G minor erit quam e f ex determinatione, ergo compoſita ex e A, e G, * hoc eſt dupla e D, minor erit, quàm compoſita ex e S, e f, hoc eſt, quàm dupla e O, quare & ſimpla e D minor erit, quam ſimpla e O. Coroll. 1. prob. 1. lib. 1.

Fiat vt e G ad e f, ita e S ad aliam, quæ ſit e B, ſed e G minor eſt, quàm e f ex determinatione. ergo & e S minor erit quam e B, ſed e D oſtenſa eſt minor, quàm e O, ergo reliqua D B maior erit, quam reliqua O S, vel O f.

Et quoniam eſt vt e G ad G D, ita e f ad f R, ex conſtruƈtione, erit permutando vt e G ad e f, ita G D ad f R, ſed vt e G ad e f, ita eſt quoque e S

C ad e B. ergo vt G D ad f R, ita erit e S ad e B, vnde reƈtangulum ſub extremis G D, e B æquale erit reƈtangulo ſub medijs f R, e S, ſed reƈtangulum f R, e S, minus reƈtangulo e D A, vel e D G oſtenſum eſt in demonſtratione Problematis æquale quadrato f O. ergo & reƈtangulum G D, e B, minus reƈtangulo e D G, hoc eſt reƈtangulum G D B, æquale erit quadrato f O. ſed D B oſtenſa eſt maior, quam f O, ergo G D minor erit, quam ipſa f O, quod erat oſtendendum.

Finis Libri Quarti.

Digitized by Google

MARINI GHETALDI

DE RESOLVTIONE ET COMPOSITIONE MATHEMATICA,

LIBER QVINTVS.

HIC liber in quatuor capita diuiditur, quorum primo continentur Problemata, quæ conſtructione operaria non egent, A ſed ſolum poſtulant, vt quæſitum numero explicetur. Secundo vero continentur Problemata impoſſibilia, ex quorum Reſolutionibus cognoſcitur eorum impoſſibilitas. Tertio autem continentur Problemata vana, ſeu nugatoria, quorum Reſolutiones indicant talia eſſe Problemata. Quarto denique continentur Problemata, quæ ſub Algebram non cadunt, eaque reſoluuntur, & componuntur Methodo, qua antiqui vtebantur.

De Problematibus quæ conſtructione operaria non egent, ſed ſolum poſtulant vt quæſitum numero explicetur. B
Caput primum.

PRoblemata quæ conſtructione operaria non egent, ſed poſtulant quæſitum numero exhiberi, reſoluuntur eadem ratione, qua Problemata conſtructionem operariam requirentia; verum Poriſmata ex eorum Reſolutionibus deducta in formam Theorematis proponuntur, eorumque demonſtratio procedit per veſtigia Reſolutionis, directo tamen ordine, vt in fine libri primi monuimus, quæ quidem Theoremata ſuggerunt rationem conſtruendi ipſa Problemata, hoc eſt explicandi numero id quod quæritur.

Pro-

A Problema primum.

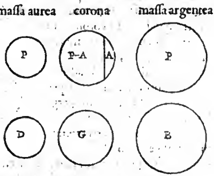
Quomodo Archimedes portionem argenti aureæ coronæ permixtam inuenerit.

REfert Vitruuius lib. 9. cap. 3 his verbis. Archimedem duas feciſſe maſſas æquo pondere, quo etiam fuerat corona, vna ex auro alteram ex argento. cum ita feciſſet, vas amplum ad ſumma labra impleuit aqua, in quo demiſit argenteam maſſam, cuius quanta magnitudo in vaſe depreſſa eſt, tantum aquæ effluxit. ita exempta maſſa quanto minus factum fuerat refudit ſextario menſus, vt eodem modo quo prius fuerat ad labra æquaretur. ita ex eo inuenit quantum ad certum pondus argenti certa aquæ men-
B ſura reſponderet. Cum id expertus eſſet, tum auream maſſam ſimiliter pleno vaſe demiſit, & ea exempta, eadem ratione menſura addita inuenit ex aqua non tantum defluxiſſe, ſed tanto minus, quanto minus magno corpore eodem pondere auri maſſa eſſet quam argenti. Poſtea vero repleto vaſe in eadem aqua ipſa corona demiſſa, inuenit plus aquæ defluxiſſe in coronam, quam in auream eodem pondere maſſam & ita ex eo quod plus defluxerat aquæ in corona quam in maſſa ratiocinatus, deprehendit argenti in auro mixtionem, & manifeſtum furtum redemptionis.

Sed qua ratiocinatione Archimedes id furtum deprehenderit Reſolutio docebit.

C Reſolutio.

COronæ, quæ conſtat ex auro, & argento ſit pondus P, pondus autem argenti quod eſt in ea eſto A. ergo P - A erit pondus auri.



Deinde ſumantur duæ maſſæ eiuſdem ponderis cum corona, vna ex auro altera ex argento, & demittatur in aliquod vas aqua plenum aurea maſſa. ea eijciet è vaſe tantum aquæ, quanta eſt eius
D moles, ſit igitur menſura aquæ eiectæ, ſeu moles aureæ maſſæ D, ſimiliter demittatur, & maſſa argentea eijciens tantum aquæ, quanta eſt moles ipſius maſsæ, cuius quidem aquæ menſura ſeu moles maſſæ argentea ſit B. atque eodem modo, demiſſa corona, effluet tantum aquæ quanta eſt moles ipſius coronæ, ſit igitur menſura ipſius aquæ ſeu moles coronæ G. Quoniam igitur eſt vt P ad A, ita B ad $\frac{b \text{ in } a}{p}$, hoc eſt vt Pondus maſſæ argenteæ, ad pondus argenti, quod eſt in corona, ita moles eiuſdem maſ-

ſæ

ſæ ad molem eiuſdem argenti, corpora enim eiuſdem generis eamdem rationem habent in pondere quam in mole, vt demonſtrauimus in noſtro Archimede promoto, ergo $\frac{b \text{ in } a}{p}$ erit moles argenti, quod eſt in corona, ſeu menſura aquæ mole æqualis ipſi argento. A

Æque quoniam eſt vt B ad P — A, ita D ad $\frac{d \text{ in } p - d \text{ in } a}{p}$ hoc eſt vt pondus maſſæ aureæ ad pondus auri, quod eſt in corona, ita moles eiuſdem maſſæ ad molem eiuſdem auri, erit $\frac{d \text{ in } p - d \text{ in } a}{p}$ moles auri, quod eſt in corona, ſeu menſura aquæ, mole æqualis ipſi auro, ſed moles argenti eſt $\frac{b \text{ in } a}{p}$, ergo $\frac{d \text{ in } p - d \text{ in } a}{p}$ ✣ $\frac{b \text{ in } a}{p}$ erit moles totius coronæ, ſed moles coronæ eſt quoque G, ergo.

$\frac{d \text{ in } p - d \text{ in } A}{p}$ ✣ $\frac{b \text{ in } a}{p}$ æquabitur G

Ducantur omnia in P. ergo

D in P — D in A ✣ B in A æquabitur G in P B

Auferatur vtrimque D in P, vt cognita ab incognitis diſtinguantur ergo.

B in A -- D in A, æquabitur G in P -- D in P

Seu quod idem eſt B -- D in A æquabitur G -- D in P.

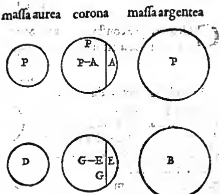
Et æqualitate ad proportionem reuocata, proportionales erunt.

B -- D G -- D P A

Idem Problema aliter reſoluam

Reſolutio ſecunda.

Iſdem poſitis, menſura autem aquæ, mole æqualis argento quod eſt in corona eſto E. ergo G -- E erit menſura aquæ mole æqualis auro; ponitur enim G menſura aquæ mole æqualis toti coronæ. Et quoniam eſt vt pondus argenteæ maſſæ ad pondus argenti, quod eſt in corona. ita moles eiuſdem maſſæ ad molem eiuſdem argenti, erit C



vt P d A, ita B ad E

Sed factum ab extremis æquale eſt ei, quod fit à medijs, ergo

P in E æquabitur B in A D

Hæc omnia numeris tractantur, quippe & pondus, & moles numero exprimuntur. & quoniam eſt vt pondus aureæ maſſæ ad pondus auri, quod eſt in corona ita moles eiuſdem maſſæ ad molem eiuſdem auri erit.

vt P ad P — A, ita D ad G -- E

Quod autem fit ab extremis, æquale eſt ei quod fit à medijs ergo

G in P -- E in P æquabitur D in P -- D in A.

Sed oſtenſum eſt P in E æquari B in A. ergo per additionem æqualium æqualibus.

G in

A G in P — D in P æquabitur D in P — D in A

Sed oſtenſum eſt P in E æquari B in A, ergo per additionem æqualium æqualibus.

G in P æquabitur B in A + D in P -- D in A

Auferatur vtrimque D in P, vt cognita ab incognitis ſeparentur, ergo

G in P - D in P æquabitur B in A - D in A

Seu quod idem eſt G - D in P æquabitur B - D in A.

Et reuocata ad proportionem æqualitate, proportionales erunt

B - D   G - D   P   A.

Ea ipſa proportionalium ſeries, quæ per antecedentem reſolutionem inueniebatur.

B

Poriſma.

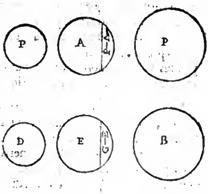
Vt differentia inter menſuram aquæ defluxæ in maſſa argentea, & menſuram aquæ defluxæ in maſſa aurea, ad differentiam menſuræ aquæ defluxæ in corona & aquæ defluxæ in maſſa aurea, ita eſt pondus coronę ad pondus argenti. quod eſt in corona.

Vel ſic. vt differentia inter moles maſſæ argenteæ, & maſſæ aureæ, ad differentiam inter moles coronæ, & maſſæ aureæ, ita eſt pondus coronæ, ad pondus argenti. quod eſt in corona.

Poriſma hoc poſtea in formam Theorematis vniuerſalius propoſitum demonſtrabimus.

C

Reſolutio tertia.



SEd quæratur pondus auri, quod eſt in corona; id eſto A. ergo pondus argenti erit P -- A. ſimiliter menſura aquę mole æqualis auro, quod eſt in corona, eſto E. ergo G — E, erit menſura aquę mole ęqualis argento. Et quoniam eſt vt pondus aureę maſſę ad pondus auri, quod
D eſt in corona, ita moles eiuſdem maſſę ad molem eiuſdem auri, erit.

vt P ad A ita D ad E.

Et factum ſub extremis æquale erit ei, quod fit ſub medijs, hoc eſt

P in E ęquabitur D in A

Æquę quoniam eſt vt pondus maſſę argenteę ad pondus argenti, quod eſt in corona, ita moles eiuſdem maſſę ad molem eiuſdem argenti, erit

vt P ad P -- A, ita B ad G -- E

Et factum ſub extremis ęquabitur facto ſub medijs, hoc eſt

Et factum ſub extremis æquabitur facto ſub medijs, hoc eſt A

G in P -- E in P æquabitur B in P -- in A

Sed oſtenſum eſt E in P æquari D in A, ergo per additionem æqualium æqualibus.

G in P æquabitur B in P + D in A -- B in A.

Hic non poteſt auferri vtrimque B in P. nam cum B maior ſit, quam G erit & B in P maius, quam G in P, ergo addatur vtrobique B in A & auferatur D in A. itaque

G in P † B in A -- D in A æquabitur B in P.

Auferatur quoque vtrinque G in P. ergo

B in A -- D in A æquabitur B in P -- G in P

Seu quod idem eſt B -- D in A æquabitur B -- G in P B

Et reuocata ad proportionem æqualitate erit

vt B -- D ad B -- G, ita P ad A

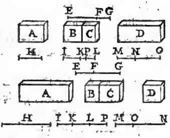
Poriſma.

Vt differentia inter moles maſſæ argenteæ, & maſſæ aureæ ad differentiam inter moles maſſæ argenteæ, & coronæ, ita eſt pondus coronæ ad pondus auri, quod eſt in corona.

Ex hoc Poriſmate, & ex præcedenti proponam Theorema vniuerſale quod eſt huiuſmodi.

Theorema. C

Si trium corporum æque ponderantium primum, & tertium fuerint generis diuerſi, ſecundi autem portio ſit eiuſdem generis cum corpore primo, reliqua vero eiuſdem generis cum corpore tertio. erit vt differentia inter moles primi, & tertij ad differentiam inter moles primi, & ſecundi, ita pondus vnius corporum, ad pondus portionis corporis ſecundi, quæ eſt eiuſdem generis cum corpore tertio.



D

Sint tria corpora æque ponderantia A, BC, D, quorum primum, & tertium ſint generis diuerſi; portio autem ſecundi vtpote B ſit eiuſdem generis, cum corpore A, reliqua vero portio C eiuſdem generis cum corpore D. Dico vt differentia inter moles corporum A, & D, ad differentiam inter moles corporum A, & BC, ita eſſe pondus vnius corporum ad pondus portionis C.

Sit enim portionis B pondus E F, portionis autem C pondus F G; ergo totius corporis BC, vel ipſius A, aut D pondus erit E G. Deinde corporis A, ſit moles H, portionis vero B moles

A I k; portionis autem C moles K L, corporis vero D moles M O.

Quoniam igitur eſt vt pondus corporis D ad pondus portionis C, hoc eſt vt
E G ad F G, ita moles ipſius D ad molem ipſius C hoc eſt ita M O ad K L,
corpora enim eiuſdem generis eamdem habent rationem in pondere, quam
in mole, vt eſt demonſtratum in noſtro Archimede promoto; quare quod fit
ab extremis E G, & k L, æquale erit ei quod fit à medijs F G, & M O.

Sumantur autem M N, I P. vtraque æqualis ipſi H. Quoniam igitur
eſt vt pondus corporis A, ad pondus portionis B, hoc eſt vt E G ad E F, ita
moles H ad molem I K; factum ab extremis E G, & I K æquale erit facto à
medijs E F, & H: vel & M N. ſed oſtenſum eſt id quod fit ex E G, & K L
æquale eſſe ei quod fit ex F G, & M O. ergo per additionem æqualium
B æqualibus, quod fit ex E G, & I K, vna cum eo quod ex E G, & k L: hoc
eſt id quod fit ex E G, & I L, æquale erit ei, quod fit ex E F, & M N, vna
cum eo quod ex F G, & M O. ſed quod fit ex E F, & M N, æquale eſt ei,
quod ex E G, & M N, minus eo quod ex F G, & M N. ergo quod fit
ex E G, & I L; æquale erit ei, quod fit ex F G, & M O, vna cum eo,
quod ex E G, & M N, minus eo quod fit ex F G, & M N. In prima quidem
figura demonſtratio ſic procedet. Auferatur vtrinque id quod fit ex E G, &
M N ergo quod fit ex E G, & I L, minus eo, quod ex E G, & M N, vel & I P,
hoc eſt id quod fit ex E G, & P L, æquale erit, quod ex F G, & M O, minus eo,
quod fit, ex F G, & M N. hoc eſt ei quod fit ex F G, & N O; quare æqualitate
ad proportionem reuocata, erit vt N O ad P L, ita E G ad F G, hoc eſt vt dif-
C ferentia inter moles corporum A, & D primi videlicet, & tertij ad differen-
tia inter moles corporum A, & B C primi, & ſecundi; ita pondus vnius corpo-
rum ad pondus portionis C, quę eſt eiuſdem generis cum corpore tertio D.

In ſecunda vero figura demonſtratio procedet in hunc modum. Addatur v-
trobique id quod fit ex F C, & M N, & auferatur id quod ex F G, & M O; fiet
id quod fit ex E G, & I L, vna cum eo quod ex F G, & M N, minus eo quod ex
F G, & M O, æquale ei quod fit ex E G, & M N. auferatur quoque id quod fit
ex E G, & I L: ergo quod fit ex F G, & M N, minus eo, quod ex F G, & M O,
hoc eſt id quod ex F G, & O N, ęquale erit ei, quod ex E G, & M N, vel L P, mi-
nus eo, quod ex E G, & I L, hoc eſt ei, quod fit ex E G, & L P. quare reuocata ad
proportionem æqualitate, erit vt O N ad L P, ita E G ad F G: hoc eſt
D vt differentia inter moles corporum A, & D primi videlicet, & tertij, ad
differentiam inter moles corporum A, & B C primi & ſecundi; ita pon-
dus vnius corporum ad pondus portionis C, quæ eſt eiuſdem generis cum
corpore tertio D, quod erat oſtendendum.

Sit corona mixta ex auro, & argento 50. librarum, & oporteat inuenire quã-
tum ſit in ea argenti, & quantum auri. Sumantur duæ maſſę eiuſdem ponderis,
atque corona. vna ex auro; altera ex argento. & ponatur in aliquod vas aqua ple
num; maſſa aurea, quę eijciat 6. ſextarios aquę. Similiter ponatur & corona: ea-
que eijciat ſeptem ſextarios, eodem modo poſita & maſſa argẽtea eijciat 11. ſe-
xtarios; maſſa igitur aurea æqualis erit mole ſex ſextarijs aquæ corona vero 7.

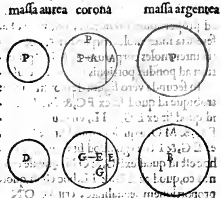
ſextarijs; maſſa autem argentea 11. ſextarijs. Fiat igitur vt differentia mo- A
lis maſſæ aureæ, & molis maſſæ argenteæ, hoc eſt vt S ad differentiam
ex antec. ducitur. molium maſſæ aureæ, & coronæ, hoc eſt ad 1, ita pondus coronæ quod
eſt 50. ad 50, erunt* igitur 10. lib. argenti in corona, auri vero 40.

Sed ponantur conuerſo ordine prædictæ maſſæ nimirum prima in ordine ſit maſſa argentea, tertia vero aurea. & fiat vt differentia molium maſſæ argenteæ, & maſſæ aureæ, hoc eſt vt S ad differentiam molium maſſæ argenteæ & coronæ, hoc eſt ad 4: ita pondus coronæ quod eſt 50. lib. ad 40. erit igitur pondus auri, quod eſt in corona 40. lib. pondus vero argenti 10. lib.

Eodem modo inuenietur pondus argenti, vel auri, quæ ſunt in corona, ſi aquæ eiectæ è vaſe ſumantur ad rationem ponderis, quemdmodum eas ſumpſimus ad rationem menſuræ. corpora enim eiuſdem generis eamdem habent B
rationem in pondere, quam in mole. eijciat enim maſſa aurea è vaſe tres libras aquæ; corona vero $3\frac{1}{2}$. maſſa autem argentea $5\frac{1}{2}$. Fiat igitur vt differentia inter 3, & $5\frac{1}{2}$ quæ eſt $2\frac{1}{2}$ ad differentiam inter 3 & $3\frac{1}{2}$, quæ eſt $\frac{1}{2}$; ita 50. lib. ad 10. libras, hoc eſt ad pondus argenti, quod eſt in corona. illud ipſum pondus quod ſupra inueniebatur.

Aliter & Problema reſoluam, & Theorema demonſtrabo.

Reſolutio quarta.



Iſdem poſitis quæratur pondus argenti, quod eſt in corona. illud eſto A. ergo P - A erit pondus auri, menſura autem aquæ mole æqualis argento, quod eſt in corona eſto E. ergo menſura aquæ mole æqualis auro erit G - E. ponitur enim G menſura aquæ mole æqualis toti coronæ. Et quoniam eſt vt pondus maſſæ aureæ ad pondus auri, quod eſt in corona, ita moles eiuſdem maſſæ ad moles eiuſdem auri, erit C

vt P ad P -- A ita D ad G -- E D

Nunc ſtudium adhibendum eſt vt deueniamus ad aliquam proportionem cuius tres termini ſint cogniti, id autem tali fiet argumentatione. ergo per conuerſionem rationis erit vt P ad A ita D ad D -- G + E
ſed eſt vt P ad A, ita B ad E
hoc eſt vt pondus maſſæ argenteæ ad pondus argenti quod eſt in corona, ita moles eiuſdem maſſæ ad molem eiuſdem argenti; ergo erit
vt B ad E, ita D, ad D -- G + E
& per mutando erit vt B, ad D, ita E ad D -- G + E
& diuidendo vt B -- D, ad D, ita G -- D ad D -- G + E

&

A & rurſus permutando vt B -- D ad G -- D ita D ad D -- G ✣ E
ſed oſtenſum eſt ſupra eſſe vt P ad A ita D ad D -- G ✣ E
ergo erit vt B -- D ad G -- D ita P ad A

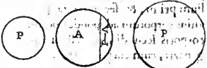
In hac igitur proportione cogniti ſunt tres termini, atque eſt ea ipſa proportionalium ſeries, quæ per antecedentes Reſolutiones inuenta eſt, cum de pondere argenti, quod eſt in corona quærebatur. atque adeo idem Poriſma deducitur.

Poriſma.

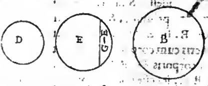
Vt differentia molis maſſæ argenteæ, & molis maſſæ aureæ ad differentiam molis coronæ, & molis maſſæ aureæ, ita eſt pondus coronæ ad pondus ar-
B genti; quod eſt in corona.

Reſolutio quinta.

Sed quæratur pondus auri exiſtentis in corona. id eſto A. ergo pondus argenti erit P -- A; menſura autem aquæ mole æqualis auro, quod eſt in corona eſto E. ergo menſura aquæ mole æqualis argento erit G -- E. ponitur enim G menſura aquæ mole æqualis toti coronæ. Et quoniam eſt vt pondus maſſæ argenteæ ad pondus argenti, quod eſt in corona. ita moles eiuſdem maſ-
C ſæ ad molem eiuſdem argenti, erit



vt P ad P -- A
ita B ad G -- E
Et per conuerſionem rationis
vt P ad A ita B ad B - G † E
ſed eſt vt P ad A ita D ad E



hoc eſt vt pondus maſſæ aureæ ad pondus auri, quod eſt in corona, ita moles eiuſdem maſſæ ad molem eiuſdem auri, ergo erit
vt B ad B -- G ✣ E ita D ad E
et permutando vt B ad D ita B -- G ✣ ad E
D & diuidendo vt B -- D ad D ita B -- G ad E
& rurſus permutando vt B -- D ad B — G ita D ad E
ſed eſt vt D ad E ita P ad A
cum ſit vt moles maſſæ aureæ ad molem auri, quod eſt in corona; ita pondus eiuſdem maſſæ ad pondus eiuſdem auri. ergo erit
vt B — D ad B -- G ita P ad A

Dantur igitur tres proportionis termini, atque eſt ea ipſa proportionalium ſeries, quæ per alias reſolutiones inuenta eſt, cum de pondere auri, quod eſt in corona quærebatur. atque adeo idem poriſma deducetur.

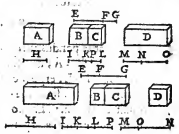
Poriſma. A

Vt differentia molium maſſæ, argenteæ, & maſſæ aureæ, ad differentiam molium maſſæ argenteæ, & coronæ; ita eſt pondus coronæ ad pondus auri, quod eſt in corona.

Ex hoc, & antecedentes Poriſmate proponemus vnum Theorema vniuerſale illud ipſum, quod ſupra propoſuimus, ſed alia via demonſtratio procedet, cum & Reſolutio alia via proceſſerit.

Theorema.

Si trium corporum æque ponderantium primum, & tertium fuerit diuerſi generis, ſecundi autem portio ſit eiuſdem generis cum corpore primo; reliqua vero eiuſdem generis cum corpore tertio; erit vt differentia molium primi & tertij ad differentiam molium primi, & ſecundi; ita pondus vnius corporum ad pondus portionis corporis ſecundi, quæ eſt eiuſdem generis, cum corpore tertio. B



Reſumantur ſuperioris Theorematis figura, & repetantur eadem verba ideſt. Sint tria corpora æque ponderantia A, B C, D, quorum primum, & tertium ſint generis diuerſi; portio autem ſecundi, vtpote B, ſit eiuſdem generis cum corpore A: reliqua vero portio eiuſdem generis cum corpore D. Dico vt differentia inter molem corporis A, & molem corporis D ad differentiam inter molem corporis A, & molem corporis B C, ita eſſe pondus vnius corporum ad pondus portionis C. C

Sit enim portionis B pondus E F portionis autem C pondus F G. ergo totius corporis B C pondus erit E G, quod quidem pondus erit & corporum A, & D. corporis autem A ſit moles H: portionis vero B moles I K, & portionis C moles K L; corporis vero D moles M O. & ſumantur M N, I P æquales ipſi H. Quoniam igitur eſt vt pondus corporis A ad pondus portionis B, hoc eſt vt E G ad E F, ita moles ipſius A ad molem ipſius B, hoc eſt, ita H, vel I P ad I K: erit per conuerſionem rationis vt E G ad G F, ita I P ad P k. ſed vt E G, ad G F, ita eſt quoque M O ad k L, eſt enim vt pondus corporis D ad pondus portionis C, ita moles ipſius D ad molem ipſius C. in prima quidem figura ſic concludo. ergo vt M O ad K L, ita erit I P ad P k: & permutando vt M O ad I P, hoc eſt, ad M N, ita K L ad P K & diuidendo vt O N ad N M, ita L P ad P K. & rurſus permutando erit O N ad L P, vt N M, vel I P ad P k; ſed oſtenſum eſt ſupra eſſe & E G ad G F vt I P ad P K, ergo & O N ad L P, ita erit E G ad G F, hoc eſt vt diffe- D

ren-

A rentia inter moles corporum A D ad differentiam inter moles corporum A & B C, ita pondus vnius corporum, aut pondus portionis C, quæ eſt eiuſdem generis cum corpore tertio.

In ſecunda vero figura concludo in hunc modum. ergo vt I P ad P K, ita erit M O ad k L, & permutando vt I P vel N M ad M O, ita P k ad K L, & diuidendo vt N O ad O M, ita P L ad L k, & rurſus permutando erit vt N O ad P L, ita O M ad L k. ſed vt O M ad L k, ita eſt E G ad G F, hoc eſt vt moles corporis D ad molem corporis C, ita pondus eiuſdem corporis G ad pondus eiuſdem corporis C. ergo vt N O ad P L, ita erit E G ad G F, hoc eſt vt differentia inter moles corporum A D ad differentiam inter moles corporum A & B C, ita pondus vnius corporum ad pondus portionis C, quæ eſt eiuſdem

B generis cum corpore tertio. quod erat oſtendendum.

Sed facilius atque exactius deprehendetur portio argenti quod, eſt in corona ſi ipſa corona & maſſæ illæ ponderentur in aqua, quemadmodum in noſtro Archimede promoto docuimus.

Lemma I.

Si fuerint lineæ quodcumque æqualiter ſeſe excedentes. Compoſita ex extremis æqualis erit vnicuique compoſitarum è duabus æque diſtantibus ab extremis, & ſi fuerit numerus linearum impar, mediæ duplæ æqualis erit.

C Sint lineæ quodcumque æqualiter ſeſe excedentes A B C D F E.

Dico compoſitam ex extremis A F æqualem eſſe vnicuique compoſitarum ex B E, vel ex C D, vel mediæ duplæ; ſi numerus linearum eſt impar.



Quoniam enim ſi ab extrema F auferatur. exceſſus quo ſuperat, proximam E, reliqua æqualis erit E. ſimiliter à ſecunda B, ablato exceſſu, quo ſuperat primam A, reliqua æqualis erit A. Si igitur æqualibus A, & B multatæ addantur æquales F, multata & E compoſita ex A & F multata; æqualis erit compoſitæ ex B multata & E.

Reſtituantur exceſſus ablati tum ipſi B, tum ipſi F, qui quidem exceſſus ſunt ęquales, nam æqualiter lineæ ſeſe excedunt. ergo compoſita ex A & F tota,

D æqualis erit compoſitæ ex B tota & E. Eadem ratione oſtendemus compoſitam ex C D, æqualem eſſe compoſitæ ex B E. quare & compoſitæ ex A F.

Sed ſit numerus linearum A B C impar. eadē ratione oſtendemus compoſitam ex extremis A C æqualē eſſe mediæ duplæ. nam C contracta exceſſu, quo ſuperat mediā B, æqualis eſt ipſi B; A vero protracta eodē exceſſu æqualis erit eidem B. quare compoſita ex A C æqualis erit B duplæ, quare conſtat propoſitum.



Idem aliter breuius oſtendemus.

Sint lineæ quodcumque æqualiter ſeſe excedentes, quarum prima ſit B. exceſ-

Digitized by Google

ceſſus autem, quo ſeſe excedunt A. ergo ſecunda erit B ✣ A. tertia vero B ✣ A 2, & ſic deinceps. exponatur igitur ſeries huiuſmodi linearum: eæ erunt. A

B B ✣ A B ✣ A 2 B † A 3 B † A 4 B † A 5

Manifeſtum eſt compoſita ex extremis æquale eſſe vnicuique compoſitarum è duabus æque diſtantibus ab extremis. nam compoſitæ ex extremis B, & B † A 5, eſt B 2 ✣ A 5 quanta etiam eſt compoſita ex ſecunda B ✣ A & B ✣ A 4, ac etiam quanta eſt compoſita ex tertia B ✣ A 2 & B † A 3. Æque manifeſtum eſt ſi numerus linearum fuerit impar compoſitam ex extremis æqualem eſſe mediæ duplæ.

Lemma II.

Si fuerint lineæ quotcumque æqualiter ſeſe excedentes. Dupla compoſita ex omnibus, multiplex eſt compoſitæ ex extremis per numerum linearum. B

NVmerus enim linearum erit par aut impar. ſit par. Quoniam igitur compoſita ex extremis æqualis eſt vnicuique compoſitarum è duabus æque diſtantibus ab extremis per antecedens Lemma, & æqualis quoque ſibi ipſi: ideo compoſita ex omnibus, totuplex erit compoſitæ ex extremis, quot ſunt binæ lineæ, & conſequenter dupla compoſita ex omnibus, totuplex compoſitæ ex extremis, quot ſunt lineæ.

Sed ſit numerus linearum impar. Quoniam igitur compoſita ex extremis æqualis eſt vnicuique compoſitarum è duabus æque diſtantibus ab extremis, & æqualis quoque ſibi ipſi, ideo compoſita ex omnibus, excepta media, totuplex erit compoſitę ex extremis, quo ſunt binę lineę, excepta media, & per conſequens dupla compoſita ex omnibus, excepta media, totuplex erit compoſitæ ex extremis, quot ſunt lineę, excepta media; ſed dupla media* æqualis eſt compoſitę ex extremis. ergo dupla compoſita ex omnibus, totuplex erit compoſitę ex extremis, quot ſunt lineæ. Itaque dupla compoſita ex omnibus multiplex eſt compoſitæ ex extremis per numerum linearum. quod erat demonſtrandum. C

lem. 1

Lemma III.

Si fuerit lineæ quotcumque æqualiter ſeſe excedentes. Differentia extremarum continuata exceſſu, multiplex eſt ipſius exceſſus per numerum linearum. D

SInt lineæ quotcumque æqualiter ſeſe excedentes A, B, C, D I, & ab extrema D I, quæ ſit maxima auferatur D E æqualis minimæ A ergo differentia extremarum erit E I. producatur autem E I in F, vt ſit I F æqualis exceſſui. Dico E F multiplicem eſſe ipſius I F per numerum linearum.

Quoniam enim A prima differt à ſecunda quidem B, per exceſſum æqualem I F, à tertia vero C per duplum exceſſum I F, à quarta autem D I per triplum exceſſum, ac denique ab extrema ſeu maxima per

ex-

A excesſum multiplicem, per numerum linearum, dempta vna, hoc eſt differentia extremarum, multiplex eſt ipſius excesſus per numerum linearum dempta vna, & conſequenter differentia extremarum continuata excesſu, multiplex eſt ipſius excesſus per numerum linearum, quod erat oſtendendum.



Lemma IV.

Si fuerint lineæ quotcumque æqualiter ſeſe excedentes. Eſt vt dupla compoſita ex omnibus, ad compoſitam ex extremis, ita differentia extremarum continuata excesſu ad excesſum.

B

Voniam enim dupla compoſita ex omnibus * multiplex eſt compoſitæ ex extremis per numerum linearum, per quem numerum etiam differentia extremarum continuata excesſu; * multiplex eſt ipſius excesſus. ergo quotuplex eſt dupla compoſita ex omnibus, compoſitæ ex extremis, totuplex; erit differentia extremarum continuata excesſu, ipſius excesſus; quare vt dupla compoſita ex omnibus ad compoſitam ex extremis, ita erit differentia extremarum, continuata excesſu ad excesſum. quod erat oſtendendum. lem. ii ex antece

Problema II.

ℭ Data minima & maxima linearum æqualiter ſeſe excedentium & compoſita ex omnibus; inuenire ſingulas. Oportet autem duplam compoſitam ex omnibus multiplicem eſſe compoſitæ ex extremis per numerum binario maiorem.

Reſolutio.

Sit data minima B, maxima verò D, compoſita autem ex omnibus G. Oportet inuenire ſingulas.

Quæratur excesſus, is eſto A. Quoniam igitur eſt vt dupla compoſita ex omnibus, ad compoſitam ex extremis; ita differentia extremarum continuata excesſu, ad excesſum; erunt proportionales.

D G 2 D + B D -- B + A. A.

Sed factum ſub extremis æquale eſt ei, quod fit ſub medijs. ergo

G 2 in A æquabitur (D Q -- D in B + D in A
(+ D in B -- B Q + B in A

Hoc eſt G 2 in A æquabitur D Q + D in A -- B Q + B in A.

Auferantur vtrinque D in A, & B in A, vt cognita ab incognitis diſtinguantur, ergo

G 2 in A -- D in A -- B in A æquabitur D Q -- B Q

Seu quod idem eſt G 2 -- D -- B in A æquabitur D Q -- B Q

Et æqualitate ad proportionem reuocata, proportionales erunt.

G 2

G 2 — D — B   D + B   D — B   A   A

Sed vt facilior reddatur via ad Theorematis demonſtrationem, quę per veſtigia Reſolutionis progredi debet, curandum eſt, vt datarum magnitudinum characteres quam pauciſsimi exiſtant; multitudo enim characterum obruit quodammodo ipſa veſtigia, & inuoluit. Itaque cum in reſoluendo Problemate plures characteris, (ſiue aggregatum datarum magnitudinum, ſiue differentiam ſignificantes) ſimul ſemper, vel in vna æqualitatis parte, vel in vtraque exiſtant; tunc ipſum aggregatum, vel differentia poterit vno tantum charactere deſignari. Igitur in ſuperiori Reſolutione quoniam characteris D + B vel D — B ſemper ſimul exiſtunt; poterit pro D + B ſubſtitui F, & pro D — B ſubſtitui H. Subſtituantur & procedat Reſolutio, vt ſupra. Quoniam

lem. 4 igitur* proportionales ſunt B

G 2   F   H + A   A

factum ſub extremis æquale erit ei, quod fit ſub medijs; nempe

G 2 in A æquabitur F in H + F in A.

Auferatur vtrinque F in A, vt cognita ab incognitis diſtinguantur, ergo

G 2 in A — F in A æquabitur F in H.

Seu quod idem eſt   G 2 — F in A æquabitur F in H

Et æqualitate ad proportionem reuocata, proportionales erunt

G 2 - F   F   H   A

ea ipſa proportionalium ſeries, quæ per antecedentem reſolutionem inueniebatur.

Poriſma. C

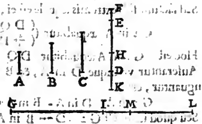
Vt differentia duplę compoſitæ ex omnibus, & compoſitæ ex extremis, ad compoſitam ex extremis; ita eſt differentia extremarum ad exceſſum.

Hoc Poriſma in formam Theorematis ita proponetur.

Theorema.

Si fuerint lineæ quotcumque æqualiter ſeſe excedentes, eſt, vt differentia duplæ compoſitæ ex omnibus, & compoſitæ ex extremis, ad compoſitam ex extremis, ita differentia extremarum ad exceſſum.

Sint lineæ quotcumque æqualiter ſeſe excedentes A, B, C, D E, ſitque G I æqualis compoſitæ ex omnibus, & producatur maxima E D in k, vt ſit D k æqualis minimæ A, cui quoque æqualis fiat D H. erit igitur E H differentia extremarum; E k verò compoſita ex extremis. Rurſus producatur H E in F, vt ſit E F æqualis D



ex-

A excesſui, quo lineæ ſeſe excedunt. Dico differentiam duplæ G I, & rectæ E k ad ipſam E K eſſe, vt H E ad E F. Duplicetur enim G I in L. & ab ipſa auferatur L M æqualis k E. Quoniam igitur eſt * vt G L ad k E, ita H F ad ad F E, rectangulum ſub G L, & F E * æquale erit rectangulo ſub K E, & H F, hoc eſt rectangulis k E H; k E F; auferatur vtrinque rectangulum K E F. ergo rectangulum ſub G L, & E F minus rectangulo K E F, hoc eſt minus rectangulo ſub L M, & E F, æquale erit rectangulo k E H; ſed rectangulum ſub G L, & E F minus rectangulo ſub L M, & E F æquale eſt rectangulo ſub G M, & E F: ergo rectangulum ſub G M, & E F, æquale erit rectangulo K E H; quare * vt G M ad K E ita erit H E ad E F. quod erat oſtendendum.

lem. 4
16 ſexti
16 ſexti

Alia breuiori, ac faciliori via & Problema reſoluam, & Theorema de-
B monſtrabo.

Ijſdem datis. quæratur exceſſus vt in antecedenti.

Reſolutione. is eſto A'. Et quoniam * proportionales ſunt. lem. 4

G 2 D ✤ B. D -- B ✤ A A

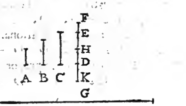
Et diuidendo proportionales erunt

G 2 -- D -- B D ✤ B D — B A

Ea ipſa proportionalium ſeries, quæ per priorem reſolutionem inuenta eſt. itaque proponetur idem Theorema; ſed alia ratione demonſtrabitur.

Si fuerint lineæ quotcumque æqualiter ſeſe excedentes. eſt vt differentia duplæ compoſitæ ex omnibus, & compoſitæ ex extremis; ad compoſitam ex extremis, ita differentia extremarum ad exceſſum.

C Sint lineæ quotcumque æqualiter ſeſe excedentes A, B, C, D E; ſitque G æqualis compoſitæ ex omnibus, & producatur maxima E D in k, vt ſit D K æqualis minimæ A, cui quoque æqualis fiat D H. erit igitur E H differentia extremarum; E K vero compoſita ex extremis. Rurſus producatur H E in F, vt ſit E F æqualis exceſſui, quo lineæ ſeſe excedunt. Dico differentiam inter duplam G, & rectam E K ad ipſam E k eſſe, vt H E ad E F. Quoniam enim eſt * vt dupla G ad E K, ita H F ad E F; erit diuidendo vt differentia, lem. 4
D qua G dupla ſuperat E K ad E k, ita H E ad E F; quod erat oſtendendum.



Sint numeri æqualiter ſeſe excedentes, quorum minimus, idemque primus eſt 3; maximus vero 13; ſumma autem omnium 48, & oporteat inuenire ſingulos. Fiet vt differentia ſummæ omnium duplæ, & ſummæ extremorum, ad ſummam extremorum, ita differentia extremorum, ad exceſſum, hoc eſt vt 80 ad 16, ita 10 ad 2. itaque 2 erit exceſſus; atque adeo progreſsio numerorum 3. 5. 7. 9. 11. 13. quorum ſumma eſt 48.

Pro-

Problema III.

A

Data ſecunda linearum æqualiter ſeſe excedentium, & compoſita ex extremis, itemque compoſita ex omnibus, inuenire ſingulas. Oportet autem duplam compoſitam ex omnibus multiplicem eſſe compoſitæ ex extremis, per numerum binario maiorem.

HOc Problema in duos Caſus diuidam, primus erit cum dupla cōpoſita ex omnibus multiplex eſt compoſitæ ex extremis per numerū maiorem ternario, ſecundus autem cum ea multiplex eſt per ipſum ternarium.

Reſolutio primi Caſus.

SIt data ſecunda B; compoſita vero ex extremis D; compoſita autem B
ex omnibus G. ſitque dupla G multiplex ipſius D per numerum maiorem ternario, ergo numerus linearum æqualiter ſeſe excedentium ternario maior erit. quoniam dupla compoſita ex omnibus* multiplex eſt compoſitæ ex extremis per numerum linearum.

hu. 1

Exceſſus igitur, de quo quæratur eſto A, ergo B — A erit minima, quæ ſi auferatur à D compoſita ex extremis; reliqua D — B + A erit maxima; à qua ſi auferatur minima, quæ eſt B — A, reliqua D — B 2 + A 2 erit differentia maxmæ, & minimæ, hoc eſt extrematum.

Et quoniam ex antecedente Theoremate eſt, vt differentia duplæ compoſitæ ex omnibus, & compoſitæ ex extremis ad compoſitam ex extremis; ita differentia extremarum ad exceſſum; ideo proportionales erunt. C

G 2 — D, D, D — B 2 + A 2, A

Et diuidendo proportionales erunt

G 2 — D 2 D D — B 2 + A A

Iterum diuidendo proportionales erunt

G 2 — D 3 D D — B 2 A

Poriſma.

Vt differentia duplæ compoſitæ ex omnibus, & triplæ compoſitæ ex extremis, ad compoſitam ex extremis; ita eſt differentia compoſitę ex extremis, & duplæ ſecundæ, ad exceſſum.

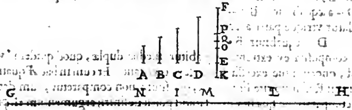
Ex hoc Poriſmate proponetur Theorema huiuſmodi. D

Theorema.

Si numerus linearum æqualiter ſeſe excedentium fuerit ternario maior, erit vt differentia duplæ compoſitæ ex omnibus, & triplæ compoſitæ ex extremis ad compoſitam ex extremis; ita differentia compoſitæ ex extremis, & duplæ ſecundæ ad exceſſum.

SInt lineæ quotcumque æqualiter ſeſe excedentes A, B, C, D, E F, quarum numerus ſit ternario maior, & ponatur G I æqualis compoſitæ ex om-

A omnibus, eaque duplicetur in H. ergo G H multiplex eſt compoſitæ ex extremis, per numerum ternario maiorem. quoniam dupla compoſita ex omni-



B bus multiplex eſt compoſitæ ex extremis, per numerum linearum. itaque ipſa G H maior eſt, quam tripla compoſita ex extremis. ſumatur igitur in G H recta H L æqualis compoſitæ ex extremis; cui quoque æqualis ſumatur L M, ſimiliter eidem æqualis, ſumatur M N reliqua igitur G N erit differentia duplæ compoſitæ ex omnibus & compoſitæ ex extremis. Deinde ſumatur E O æqualis primæ A vel E K, & fiat K P dupla ſecundæ B. cum igitur P K dupla ſecundæ ſuperet O K duplam primam, exceſſu P O; ſimpla ſecunda ſuperabit ſimplam primam dimidio exceſſu P O. Secetur ergo P O bifariam in Q. erit P Q, vel Q O exceſſus, quo lineæ ſeſe excedunt. Dico igitur G H ad N M eſſe vt F P ad P Q, hoc eſt differentiã duplæ compoſitæ ex omnibus, & triplæ compoſitæ ex extremis ad compoſi-

C tam ex extremis, eſſe vt differentia compoſitæ ex extremis, & duplæ ſecundæ ad exceſſum. Quoniam enim ex antecedente Theoremate eſt, vt differentia duplæ compoſitæ ex omnibus, & compoſitæ ex extremis ad compoſitam ex extremis, ita differentia extremarum ad exceſſum, hoc eſt vt G L ad L M; ita F O ad O Q. erit diuidendo vt G M ad M L, hoc eſt ad M N; ita F Q ad Q O, hoc eſt ad Q P; & rurſus diuidendo erit G N ad N M ita F P ad P O. quod erat oſtendendum.

Sint numeri æqualiter ſeſe excedentes, quorum ſecundus ſit 5; ſumma autem extremorum 14. ſumma vero omnium 35. & oporteat inuenire ſingulos. Fiet vt differentia ſummæ omnium duplæ, & triplæ ſummæ extremorum ad ſummam extremorum, ita differentia ſummæ extremorum & duplæ

D ſecundæ ad exceſſum. hoc eſt vt 28 ad 14, ita 4 ad 2, itaque 2 erit exceſſus, atque adeo progreſsio numerorum 3 5 7 9 11, quorum ſecundus eſt 5 ſumma vero extremorum 14. ſumma autem omnium 35.

Reſolutio ſecundi Caſus.

SIt data ſecunda B compoſita ex extremis D; compoſita ex omnibus G, cuius dupla ſit multiplex ipſius D per ternatium, hoc eſt ſit tripla ipſius D, ergo tres erunt lineæ æqualiter ſeſe excedentes. oportet inuenire primam, & tertiam.

Prima eſto A, ergo D — A erit tertia; compoſita autem ex prima, & ter-

tia ponitur D. rurſus quoniam prima quidem eſt A. ſecunda vero B, exceſſus, quo ſecunda B ſuperat A primam, erit B -- A, is exceſſus addatur ſecundæ B, fiet tertia B 2 -- A, at eadem tertia eſt D -- A, ergo A

D -- a æquabitur B 2 -- a

Addatur vtrique parti a ergo

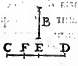
D æquabitur B 2

lem. 1 hoc eſt compoſita ex extremis æquabitur mediæ duplæ, quod quidem * verum eſt, quocumque exceſſu lineæ ſe ſe excedant. Et cum in hac Æquatione quamuis Reſolutio rite ſit peracta, quæſitum non comparetur, cum dato, vt tali comparatione quæſita magnitudo poſsit definiri, argumentum eſt primam linearum de qua quæritur cuiuſcumque longitudinis exhibitam: modo ea minor ſit, quam data ſecunda, Problemati ſatisfacere. idque ita ſit manifeſtum. B

Sit data ſecunda, hoc eſt media trium linearum æqualiter ſeſe excedentium B; compoſita autem ex extremis C D ea * erit dupla ipſius B, Oportet inuenire extremas. ſecetur C D vtcumque in F, & ſit C F minor, quam F D. Dico lineas æqualiter ſeſe excedentes eſſe C F B F D. Quoniam enim C D * æqualis eſt duplæ B, ſecta C D bifariam in E, erit vtraque ipſarum C E, E D æqualis ipſi B; ſed C E ſuperat C F primam exceſſu F E, quo etiam tertia F ſuperat ipſam E D. ergo & ſecunda B ſuperabit primam C F exceſſu F E, atque tertia F D B ſecundam. Itaque lineæ C F. B. F D. æqualiter ſeſe excedunt, atque earum media eſt ipſa B data, & compoſita ex extremis data C D. factum eſt igitur quod oportuit. C

lem. 1 (margin, beside "mis C D ea")

lem. 1 (margin, beside "C F B F D")



In numeris ſit ſecundus numerus, hoc eſt medius 5. ſumma extremorum erit. 10. ponatur pro primo numero quilibet nnmerus quinario minor, vtpote 1 tertius erit 9, & numeri 1, 5, 9, æqualiter ſeſe excedentes Problemati ſatisfaciunt.

Sed ponatur pro primo numero 2. tertius erit 8, & numeri 2 5 8 æqualiter ſeſe excedentes problemati ſatisfaciunt.

Item ponatur pro primo numero $2\frac{1}{2}$, tertius erit $7\frac{1}{2}$, atque numeri $2\frac{1}{2}$ 5 $7\frac{1}{2}$ æqualiter ſeſe excedentes Problemati ſatisfaciunt. D

Quomodo Problemata impoſsibilia cognoſcantur.

Caput II.

INterdum contingit, vt Problema propoſitum ſit impoſsibile. Iſtam impoſsibilitatem Reſolutio arguit exhibens impoſsibilem Aequationem. Nam quotieſcumque Reſolutio Problematis incidit in Aequationem impoſsibilem; argumentum eſt Problema im poſsibile eſſe. Aequationem autẽ impoſsibilem voco cũ linea minor magnitudo proponitur æquari maiori,

quod

A quod quidem abſurdum, vel aperte cernitur, vel arguitur ex eo, quod ipſa æquatio tunc inexplicabilis redditur; nam cum Æquatio explicari nequit, cauſa eſt ipſa Æquationis inæqualitas. idque ſic demonſtrabo.

Proponatur B in A -- A Q æquari B Q. hæc Æquatio non poteſt explicari; nam ad eam explicandam oportet à quadrato dimidiæ coefficientis B, quod eſt B Q $\frac{1}{4}$ auferre B Q, quod fieri non poteſt; cum ſit B Q maius, quam B Q $\frac{1}{4}$.

Dico igitur B in A -- A Q, minus eſſe B Q, hoc eſt in propoſita Æquatione æqualitatem non eſſe. Quoniam enim ponitur A Q auferri a B in A, & id quod remanet æquari B Q; erit A Q minus quam B in A. quare & A minor erit quam B. atque adeo B in A minus, quam B Q, & per conB ſequens B in A -- A Q multo minus. In propoſita igitur Æquatione non eſt æqualitas. quod erat oſtendendum.

Problema I.

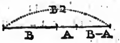
Datam rectam lineam ſecare, vt rectangulum ſub partibus vna cum quadrato differentiæ partium æquale ſit quadratis partium.

Reſolutio.

SIt data recta linea B 2, quam oportet ſecare, ita vt rectangulum ſub partibus, vnà cum quadrato differentię partium æquale ſit quadratis partium.

C Factum iam ſit, & dimidia differentia partium eſto a. ergo pars* maior erit B + A; pars autem minor B — a. Et quoniam rectangulum ſub B + a & B -- a vna cum quadrato ex a 2 æquale eſt quadratis ex B + a, & B — a; ſic enim ponitur ſecta data recta linea B 2, ideo

ex 2. probl. 5 lib. 4



B Q -- a Q + a Q 4 æquabitur B Q 2 + a Q 2

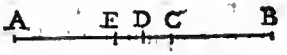
hoc eſt B Q + a Q 3 æquabitur B Q 2 + a Q 2

auferatur vtrinque B Q, & a Q 2; ergo

A Q æquabitur B q.

D vnde & A æquabitur B, pars toti, quod eſt abſurdum. Cum igitur Reſolutio incidat in Æquationem impoſsibilem, argumentum eſt Problema impoſsibile eſſe; quæ quidem impoſsibilitas repetendo Reſolutionis veſtigia ita oſtendetur.

Sit enim ſi fieri poteſt recta a B ſecta in C, ita vt rectangulum ſub partibus A C, C b vna cum quadrato differentiæ earundem æquale ſit quadratis a C; C b, & ſumatur A E æqualis C b. ergo differentia partium



a c, C B erit B C. ſecetur autem A B bifariam in D. Quoniam igitur rectangulum A C b, vnà cum quadrato E C, hoc eſt cum quadrato D C quater. æquale eſt quadratis A C, C B, ſic ponitur ſecta A b; ipſum autem rectangulum A C b, vnacum quadrato D C* æquale eſt quadrato A D, vel quod idem eſt rectangulum A C B æquale eſt quadrato a D, minus quadrato D L; ideo quadratum a D minus quadrato D C, plus quadrato D C quater, hoc eſt quadratum a D, vnà cum quadrato D C ter, æquale erit quadratis a C c b, hoc eſt* duplo quadratorum a D, D c. auferatur vtrinque quadratum a D, & duplum quadrati D c; ergo reliquum quadratum D c reliquo quadrato a D æquale erit. vnde & recta D c æqualis rectæ a D, vel D b pars toti, quod eſt abſurdum. Non poteſt igitur ſecari recta linea, vt rectangulum ſub partibus, vna cum quadrato differentiæ partium, æquale ſit quadratis partium. Itaque Problema impoſsibile eſt. quod erat oſtendendum.

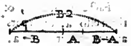
5 ſecundi — 5 ſecundi — A — B

Problema II.

Datum rectam lineam ſecare, vt triplum rectangulum ſub partibus, vna cum quadrato differentiæ partium, æquale ſit quadrato totius rectæ.

Reſolutio.

SIt data recta linea b z ſecunda vt petitur. Factum iam ſit, & dimidia differentia partium eſto A. ergo b + a erit pars maior b — a pars minor. Et quoniam triplum rectangulum ſub b + a, & b — a vnà cum quadrato ex a z æquale eſt quadrato ex b z, ergo.



C

$$B\,Q\,3 - a\,Q\,3 + a\,Q\,4 \text{ æquabitur } b\,Q\,4$$

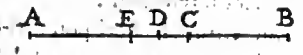
hoc eſt $b\,Q\,3 + a\,Q$ æquabitur $b\,Q\,4$

auferatur vtrinque $b\,Q\,3$; ergo

$$A\,Q \text{ æquabitur } b\,Q.$$

vnde & A æquabitur b pars toti, quod eſt abſurdum. Cum igitur æquatio impoſsibilis ſit; Problema quoque impoſsibile eſt. Idque ſic demonſtrabimus. D

Sit ſi fieri poteſt recta a b ſecta in c; ita vt triplum rectangulum a c b, vnà cum quadrato differentiæ partium a c, c b æquale ſit quadrato totius a b, & ſumatur a E æqualis C B. ergo differentia inter A C, C B erit E C, deinde ſecetur A B bifariam in D.



5 ſecundi ergo rectangulum A C B, vna cum quadrato D C* æquale eſt quadrato A D, vel D B. ſeu quod idem eſt rectangulum A C B, æquale erit quadrato D B, mi-

A minus quadrato D C. & conſequenter triplum rectanguli A C B æquale triplo quadrati D B, minus triplo quadrati D C. ſed ponitur triplum rectanguli A C B vna cum quadrato E C, hoc eſt cum quadruplo quadrati D C æquari quadrato A B, ergo triplum quadrati D B, minus triplo quadrati D C, vna cum quadruplo quadrati D C, hoc eſt triplum quadrati D B, vna cum quadrato D C, æquabitur quadrato A B, hoc eſt quadruplo quadrati D B. auferatur vtrinque triplum quadrati D B. ergo reliquum quadratum DC reliquo quadrato D B æquale erit. atque & recta D C æqualis rectæ D B. quod eſt abſurdum. Non poteſt igitur ſecari recta linea, vt triplum rectangulum ſub partibus, vna cum quadrato differentiæ partium æquale ſit quadrato totius lineæ. Itaque Problema impoſsibile eſt quod erat

B oſtendendum.

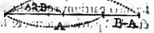
Problema III.

Datam rectam lineam ſecare, vt rectangulum ſub tota, & differentia partium vna cum quadrato partis minoris æquale ſit rectangulo ſub tota, & parte maiore.

Reſolutio.

SIt data recta linea B, quam oportet ſecare, vt dictum eſt: Factum iam ſit & pars maior eſto A. ergo pars minor erit B - A,

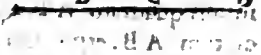
C atq; differentia partiũ erit A 2 - B. Et quoniã rectangulum ſub B, & A 2 - B vnà cum quadrato ex B - A æquale eſt rectangulo ſub B, & A.



B in A 2 BQ + BQ + A Q - B in A 2 æquabitur B in A hoc eſt AQ æquabitur B in A pars toti. quod eſt abſurdum.

Problema igitur impoſsibile eſt, idque demonſtrabimus hac ratione.

Sit ſi fieri poteſt recta A B ſecta in C, vt rectangulum ſub tota A B & differentia partium A C, C B, vna cum quadrato partis minoris C B ſit æquale rectangulo ſub ipſa A B, & parte maiore A C.



& ſumatur C D æqualis C B. Quoniam igitur ſecta eſt A B in C, vt rectan-

D gulum B A D (hoc eſt ſub tota & differentia partium) vna cum quadrato C B æquale ſit rectangulo B A C; ipſum autem rectangulum B A D, vnà cum quadrato C B, æquale eſt quadrato A C. hoc demonſtratum eſt ſub Theoremate primo libri primi, ideo quadratum A C, æquale erit rectangulo B A C pars toti; quod eſt abſurdum. Non poteſt igitur ſecari recta linea, vt rectangulum ſub tota, & differentia partium vna cum quadrato partis minoris æquale ſit rectangulo ſub tota & parte maiore atque adeo Problema impoſsibile eſt. quod erat oſtendendum.

Problema IV. A

Datam rectam lineam ſecare, vt rectangulum ſub tota, & differentia partium æquale ſit quadrato partis maioris.

Reſolutio.

Sit data recta linea B ſecanda in duas partes, quemadmodum Problema iubet. Factum iam ſit, & pars maior eſto A, ergo minor pars erit B -- A atque differentia partium erit A 2 -- B. Et quoniam rectangulum ſub tota, & differentia partium æquale eſt quadrato partis maioris.



B

B in A 2 - B Q æquabitur A Q.

Addatur vtrique parti B Q, & auferatur A Q, vt cognita ab incognitis ſeparentur. ergo

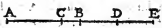
B in A 2 -- A Q æquabitur B Q.

Et explicata æquatione.

B æquabitur A. totum videlicet parti, quod eſt abſurdum.

Cum igitur Æquatio ſit impoſsibilis; Problema quoque impoſsibile eſt, idque ſic demonſtrabimus.

Sit ſi fieri poteſt recta A B ſecta in C, ita vt rectangulum ſub tota, & differentia partium æquale ſit quadrato rectæ A C partis maioris. & fiat C D æqualis A C, ergo differentia partium A C, C B erit B D. Fiat quoque B E æqualis A B. C



Quoniam igitur rectangulum A B D, quod fit ſub tota, & differentia partium ponitur æquale quadrato A C; ipſum autem rectangulum A B D, æquale eſt rectangulo D A B, minus quadrato A B; ideo rectangulum D A B, minus quadrato A B æquale erit quadrato A C. addatur vtrique parti quadratum A B. ergo rectangulum D A B, hoc eſt C A B bis (recta enim D A dupla eſt ipſius A C) ſeu quod idem eſt rectangulum C A E (eſt enim A E dupla ipſius A B) æquale erit quadratis A C, A B. deinde, auferatur vtrinque quadratum A C, ergo rectangulum C A E, minus quadrato A C, hoc eſt rectangulum A C E æquale erit quadrato A B. quod eſt abſurdum; quadratum enim A B æquale eſt rectangulo A C E, vna cum quadrato C B. Non poteſt igitur ſecari recta linea, vt rectangulum ſub tota, & differentia partium æquale ſit quadrato partis maioris. Itaque Problema impoſsibile eſt. quod erat oſtendendum. D

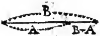
A

Problema V.

Datam rectam lineam ſecare, vt rectangulum ſub tota & dupla parte maiore æquale ſit quadratis, quæ fiunt à tota, & à parte maiore.

Reſolutio.

Sit data recta linea B ſecanda, vt petitur. Factum iam ſit, & pars maior eſto A. ergo minor pars erit B -- A, & quoniam rectangulum ſub B, & A dupla, æquale eſt quadratis ex B & A.



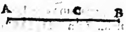
B in A 2 æquabitur BQ + AQ

B Auferatur vtrinque AQ, vt cognita ab incognitis ſeparentur, ergo

B in A 2 -- A æquabitur BQ

Et explicata Æquatione B æquabitur A, totum parti, quod eſt abſurdum. Problema igitur propoſitum impoſsibile eſt, idque, ita oſtendetur.

Sit ſi fieri poteſt recta linea AB ſecta in partes AC, CB, quarum maior ſit AC, ita vt rectangulum ſub AB, & AC dupla, hoc eſt vt rectangulum BAC bis, æquale. ſit quadratis AB, AC, & auferatur vtrinque quadratum AC, ergo rectangulum BAC bis, minus quadrato AC. æquale erit quadrato AB. ſed rectangulum BAC bis, æquale eſt rectangulo BCA bis, vna cum quadrato AC bis, & conſequenter



C rectangulum BAC bis minus quadrato AC æquale rectangulo BCA bis vna cum quadrato AC. ergo rectangulum BCA bis vna cum quadrato AC, æquale erit quadrato aB quod eſt abſurdum. quadratum enim AB* æquale eſt rectangulo BCA bis, vna cum quadratis aC, CB. Non poteſt igitur ſecari recta, vt rectangulum ſub tota, & dupla parte maiore æquale ſit quadratis totius, & partis maioris. atque adeo Problema propoſitum impoſsibile eſt, quod erat oſtendendum. *4 ſecundi

Problema VI.

Super data baſe triangulum conſtituere, in quo differentia ſegmentorum baſis ſit dupla differentiæ crurum. atque differentia crurum ſit dupla exceſſus,

D quo crus maius ſuperatur à baſe.

Reſolutio.

Sit data baſis trianguli, de quo quæritur B, & oporteat inuenire triangulum.

Factum iam ſit, & exceſſus, quo baſis ſuperat crus maius eſto a. ergo differentia crurum erit a 2, & conſequenter differentiam ſegmentorum baſis a 4. Et quoniã baſis b ſuperat crus maius exceſſu a; erit ipſum crus B -- a, ſed crus maius ſuperat crus minus exceſſu a 2. ergo crus minus erit B -- a 3; atque adeo aggregatum crurum erit B 2 -- a 4.

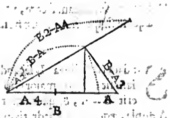
Et

theo. 8 ſecundi

Et quoniam eſt * vt differentia crurum ad differentiam ſegmentorum baſis, ita baſis ad aggregatum crurum, hoc eſt vt a 2 ad a 4, ita B ad B 2; erit B 2 aggregatum crurum; ſed idem aggregatum crurum inuentum eſt eſſe B 2 -- a 4, ergo A

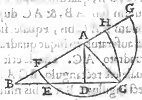
B 2 -- a 4 æquabitur B 2

Seu addito vtrobique a 4 B 2, æquabitur B 2 + a 4. quod eſt abſurdum.



Cum igitur Æquatio ſit impoſsibilis; Problema quoque impoſsibile eſt, idque oſtendetur hac ratione. B

Sit triangulum a B C, in cuius baſim B C, quæ ſit maior crure maiore a B cadat perpendicularis a D. ex centro A, interuallo a C deſcribatur circulus ſecans baſim B C in E, crus vero a B in F, ipſumque productum in G. differentia igitur crurum a B, a C eſt B F: aggregatum vero B G, differentia autem ſegmentorum B D, D C eſt B E. Rurſus centro B interuallo b C alius circulus deſcribatur ſecans ipſam b G in H. exceſſus igitur, quo b C ſuperat crus a b, erit a H. & ſit ſi fieri poteſt b E dupla ipſius b F, itemque b F dupla ipſius a H. Quoniam igitur b C æqualis eſt compoſitæ ex b a, a H; ipſa vero a b æqualis compoſitæ ex a C, & b F, hoc eſt & a H dupla C



erit b C æqualis compoſitæ ex a C, & a H tripla; ſed cum ipſa b C æqualis ſit compoſitæ ex b a, & a H, dupla b E æqualis erit compoſitæ ex b a, a c, & quadrupla a H, hoc eſt ex b G & quadrupla a H, ſed quoniam eſt, vt b F ad b E, ita b C ad b G, ipſa autem b E ponitur dupla ipſius b F. ideo & b G dupla erit ipſius b C. hoc eſt erit b G æqualis duplæ b C; ſed dupla b C oſtenſa eſt æqualis compoſitæ ex b G, & quadrupla a H. ergo b G æqualis erit compoſitæ ex eadem b G, & quadrupla a H. quod eſt abſurdum. Non poteſt igitur inueniri triangulum, in quo differentia ſegmentorum baſis ſit dupla differentiæ crurum. atque differentia crurum dupla exceſſus, quo baſis ſuperat crus maius. itaque Problema impoſsibile eſt. quod erat oſtendendum. D

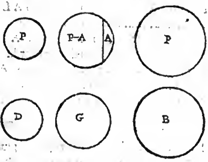
Problema VII.

Datam rectam lineam ſecare, vt rectangulum ſub tota & dimidia differentia partium, vna cum rectangulo ſub partibus æquale ſit partium quadratis.

A

Reſolutio.

SIt data recta linea B 2, quam oportet ſecare, vt dictum eſt. Factum iam ſit, & dimidia differentia eſto A. ergo B ✢ A erit pars maior, B -- A pars minor. Et quoniam rectangulum ſub B 2, & A vna cum rectangulo ſub B ✢ A, & B -- A æquale eſt quadratis ex B ✢ Corol. 2 Probl. 2



B A, & B -- A

B 2 in A ✢ BQ -- AQ, æquabitur BQ 2 ✢ AQ 2

Dematur vtrinque AQ 2, & BQ. ergo

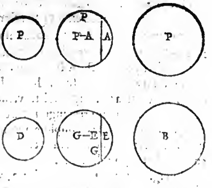
B 2 in A -- AQ 3 æquabitur BQ

& omnibus per 3 diuiſis vt numerus quadratorum reducatur ad vnitatem

B $\frac{2}{3}$ in A -- AQ æquabitur BQ $\frac{1}{3}$.

Hæc Æquatio impoſsibilis eſt quoniam explicari non poteſt nam ad eam explicandam deberet BQ $\frac{1}{3}$ auferri ex BQ $\frac{1}{9}$ quod fieri non poteſt, maius enim eſt BQ $\frac{1}{3}$ quam BQ $\frac{1}{9}$. Cum igitur Reſolutio incidat in Æquationem impoſsibilem, Problema quoque impoſsibile eſt. idque ſic demonſtrabimus.

C Sit ſi fieri poteſt recta AB ſecta in C, ita vt rectangulum ſub tota AB & dimidia differentia partium AC, CB, vna cum rectangulo ACB ſub partibus æquale ſit quadratis partium AC, CB; & ſumatur AE æqualis CB, ergo differentia partium AC, CB erit EC. quare ſecta EC bifariam in D, erit ED dimidia differentia partium AC, CB. Et quoniam rectangulum



D ACB, vna cum quadrato DC,* æquale eſt quadrato AD, dempto communi quadrato DC, rectangulum ACB æquale erit quadrato AD, minus quadrato DC, ſed cum rectangulum ſub AB, ED, vna cum rectangulo ACB, æquale ſit quadratis AC, CB, ſic enim ponitur AB ſecta, ideo ſi loco rectanguli ACB ſumatur quadratum AD, minus quadrato DC, rectangulum ſub AB, DE vna cum quadrato AD, minus quadrato DC, æquale erit quadratis AC, CB, hoc eſt * duplo quadratorum AD, DC. auferatur vtrinqne duplum quadrati DC, & quadratum AD, ergo rectangulum AB, DE, mi- 9 ſecundi

5 ſecundi

nus

nus quadrato D C, ter hoc eſt rectangulum A D E bis, minus quadrato D E ter æquale erit quadrato A D. ſed rectangulum A D E bis, minus quadrato D E bis, æquale eſt rectangulo A E D bis, & conſequenter rectangulum A D E bis, minus quadrato D E ter, æquale rectangulo A E D bis, minus quadrato E D. ergo rectangulum A E D bis, minus quadrato E D, æquale erit quadrato A D, quod eſt abſurdum. quadratum enim A D * æquale eſt rectangulo A E D bis, & quadratis A E, E D. A

4 ſecundi

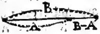
Non igitur ſecari poteſt recta linea, quemadmodum Problema fieri iubet. quare ipſum Problema impoſsibile eſt. quod erat oſtendendum.

Problema VIII.

Datam rectam lineam ſecare, vt duplum rectangulum ſub tota, & parte maiore; æquale ſit quadrato totius, & duplo quadrato partis maioris. B

Reſolutio.

Sit data recta linea B ſecanda vt petitur. Factum iam ſit & pars maior. eſto A. ergo pars minor erit B -- A. Et quoniam duplum rectangulum ſub B, & A æquale eſt quadrato ex b, & duplo quadrati ex A.



B in A 2 æquabitur b Q + A Q 2

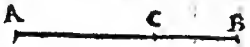
Et ablato vtrinque A Q 2, vt cognita ab incognitis ſeparentur.

B in A 2 -- A Q 2 æquabitur B Q

& conſequenter b in A -- Q æquabitur b Q ½. C

Hæc Æquatio non poteſt explicari; nam ad eam explicandam debet à quadrato dimidiæ b, quod eſt b Q ¼ auferri B Q ½. quod fieri non poteſt cum ſit b Q ½ maius quam b Q ¼, itaque impoſsibilis eſt hæc æquatio, atque adeo impoſſibile quoque & Problema, vt mox demonſtrabo.

Sit ſi fieri poteſt recta A B ſecta in C, vt duplum rectanguli b A C æquale ſit quadrato a b, vnà cum duplo quadrati a C. ergo ablato vtrinque duplo quadrati a C duplum rectanguli b a c, minus duplo quadrato a c, hoc eſt duplum rectanguli a c b; æquale erit quadrato a b. quod eſt abſurdum; quadratum enim a b * æquale eſt quadratis a c, c b, vna cum dupla rectanguli a c b. D



4 ſecundi

Non igitur poteſt ſecari recta linea, vt Problema iubet. itaque ipſum Problema impoſſibile eſt. quod erat oſtendendum.

Problema IX.

Datam rectam lineam ſecare, vt rectangulum triplum ſub partibus æquale ſit totius lineæ quadrato.

A Reſolutio.

SIt data recta linea B, quam oportet ſecare, vt triplum rectangulum ſub partibus æquale ſit quadrato totius B.

Factum iam ſit, & vna pars eſto A. ergo altera erit B – A. Et quoniam triplum rectangulum ſub partibus æquale eſt quadrato totius B.



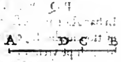
B in A 3 -- A q 3 æquabitur B q

Et omnibus per 3 diuiſis, vt numerus quadratorum ad vnitatem deducatur. ergo

B in A – A q æquabitur B q $\frac{1}{3}$

B Impoſsibilis eſt hæc Æquatio, quippe quæ non poteſt explicari. nam ad eam explicandam oportet à quadrato dimidiæ B quod eſt B q $\frac{1}{4}$ auferre B q $\frac{1}{3}$; quod quidem fieri non poteſt; maius enim non poteſt auferri a minore. Cum igitur Æquatio ſit impoſsibilis; Problema quoque impoſsibile eſt; idque ſic demonſtrabitur.

Sit ſi fieri poteſt recta A B ſecta in C, ita vt triplum rectangulum A C B ſub partibus æquale ſit quadrato totius A B, ergo ſimplum rectangulum A C B ſubæquale erit tertiæ parti quadrati A B, & ideo maius erit quarta parte eiuſdem quadrati A B; hoc eſt maius erit quadrato dimidiæ



C A B, quæ ſit A D. ſed quadratum A B * æquale eſt rectangulo A C B, vna cum quadrato D C, ergo rectangulum A C B maius erit eodem rectangulo A C B, vna cum quadrato D C. quod eſt abſurdum. Non poteſt igitur ſecari recta linea, vt triplum rectangulum ſub partibus æquale ſit quadrato totius. itaque Problema impoſsibile eſt. quod erat oſtendendum. *5 ſecundi*

Simili ratione oſtendetur omne Problema cuius Reſolutio incidit in Æquationem impoſsibilem, impoſsibile eſſe.

Quomodo Problemata vana, ſeu negatoria cognoſcantur.

Caput tertium.

D EXpoſitis quæ ad cognitionem Problematum impoſsibilium pertinent: ſequitur vt dicam quomodo Problemata vana, ſeu nugatoria cognoſcātur. ea enim Problematibus impoſsibilibus ex diametro opponuntur. nam Problema impoſsibile dicitur, cum id quod Problema iubet nulla ratione fieri poteſt. Problema autem vanum, ſeu nugatorium appellatur, cum id quod Problema fieri iubet quacumque ratione fiat Problemati ſatisfit. vel cum Problema infinitis modis conſtrui poteſt.

Quotieſcumque igitur Reſolutio Problematis rite peracta incidit in Æquationem inutilem, argumentum eſt Problema vanum eſſe, ac nugatorium. Æquationem autem inutilem voco, cum in ea eadem magnitudines iiſdem ma-

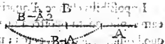
magnitudinibus adæquantur, vel etiam cum datæ magnitudines, datis tantum magnitudinibus expulſo quæſito adæquantur; quia tunc nulla ſit comparatio dati & quæſiti propter quam finem inſtituta eſt Æquatio. A

Problema I.

Datam rectã lineam ſecare, vt rectangulum ſub tota, & differentia partium, vnã cum quadrato partis minoris, æquale ſit quadrato partis maioris.

Reſolutio.

SIt data recta linea B, quam oportet ſecare, vt dictum eſt. Factum iam ſit & pars minor eſto A, ergo maior erit B -- A, atque differentia partium erit B -- A 2. & quoniam rectangulum ſub tota, & differentia partium, vnã cum quadrato partis minoris, æquale ſit quadrato partis maioris. B

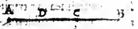


B Q -- B in A 2 ✠ A Q æquabitur B Q ✠ A Q -- B in A 2.

In hac Æquatione ſunt ex vtraque parte eædem magnitudines, ergo ipſa Æquatio inutilis eſt, quod argumentum eſt Problema vanum eſſe, ac nugatorium. nempe vtcumque data recta linea ſecetur Problemati ſatisfieri; quod quidem verum eſt: demonſtrauimus enim ſub Theoremate primo libri primi. ſi recta linea ſecetur vtcumque rectangulum ſub tota, & differentia partium, vna cum quadrato partis minoris, æquale eſſe quadrato partis maioris. C

Sed illud ipſum oſtendemus eadem ratione qua ſupra reſolutum eſt.

Secetur recta A B. vtcumque in C, & ſit pars minor C B, cui æqualis ſumatur C D, ergo differentia partium A C, C B erit A D. Dico rectangulum B A D vna cum quadrato C B æquale eſſe quadrato A C. Quoniam enim rectangulum B A D æquale eſt quadrato A B, minus rectangulo A B D, hoc minus rectangulo A B C bis, cum ſit B D. dupla ipſius B C. Addatur vtrobique quadratum B C. ergo rectangulum B A D, vna cum quadrato B C, æquale erit quadratis A B, B C, minus rectangulo A B C bis; ſed & quadratum A C (cum recta A C ſit differentia



the. 1 primi inter A B, B C) * æquale eſt quadratis A B, B C, minus rectangulo A B C bis, ergo rectangulum B A D, vna cum quadrato B C, æquale erit quadrato A C, quod erat oſtendendum. D

Problema II.

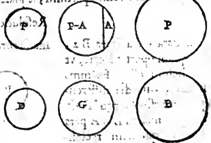
Datam rectam lineam ſecare, vt quadrata partium æqualia ſint quadrato differentiæ partium vna cum duplo ſub partibus rectangulo.

Re-

A

Reſolutio.

maſſa aurea corona maſſa argentea



Sit data recta linea B 2. quam oportet ſecare, vt dictum eſt. Factum iam ſit & dimidia differentia partium eſto A ergo pars maior * erit B + A. cor. aprob. libri primi
pars vero minor B -- A.

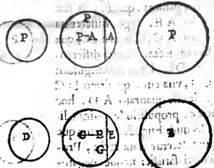
Et quoniam quadrata ex B + A & B -- A æqualia ſunt quadrato ex A dupla, vna cum duplo
B rectanguli ſub B +, & B -- A

B Q 2 + A Q 2 æquabitur A Q 4 + B Q 2 - a Q 2

hoc eſt a B Q 2 + A Q 2 æquabitur A Q 2 + B Q 2

Hæc Æquatio inutilis eſt, cum in ea eædem magnitudines ijſdem magnitudinibus adæquentur. quod argumentum eſt Problema vanum eſſe, ac negatorium. ideſt vtcumque data recta ſecetur Problemati ſatisfieri, idque verum eſt. nam ſecta recta linea vtcumque, quadrata partium æqualia ſunt quadrato differentiæ partium, vna cum duplo rectangulo ſub partibus. Hoc licet oſtenſum ſit ſub Theoremate ſecundo lib. primi, tamen hic quoque ex ipſa Reſolutione demonſtrationem eliciam.

maſſa aurea corona maſſa argentea



C Secetur recta linea A B vtcumque in C. & parti minori, quæ ſit C B fiat æqualis A E. ergo differentia partium A C, C B erit E C, quæ ſi ſecetur biſariam in D, erit dimidia differentia D C. Dico quadrata A C, C B æqualia eſſe quadrato E C, vna cum duplo rectanguli A C B. Quoniam enim A B ſecta eſt in partes æquales in D, & in partes inæquales in C
D quadratum A D * æquale rectangulo A C B, vna cum quadrato D C. & conſequenter duplum quadrati A D æquale duplo rectanguli A C B, vna cum duplo rectanguli A C B, vna cum duplo quadrati A C, addito communi duplo quadrati D C, duplum quadratorum A D, D C æquale erit duplo rectanguli A C B, vna cum quadruplo quadrati D C, hoc eſt vna cum quadrato E C, ſed duplum quadratorum A D, D C * æquale eſt quadratis A C, C B, ergo quadrata A C, C B æqualia erunt duplo rectanguli A C B vna cum quadrato E C. quod erat oſtendendum.

5 ſecundi

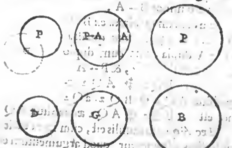
9 ſecundi

Problema III.

Datam rectam lineam ſecare, vt rectangulum ſub partibus vna cum quadrato dimidiæ differentiæ partium, æquale ſit quadrato ſemiſſis datæ.

Reſolutio.

maſſa aurea . corona maſſa argentea .



dimidia differentia (*margin*)

SIt data recta linea B 2, quam oportet ſecare, vt dictum eſt. Factum iam ſit. & dimidia differentia partium eſto A. ergo *B + A erit pars maior. B − A pars minor. & quoniam rectangulum ſub B + A, & − A, vna cum quadrato ex A æquale eſt quadrato ex B

ex 5. probl. lib. primi (*margin*)

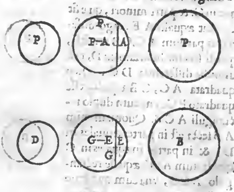
BQ − A + AQ æquabitur BQ

hoc eſt BQ æquabitur BQ

Cum igitur in hac Æquatione eadem magnitudo eidem magnitudini æquetur, ipſa Æquatio inutilis eſt, & ideo Problema vanum, ad negatorium: vtcumque enim data recta ſecetur Problemati ſatisfiet, idque ſic demonſtrabo.

Secetur A B vtcumque in C, & parti minori, quæ ſit C B fiat æqualis A E. ergo differentia partium A C, C B. erit E C, qua bifariam ſecta, dimidia differentia erit D C. Dico rectangulum A C B, vna cum quadrato D C æquale eſſe quadrato A D. hoc patet ex propoſitione quinta libri ſecundi Euclidis. vtcumque igitur ſecetur data recta, Problemati ſatisfit: itaque negatorium eſt huiuſmodi Problema. quod erat oſtendendum.

maſſa aurea . corona . maſſa argentea



Problema IV.

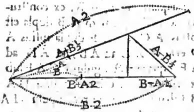
Super data baſe triangulum conſtituere, quod habeat differentiam crurum dimidiæ baſi æqualem.

Re-

A

Reſolutio.

Sit data baſis B 2, ſuper qua oportet triangulum conſtituere, cuius crurum differentia ſit æqualis dimidiæ baſi. Factum iam ſit. ergo differentia crurum erit B. è vertice autem trianguli cadat perpendicularis. in baſim ſecans ipſam baſim in duo ſegmenta, quorum differentia eſto A. ergo ſegmentum maius erit $B + A \frac{1}{2}$, ſegmentum vero minus



B $B - A \frac{1}{2}$. & quoniam eſt, vt* differentia crurum trianguli ad differentiam ſegmentorum baſis, ita baſis ad aggregatum crurum; hoc eſt vt B ad A, ita B 2 ad A 2, ergo A 2 erit aggregatum crurum, ſed differentia eorundem crurum eſt B, ergo crus maius erit* $A + B \frac{1}{2}$ crus autem minus $A - B \frac{1}{2}$. & quoniam quadratum cruris maioris* æquale eſt quadratis, quæ fiunt à ſegmento maiori, & à perpendiculari. ſi à quadrato cruris maioris auferatur quadratum ſegmenti maioris, remanebit quadratum perpendicularis. à quadrato igitur ex $A + B \frac{1}{2}$ quod eſt $AQ + BQ \frac{1}{4} + B$ in A, auferatur quadratum ex $B + A \frac{1}{2}$ quod eſt $BQ + AQ \frac{1}{4} + B$ in A. remanebit $AQ \frac{1}{4}$ $BQ \frac{1}{4}$ pro quadrato perpendicularis.

Corol. ij prob. 1 lib. i

ibid.

xlvij primi

C Æque quoniam quadratum cruris minoris* æquale eſt quadratis, quæ fiunt à ſegmento minori, & à perpendiculari; ſi à quadrato cruris minoris auferatur quadratum ſegmenti minoris, remanebit quadratum perpendicularis; à quadrato igitur ex $A - B \frac{1}{2}$, quod eſt $AQ + BQ \frac{1}{4} - B$ in A, auferatur quadratum ex $B - A \frac{1}{2}$, quod eſt $BQ + AQ \frac{1}{4} - B$ in A; remanebit $AQ \frac{1}{4} - BQ \frac{1}{4}$ pro quadrato perpendicularis; ſed quadratum eiuſdem perpendicularis inuentum eſt eſſe $AQ \frac{1}{4} - BQ \frac{1}{4}$, ergo

ibid.

$$AQ \tfrac{1}{4} - BQ \tfrac{1}{4} \text{ æquabitur } AQ \tfrac{1}{4}\ BQ \tfrac{1}{4}.$$

Inutilis eſt igitur hæc Æquatio, dum ex vtraque parte eædem magnitudines exiſtant: atque adeo Problema vanum, ac nugatorium. nam ſuper eadem baſe innumera triangula conſtituentur, in quibus differentia crurum æqualis erit dimidiæ baſi, vt in hac quæ ſequitur compoſitione perſpicuum erit.

D

Compoſitio.

Sit data baſis A B, ſuper qua conſtituere oportet triangulum, vt differentia eius crurum ſit æqualis dimidiæ baſi. Secetur A B bifariam in C, & ſumatur A D maior, quam A C, & reliqua D B ſecetur bifariam, & ad rectos angulos in E à recta G E, & duplicetur A D in F, & ſecetur C F bifariam in H, & centro A interuallo A H deſcribatur arcus ſecans rectam E G in G, & connectantur G A, G B. Dico triangulum

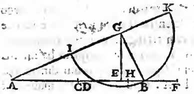
 G A B,

G A B, eſſe de quo quæritur. A

Centro enim G interuallo G D deſcribatur circulus ſecans crus A G in I, productum vero in K. is circu-lus* tranſibit per punctum D; cum ſint æquales D E, E B, ex constru-ctione. Et quoniam A B dupla eſt ipſius A C, & A F dupla ipſius A D erit vt A C ad A B, ita A D ad A F. quare rectangulum C A F ſub extremis æquale erit rectangulo D A B ſub medijs; ſed vt rectangulum I A K* æquale eſt rectangulo D A B. ergo rectangula I a k, C a F æqualia erunt, ſed rectangulum quidem I a k æquale eſt quadrato a I, & rectangulo a I K, hoc eſt & rectangulo a I G bis; rectangulum vero C a F æquale eſt quadrato a C, & rectangulo a C F, hoc eſt & rectangulo A C H bis. ergo quadratum a I, & rectangulum a I G bis, æqualia erunt quadrato a C, & rectangulo a C H bis. B

3 tertij

co. 35 ſexti



Et quoniam æquales ſunt a G, a H, ex constructione, erunt æqualia & eorum quadrata; ſed quadrato a G æqualia ſunt quadrata a I, I G, & rectangulũ a I G bis; quadrato autem a H, æqualia ſunt quadrata a C, C H, & rectangulũ a C H bis. ergo quadrata a I, I G, & rectangulum a I G bis, æqualia erunt quadratis a C, C H. & rectangulo a C H bis, ſed quadratum a I, & rectangulum a I G bis, oſtenſa ſunt æqualia quadrato a C, & rectangulo a C H bis. ergo & reliquum quadratum I G reliquo quadrato C H æquale erit. vnde & recta I G æqualis rectæ C H, quare cum ſint æquales a G, a H, erit & reliqua a I æqualis reliquæ a C. hoc eſt dimidiæ a B. Ad datam igitur baſim a B conſtitutum eſt triangulum G a b, cuius crurum differentia æqualis eſt dimidiæ baſi. quod erat faciendum. C

Scholium.

In compoſitione Problematis ſumpta eſt in baſe A B, recta a D pro differentia ſegmentorum a E, E b ad libitum ſolummodo maior eſt, quam a C dimidia baſis, quoniam differentia ſegmentorum baſis trianguli maior eſt, quam differentia crurum, vt demonſtrauimus in libro ſecundo Lem. primo ante Compoſitionem Problematis tertij. differentia autem crurum debet eſſe æqualis dimidiæ baſi, ex iuſſu Problematis, & ita conſtitutum eſt triangulũ, quale Problema poſtulat. Itaque innumera triangula ſuper eadem baſe A b poſſunt conſtitui, vt habeant eamdem conditionem, quare huiuſmodi Problema vanum eſt ac nugatorium. D

Problema V.

Super data baſe triangulum conſtituere, in quo differentia ſegmentorum baſis ſit dupla differentiæ crurum, ipſaq. differentia crurum ſit dupla exceſſus, quo crus maius ſuperat baſim.

Re-

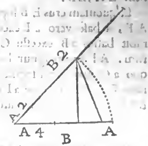
A

Reſolutio.

SIt data baſis trianguli B, & oporteat iuſſum facere. Ponatur conſtitutum eſſe triangulum; & differentia qua crus maius ſuperat baſim eſto A. ergo differentia crurum erit A 2; differentia vero ſegmentorum baſis A 4. Et quoniam crus maius ſuperat baſim B exceſſu A, erit crus maius B + A, & conſequenter crus minus B − A; differunt enim crura per A 2, atque adeo aggregatum crurum erit B 2. ſed. re-

B ctangulum ſub differentia crurum trianguli, & aggregato eorundem, * æquale eſt rectangulo ſub differentia ſegmentorum baſis, & ipſa baſe, ergo

B in A 4 æquabitur B in A 4



Th 6 ſecundi

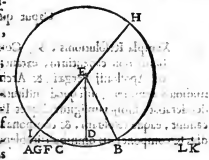
Inutilis eſt hæc Æquatio cum in ea eædem magnitudines, iiſdem magnitudinibus æquentur: quare pronunciabimus Problema propoſitum eſſe nugatorium, quod quidem verum eſt. nam ſuper eadem baſe innumera triangula poſſunt conſtitui habentia conditiones, quas Problema præſcribit, vt in compoſitione quæ ſequitur manifeſtum fiet.

C

Compoſitio.

SIt data baſis A B, ſuper qua conſtituendum eſt triangulum habens differentiam ſegmentorum baſis duplam differentiæ crurum, atque differentiam crurum duplam exceſſus, quo crus maius ſuperat baſim. Abſcindatur à data baſe A B quæcumq; portio A C, reliqua vero C b ſecetur bifariam in D, & ex D erigatur perpendicularis indefinita D E, rurſus ſecetur A C bifariam in F, ſimiliter & a f

D ſecetur bifariam in G, & centro b interuallo b G deſcribatur arcus ſecans perpendicularem D E in E, & connectantur E A, E b. Dico in triangulo E A b differentiam ſegmentorum A D, D b duplam eſſe differentiæ crurum E A, E b. atque differentiam crurum duplam exceſſus, quo crus maius E A ſuperat baſim A b. Centro enim E interuallo E b deſcribatur circulus ſecans crus A E in I, ipſumq. productũ in H, & duplicetur a b in K, & ſumatur k L æqualis a G, ergo reliqua b L æqualis erit b G, vel b E, atque adeo tota G L æqualis diametro I H, ſed ipſa G L æqualis eſt F k; cum ſint G F, L K æquales. ergo & F K æqualis erit I H. eſt autem



ex 16 tertij & rectangulum I A H * æquale rectangulo C A B, hoc eſt duplo rectanguli
ex 3 lib. 2 F a B, ſeu quod idem eſt rectangulo F a k, quare A I * æqualis erit a F. itaque A C differentia ſegmentorum A D, D B, dupla erit A I differentiæ crurum E A, E B. A

Et quoniam crus E B ſuperatur à crure quidem E A exceſſu A I, hoc eſt A F, à baſe vero a B exceſſu a G ex conſtructione, ideo crus E a ſuperabit baſim a B exceſſu G F, cuius dupla eſt a F, vel a I differentia crurum. Ad datam igitur baſim a B conſtitutum eſt triangulum E a B, in quo a C differentia ſegmentorum a D, D B dupla eſt a I differentiæ crurum E a, E B, ipſaque a I dupla eſt exceſſus, quo crus maius E a ſuperat baſim a B. quod faciendum erat.

Scholium. B

In hac Problematis Compoſitione ſumpta eſt in baſe a B recta a C pro differentia ſegmentorum a D, D B quanta libuit, & conſtitutum eſt triangulum conditiones habens, quas Problema exigit; itaque innumera triangula poſſunt ſuper eadem baſe conſtitui, cum in data baſe a B ſumpto puncto C vbicumque, cæteriſque, vt ſupra peractis, Problematis ſatisfiat; quare Problema huiuſmodi vanum eſt, ac nugatorium. Atque ſimili ratione oſtendemus omne Problema, cuius reſolutio rite peracta incidit in Æquationem inutilem vanum eſſe, ac nugatorium.

De Reſolutione, & Compoſitione Problematum, quæ ſub Algebram non cadunt. C

Caput quartum.

EXempla Reſolutionis, & Compoſitionis Problematum ſub Algebram non cadentium, extant multa in libris Pappi Alexandrini, & Apollonij Pergæi, & Archimedis; quare potui ad ea exempla ſtudioſos remittere, niſi quod inſtitutio mei operis hanc quoque ſui partem deſiderabat; ſubijciam igitur aliquot Problemata, quæ ſub Algebram non cadunt, eaque reſoluam, & componam, Methodo, qua veteres in reſoluendis, & componendis omnibus Problematibus vtebantur. D

Problema I.

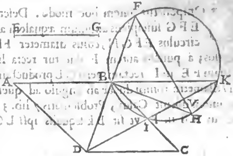
Rombo dato, & vno latere producto aptare ſub angulo exteriori magnitudine datam rectam lineam, quæ ad oppoſitum angulum pertingat.

Reſolutio.

SIt datus rombus A B C D; data autem recta linea E G, & producatur A B indefinitè in k. Oportet ſub angulo C b K aptare rectam lineam ipſi E G æqualem, ita vt ad oppoſitum angulum A D C pertingat.

Sit

A Sit iam factum ducta nimirum recta D I k ſit I K æqualis E G, & circa triangulum B I K deſcribatur circulus quem D B diameter rombi producta ſecet in F. deinde ſecetur angulus C B k bifariam à recta B H ſecante circulum in H, & connectatur F H,



Quoniam igitur B D diameter rombi ſecat angulum A B C bifariam, angulus D
B B C æqualis erit angulo A B D; ſed & angulus F B k, æqualis eſt angulo A B D; ſunt enim ad verticem, ergo angulus D B C æqualis erit angulo F B k; ſed & anguli C B H, k B H ſunt æquales, ex conſtructione. ergo per additionem æqualium æqualibus anguli F B H, D B H, æquales erunt, ac proinde recti; quare ſemicirculus erit F B, I H, atque adeo recta F H diameter circuli, & cum ſint æquales anguli I B H, K B H, ex conſtructione; erunt æquales & circumferentiæ I H, H K quibus ipſi anguli inſiſtunt, & conſequenter æquales erunt & reliquæ circumferentiæ I F, k F, ac proinde æquales & anguli F H I, F H k æqualibus circumferentijs inſiſtentes. eſt autem
C & recta I H æqualis rectæ H K, cum ſint æquales circumferentiæ I H, H K, & V H communis vtrique triangulo I V H, K V H, ergo erunt * æquales, & I V, V k. quare diameter F H ſecat rectam I K in V ad rectos angulos. & quoniam recta I k data eſt magnitudine, cum ſit æqualis datæ E G; intelligatur ipſa I K, poſitione quoque data, nulla poſitionis rombi dati habita ratione, tanquam non eſſet poſitione datus; hoc modo liberum eſt datæ rectæ lineæ E G æqualem alteram I K, poſitione & magnitudine datam exponere. Quoniam igitur data eſt I k poſitione, & magnitudine, & datus angulus I B K magnitudine, cum ſit angulus externus dati rombi; portio circuli I B k erit * poſitione, & magnitudine data. quare & totus circulus, ſed & diameter F H * datur poſitione. ea enim ſecat rectam I k poſitione, &
D magnitudine datam bifariam, & ad angulos rectos, ergo * dabitur & punctum F; cum ſit in circumferentia circuli poſitione dati.

In figura, ſunt intelligendæ I H Hk lineæ ductæ.

def. 8. dat.

29 dat.

25 dat.

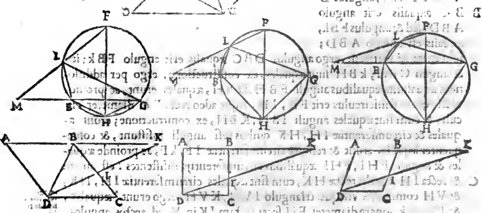
Ducatur autem à puncto f recta f B D ſecans circumferentiam f B I in B; rectam vero k I productam in D, ita vt B D ſit æqualis diametro rombi ductæ ab angulo, ad quem optata pertingit: hoc autem fieri poſſe demonſtrauimus lib. 3. Probl. 7. caſu 5. ergo ipſa f D poſitione data erit atque * dabitur; & punctum B cum ſit in circumferentia circuli poſitione dati, ſed datur & punctum K, cum ſit extremitas rectæ I k poſitione, & magnitudine datæ, ergo dabitur & recta B K.

25 dat.

Com-

Compoſitio. A

COmponetur autem hoc modo. Deſcribatur in E G portio circuli E F G ſuſcipiens angulum æqualem angulo C B K, & compleatur circulus E F G H, cuius diameter F H ſecet ipſam E G ad rectos angulos; à puncto autem F ducatur recta linea F L M ſecans circumferentiam F E in L rectam vero G E productam in M, ita vt L M ſit æqualis B D diametro rombi ductæ ab angulo ad quem aptanda pertingere debet; hoc autem docuit Caſus 5 Problematis 7 lib. 3, & connectatur L G, & producatur A B in K, vt ſit B k æqualis ipſi L G; & connectatur D k ſecans



latus B C in I. Dico rectam I K æqualem eſſe datæ E G. Connectantur enim L E, E H, H G. Quoniam igitur portio circuli E F G ſuſcipit angulum æqualem angulo C B K, angulus E L G æqualis erit angulo C B K. B

Et quoniam quadrilateri L E, H G in circulo anguli E H G, E L G oppoſiti æquales ſunt duobus rectis; & æquales quoq; duobus rectis anguli A b C, C b K, erunt anguli A b C, C b K angulis E H G, E L G æquales, & ablatis æqualibus angulis C b K, E L G, reliqui A b C, E H G æquales erunt. ſed angulum A b C ſecat b D diameter rombi bifariam; ſimiliter & angulũ E H G ſecat bifariam diameter circuli F H, cum ſint æquales anguli E H G, F H G æqualibus circumferentijs E F, F G inſiſtentes. ergo anguli D b C, E H F æquales erunt. ſed angulus E H F quadrilateri E H, F L in circulo æqualis eſt angulus M L E externo, & oppoſito. ergo & angulus D b C æqualis erit angulo C
M L E. quare additis æqualibus angulis C b K, E L G, totus angulus D b k toti angulo M L G æqualis erit; ſed & latera D b, b k lateribus M L, L G equalia ſunt, alterum alteri, ex conſtructione, triangula igitur D b k, M L G æqualium erunt laterum, & angulorum atque adeo angulus K, æqualis erit angulo L G M; ſed & angulus I b k trianguli I b K æqualis eſt angulo E L G trianguli, E L G, vt demonſtrauimus, & latus b k æquale lateri

teri

A teri L G, ex conſtructione;* erit & baſis I k baſi E G æqualis. Sub angulo igi- 26 primi
tur C B k aptata eſt I k æqualis E G datæ, atque pertingit ad angulum A D C, quod erat faciendum.

Problema II.

Rombo dato, & productis duobus lateribus angulum rombi continentibus inter ipſa latera aptare magnitudine datam rectam lineam, & quæ per oppoſitum angulum tranſeat. Oportet autem ipſam magnitudine datam non eſſe minorem ea recta linea, quæ per extremitatem diametri rombi ad rectos angulos ducta, inter producta latera interijcitur.

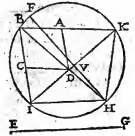
B

Reſolutio.

SIt datus rombus A B, C D, data autem recta linea E G. Oportet inter producta latera B A, b C aptare rectam lineam æqualem ipſi E G, ita vt per punctum D tranſeat.

Sit iam aptata recta I D K æqualis E G, & circa triangulum I B K deſcribatur circulus, quem B D diameter rombi producta ſecet in H; erunt igitur æquales anguli I B H, H B K. diameter enim rombi b D ſecat angulum C B A bifariam. quare æquales erunt & circumferentiæ I H, H k, quibus ipſi anguli inſiſtunt, & æquales rectæ I H, H K. agatur autem diameter circuli H F ſecans rectam I K in V. cum

C igitur æquales ſint circumferentiæ I H, H K erunt æquales & reliquæ circumferentiæ I F, K F. quare & anguli F H I, F H K ipſis circumferentijs inſiſtentes æquales erunt. eſt autem & I H æqualis H K, cum ſint æquales circumferentiæ I H, H K, & V H communis eſt vtrique triangulo I V H, k V H, ergo erunt æquales & I V, V H: quare diameter F H* ſecat rectam I K ad rectos angulos. Et quoniam I k data eſt magnitu- 32 tertij



D dine, cum ſit æqualis datæ E G intelligatur ipſa I K poſitione quoque data, nulla poſitionis rombi dati habita ratione, ac ſi non eſſet poſitione datus.

Quoniam igitur data eſt I k poſitione, & magnitudine, & datus angulus I B k magnitudine. cum ſit angulus dati rombi portio circuli I B k; erit* poſitione, & magnitudine data. quare & totus circulus, ſed* datur poſitione, & diameter F H ſecans bifariam, & ad rectos angulos rectam I K poſitione, & magnitudine datam, ergo* dabitur & punctum H, cum ſit & circũferentia circuli poſitione dati. Ducatur autẽ à puncto H recta H D B ſecans rectã V I in D; circũferentiam vero I F in B, ita vt D b ſit æqualis diametro rombi ductę, ab an-

def. 8 dat.
29 dat.
26 dat.

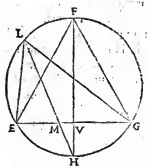
angulo ad quem aptata pertingit, quemadmodum docet Caſus quartus Problematis 7. lib. 3. ergo ipſa H B poſitione data erit. quare* dabitur & punctum B, cum ſit in circumferentia circuli poſitione. & magnitudine dati. ſed datur & punctum k, cum ſit extremitas rectæ I k poſitione & magnitudine datæ. ergo & recta B k poſitione & magnitudine data erit. A

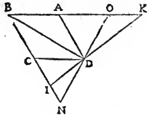
* 25 dat.

Compoſitio.

Componetur autem hoc modo, ducatur rombi diameter B D, cui ad rectos angulos per punctum D ducatur recta N D O ſecans producta rombi latera in punctis N O. & ſi quidem O N ſit æqualis E G, factum iam erit, quod proponebatur. ſi vero E G ſit maior, quam O N, B minor autem eſſe non poteſt ſic determinatum eſt. deſcribatur in E G portio circuli E L G ſuſcipiens angulum æqualem angulo A B C, & compleatur circulus E L, G H, cuius circumferentia E k G ſecetur bifariam in H, à quo puncto ducatur diameter H F ſecans rectam E G in V. eam ſecabit bifariam, & ad rectos angulos. ab eodem puncto H ducatur recta H M L, ſecans E V in M, circumferentiam vero E F in L, ita vt M L ſit æqualis B D diametro rombi, quemadmodum docuit Caſus 4 Probl. 7. lib. 3. ipſa autem D B minor eſt quam V F, vt infra demonſtrabimus, & connectatur L G, cui æqualis ponatur B k, & per punctum D ducatur recta K D I ſecans latus B C productum in I, & connectatur L E. quoniam igitur portio circuli E L G ſuſcipit angulum æqualem angulo A B C, angulus E L G æqualis erit angulo A B C. ſed angulum E L G ſecat L H bifariam, cum ſint æquales circumferentiæ E H, H G. ſimiliter & angulum A B C ſecat B D diameter rombi bifariam. ergo angulus H L G trianguli M L G, æqualis erit angulo D B K triãguli B D k. eſt autem & latus L G lateri B K æquale, atque latus L M lateri B D ex conſtructione. ergo triangula M L G, D B k æqualium erunt laterum, & angulorum. itaque angulus L G M æqualis erit angulo B k D. Cum igitur trianguli L G E angulus L G E æqualis ſit angulo b k I trianguli b k I, & angulus E L G æqualis angulo I b K, vt eſt demonſtratum, atque latus L G æquale lateri b K, ex conſtructione; erit & E G ipſi I K æquale. Itaque inter producta rombi latera b A, b C apta-

C



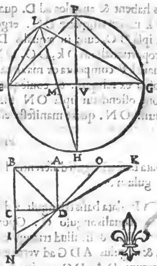


D

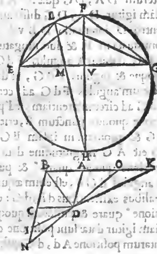
ta

A ta eſt recta linea I k I æqualis datæ E G, eaque tranſit per punctum D quod erat faciendum.

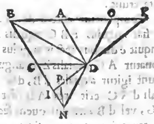
At vero B D minorem eſſe quam V F ſic demonſtrabimus. Connectantur E F, F G. Quoniam igitur portio circuli E L G ſuſcipit angulum æqualem angulo N B A angulus E F G, æqualis erit angulo N B O; quare & dimidius dimidio, nempe angulus V F G angulo D B O, angulos enim E F G, N B O ſecant re-
B ctæ F V, B D bifariam, ſed & angulus F V G æqualis eſt angulo B D O, cum ſit vterque rectus; ergo & reliquus reliquo æqualis erit, quare ſimilia erunt triangula B D O, F V G. vt igitur O D ad E B, ita erit G V ad V F; ſed O D minor eſt quam G V; cum O N dupla ipſius O D minor ſit, quam G E dupla rectæ G V, ergo & D B minor erit quam V F. quod erat oſtendendum.



Determinauimus oportere rectam E
C G non eſſe minorem quam O N; ipſa enim O N minima eſt omnium, quæ per punctum E ductæ inter producta latera B A, B C interijciuntur; idque ita fit manifeſtum.



Ducatur per punctum D alia vtcumque recta linea I D k. Quoniam igitur æquales ſunt anguli D B N, D B O, & æquales quoque B D N, B D O, quia recti; erit & reliquus D N B, reliquo D O B æqualis. quare ſimilia erunt trian-
D gula B D N, B D O, & æqualia quoque, cum latus B D commune ſit vtrique. vnde N D æqualis erit ipſi D O; & quoniam angulus D N B oſtenſus eſt æqualis angulo D O B, qui maior eſt angulo K videlicet interno, & oppoſito; erit & angulus D N B maior angulo k, ab angulo igitur D N B abſcindatur angulus D N B æqualis angulo k æquiangula erunt triangula D P N, D O K, quoniam æqua-



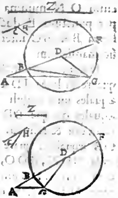
les

les habent & angulos ad D. quare vt D K ad D O, ita erit D N ad D P, ſed D k maior eſt, quàm D O. ergo & D N maior erit, quàm D P. atque adeo & ipſa D O, cum ſit æqualis D N, maior erit, quàm D P. itaque quatuor proportionalium D k, D O, D N, D P minima eſt D P, maxima vero D k. quare k P compoſita ex maxima, & minima maior erit. quam O N, compoſita ex reliquis. & conſequenter. K I multo maior. Atque eadem ratione oſtendetur ipſa O N minor omnibus alijs. Minima eſt igitur omnium O N. quare manifeſta eſt Determinatio.

Problema III.

Data baſe trianguli differentia laterum & angulo verticis inuenire triangulum.

SIt data baſis trianguli z differentia laterum A B angulus ad verticem æqualis angulo C. Oportet inuenire triangulum. Ponatur iam factum & ſit illud triangulum D A G cuius baſis A G eſto æqualis ipſi z, & angulus A D G ad verticem æqualis angulo C, ac denique differentia laterum D A, D G quæ ſit A B eſto poſitione, ac magnitudine data. Quoniam igitur D A, D G differunt per A B erunt D B, D G æquales, itaque centro D interuallo D B vel D G deſcribatur circulus quem ſecet A D continuata in F, & duo iungatur D G. Quoniam igitur datus eſt angulus A D G dabitur & angulus F d G, vt reliquus è duobus rectis, ergo dabitur quoque & angulus F B G, vt dimidius anguli F d G eſt enim angulus F d G ad centrum duplus anguli F B G ad circumferentiam, ſed poſitione eſt B d, & po-
29 dat. ſitione quoque punctum B, erit* igitur poſitione & B G & quoniam in ipſam B G à dato puncto A du-
31 dat. 25 dat. cta eſt A G magnitudine data, dabitur* ipſa A G poſitione quoque quare* & punctum G, ſed datur & angulus d G B, eſt enim æqualis angulo d G B, æ-
29 dat. 25 dat. qualibus exiſtentibus d B, d G: ergo dabitur* G d poſitione* quare & punctum quoque d dabitur. Quoniam igitur datæ ſunt poſitione extremitates A, d, G, datarum poſitione A d, d G ipſæ quoque* magnitudine datæ erunt.

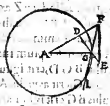


Componetur autem ſic. Producatur A B in F, & fiat angulus F B G æqualis dimidio eius quem relinquit è duobus rectis angulus C hoc eſt dimidio anguli H & in B G ponatur A G æqualis Z, & angulo G B d æqualis conſtituatur angulus B G d. erunt igitur æquales d B, d G quare differentia laterum d A, D G trianguli d A C erit ipſa A B data. Deſcribatur ex d centro ad interuallum d G, vel d B circulus quem ſecet A F in F, erit igitur angulus F d G ad centrum duplus anguli F B G ad circumferentiam, ſed eiuſdem anguli F B G du-

A dupluſ eſt quoque & angulus H ex conſtructione, ergo angulus F D G angulo H æqualis erit, vnde & angulus A D G ad verticem trianguli æqualis angulo C: eſt autem & baſis a G æqualis datæ Z ex conſtructione. Conſtructum eſt igitur triangulum d a G, quod facere oportebat.

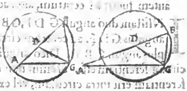
Lemma.

Si angulus trianguli fuerit centrum circuli, baſis vero ſemidiameter, & ducatur linea recta; non ex centro circuli, ſed ab altera extremitate aggregati laterum, conſtituens cum eo angulum æqualem dimidio, qui eſt ad verticẽ trianguli, angulo, illa recta linea in circulum incidet.



B SIt triangulum D A G, cuius baſis A G, & centro A interuallo A G deſcribatur circulus, & producatur A D in F, vt ſit D F æqualis B G aggregatum igitur laterum A D, D G erit A F: à puncto autem F ducatur F I, faciens angulum A F I, æqualem dimidio anguli A D G; Dico ipſam F I in circulum incidere: ſi enim non incidit, cadit extra qualis eſt F E. itaque continuetur D G, donec ſecet ipſam F E in E. Quoniam igitur externus angulus A D E trianguli d E F æqualis eſt duobus internis d F E, d E F, quorum vnus nempe D F E, ponitur dimidius ipſius A d E erit & reliquus d E F. ipſius A d E dimidius æquales igitur erunt anguli d F E,
C d E F, & ideo æquales rectæ d F, d E quod eſt abſurdum, ponitur enim d F æqualis d G. Recta igitur F I in circulum incidet, quod erat demonſtrandũ.

Aliter ſit triangulum d A G, cuius baſis A G, & centro d interuallo d G, deſcribatur circulus, ſecans A d productam in F, & iungatur F G, erit angulus A F g æqualis dimidio anguli A D G: hic enim eſt ad centrum ille ad circumferentiam. Si igitur ex A centro ad interuallũ A G circulus deſcribatur ipſum tanget, vel ſecabit recta linea F G, ideoq. in ipſũ circulum incidet, quod erat demõſtradũ.



D

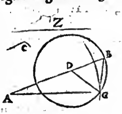
Problema IV.

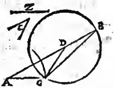
Data baſe trianguli, aggregato laterum, & angulo verticis, inuenire triangulũ. Probl. 15 lib. ij

SIt data baſis trianguli Z aggregatum laterum A B, angulus ad verticem æqualis angulo C. Oportet inuenire triangulum.

Factum iam ſit, & ſit illud triangulum d A G, cuius baſis A G, eſto æqualis ipſi Z, aggregatum vero laterum A d, d G æquale ipſi A B, magnitudine, ac poſitione datæ, & angulus A d G ad verticẽ æqualis angulo C, iũgatur autẽ B g. Quoniam igitur compoſita ex A d, d G æqualis eſt ipſi A B ablata cõmuni A d, reliqua d G, reliquæ d B æqualis erit, & ideo circulus ex d centro deſcri-

ptus ad interuallũ D g, tranſibit per B; deſcribatur erit igitur angulus A d g ad A
centrum. duplus anguli B ad circumferẽtiam, ſed datur angulus A D G, ergo dabitur & angulus B, & eſt
29 dat. poſitione A B, ergo * & B G poſitione erit, ſed in ipſam B G à dato puncto A ducta eſt A G magnitudine data, ergo dabitur * ipſa A G poſitione quoque, &
datum * erit punctum G, & data * quoque poſitione G D, datur enim angulus D g B, quia æqualis eſt dato D B G æqualibus exiſtentibus D B, D G, quare & punctum D dabitur. Quoniam igitur datæ ſunt extremitates A, D, G, datarum poſitione A D, D G, ipſæ quoque magnitudine datæ erunt.

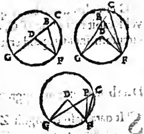




Componetur autem Problema hoc modo. Centro A, interuallo datæ Z æquali deſcribatur circulus, & fiat angulus A B G æqualis dimidio anguli C ex antecedẽte igitur Lemmate recta B G incidet in circulum ſub A cẽtro deſcriptum incidat in G, & iungatur A G, & fiat angulo B æqualis angulus B G D, erit igitur D G æqualis D B addita communi A D compoſita ex A d, d G, erit æqualis A B. Centro autẽ D interuallo d B, vel d G deſcribatur circulus B G erit igitur angulus A d g ad centrũ duplus anguli B ad circũferentiã, ſed & angulus C duplus eſt anguli B ex conſtructione, ergo angulus A d E angulo C æqualis erit, eſt autem & baſis A G æqualis datæ Z ex conſtructione. Conſtructum eſt igitur triangulum D A G quale conſtruendũ proponebatur. C

Lemma.

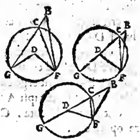
Si duo anguli in ratione dupla eidem circumferentiæ circuli inſiſterint, duplus autem fuerit ad centrum, alter ad circumferentiam erit.



INſiſtant duo anguli G D F, G B F eidem circuli circumferentiæ G F, & ſi angulus G D F. ad centrum circuli, atque duplus anguli G B F. Dico angulum G B F ad circumferentiam eſſe. Si enim non eſt ad circumferentiam erit intra circulum, vel extra. Sit primũ ſi fieri poteſt intra circulum, & producatur B g vſque ad circumferentiam in C, & iungatur F C, D
erit igitur angulus G D F ad cẽtrum duplus anguli g C F ad circumferentiam, ſed duplus eſt & anguli g B F ex hypoteſi, ergo angulus g B F angulo g C F æqualis erit externus interno, quod eſt abſurdum, angulus igitur g B F non eſt intra circulum.

Deinde ſit angulus g B F extra circulum ipſum igitur circulum ſecabit, vel vtraque rectarum G B, F B, vel ſaltem vna ſecet ipſa g B in puncto C, & iungatur F C erit igitur angulus g D F ad centrum duplus anguli G C F ad circumferentiam, ſed duplus eſt & anguli B ex hypoteſi, er-

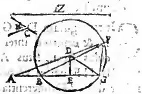
A ergo angulus G C F angulo B æqualis erit externus interno, quod eſt abſurdum. angulus igitur D B F non eſt extra circulum, ſed neque intra circulum, vt eſt oſtenſum, ergo ad circumferentiam erit, quod erat demonſtrandum.



Problema V.

Data differentia ſegmentorum baſis trianguli aggregato laterum, & angulo verticis inuenire triangulum.

B SIt data differentia ſegmentorum baſis trianguli A B aggregatum laterum Z, angulus ad verticem æqualis angulo C. Oportet inuenire triangulum.



Inuentum iam ſit, & ſit illud triangulum D A G, in quo perpendicularis D E, & centro D interuallo D G quod ſit minus latus deſcribatur circulus ſecans latus A D productum in F, baſim vero A G in B erunt* igitur B E, E G æquales, vnde differentia ſegmentorum A E, E G 3 tertij erit A b eſto igitur ipſa A b poſitione, ac magnitudine data, compoſita vero ex lateribus A D, D G, hoc eſt ipſa A F eſto C æqualis Z, & angulus A D G ad verticem æqualis angulo C, & iungantur B F, F G. Quoniam igitur datur angulus A D G dabitur angulus F D G, vt reliquus è duobus rectis dabitur quoq; angulus F B G, vt dimidius anguli F D g angulus enim F D G ad centrum duplus eſt anguli F B G ad circumferentiam poſitione igitur* erit B F, quia poſitione eſt & A B, & quoniam datum eſt pun- xxix dat. ctum A, à quo in B F ducta eſt A f magnitudine data dabitur* ipſa A f poſitio- 31 dat. ne quoq; vnde dabitur* & punctum F, & quoniam datus eſt angulus A D g ad xxv dat. centrum datus erit & angulus A f G circumferentiam, vt eius dimidius, atque data* erit poſitione f G, vnde datum* erit & punctum G; & data* quoq; poſi- xxix dat. 25 dat. tione G D, quia datus eſt angulus D G f etenim æqualis eſt dato angulo D f g 29 dat. ratione æqualium laterum D G, D f, quare datum* erit & punctum D. Quo- 25 dat. D niam igitur datæ ſunt extremitates A, D, G, datarum poſitione A D, D G, A G, ipſæ quoque magnitudine erunt.

Componetur autem hoc modo. Producatur A B in G, & fiat angulus G B F æqualis dimidio eius quem relinquit è duobus rectis angulus C, hoc eſt dimidio anguli h, & in B F ponatur A F æqualis Z, & fiat angulus A F G, æqualis dimidio anguli C, angulus vero F G D æqualis angulo A f G erunt igitur æquales d G, d F, addita communi A d compoſita ex lateribus A d, d G, trianguli d A G æqualis erit ipſi A f, hoc eſt Z datæ. Deinde centro D interuallo D G, vel D f deſcribatur circulus F E. Quoniã igitur angulus C duplus eſt anguli A F G ex conſtructione ſimiliter & an-

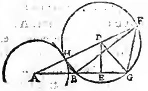
gulus A D G ad centrum duplus eiuſdem anguli A F G ad circumferen- A
tiam erit angulus A D G ad verticem dato angulo C æqualis, quare & angulus F D G angulo H, ſed angulus H duplus eſt anguli F B G ex conſtructione, ergo & angulus F D G eiuſdem anguli F B G duplus erit, ſed angulus F D G eſt ad centrum, & inſiſtit circumferentiæ F G, cui etiam & angulus F B G inſiſtit ergo ex antecedente Lemmate angulus F B G ad circúferentiam erit iá agatur ipſi A G perpendicularis D E erunt igitur* æquales B E, E G erit ipſa A B data. Conſtructum eſt igitur triangulum D A G, vt facere oportebat.

3 tertij

Lemma I.

Si angulus trianguli fuerit centrum circuli, differentia vero laterum ſemidiameter, & ducatur recta linea non ex centro circuli, ſed ab altera extremitate differentiæ ſegmentorum baſis conſtituens cum ea angulum æqualem dimidio; qui eſt ad verticem trianguli angulo, illa recta linea circulum ſecabit. B

SIt triangulum D A G, in quo perpendicularis d E ſecet baſim A G in E, & centro d interuallo d G, quod ſit minus latus deſcribatur circulus ſecans latus A d productum in punctis H F baſim vero A G in B; laterum igitur d A, d G differentia erit A H, differentia vero ſegmentorum A E, E G erit A B, iungantur autem B H, F G. C

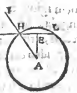


Quoniam igitur quadrilaterum F G, B H eſt in circulo anguli H B G, H F G ex aduerſo duobus rectis ſunt æquales, ſed & anguli H B G, H B A æquales ſunt duobus rectis, ergo anguli H B G, H F G angulis H B G, H B A æquales erunt, dempto communi angulo H B G reliquus H F G reliquo H B A æqualis erit, ſed angulus H F G ad circumferentiam dimidius eſt anguli H D G ad centrum ergo & angulus H B A eiuſdem anguli A D G dimidius erit. Dico igitur circulum ſub A centro interuallo A H deſcriptum ſecari à B H: manifeſtum eſt autem ipſam B H in eum incideret. Quoniam punctum H eſt in circumferentia, ſi igitur eum non ſecat tangit, tangat ſi fieri poteſt contactus erit in H, D
18 tertij & iungatur B F ergo* rectus erit angulus A H B, & ideo æqualis recto
27 primi H B F qui eſt in ſemicirculo; quare parallelæ* erunt A F, B F, quod eſt abſurdum. conueniunt enim in F. Non igitur B H tangit circulum, cuius centrum A ſed ſecat, quod erat demonſtrandum.

Lemma II.

Secet circulus ſub A centro recta linea B H L in punctis H L, & per punctus H quod ſit propius ad B ducatur altera recta A H I. Dico angulum I H B minorem eſſe recto.

Di-



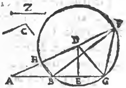
A Diuidatur enim H L bifariam in E, & iungatur A E rectus igitur erit angulus A E H, ac proinde angulus E H A recto minor: tres enim interni anguli trianguli A E H duobus rectis ſunt æquales, ſed angulus E H A æqualis eſt angulo I H B: ſunt enim ad verticem, ergo & angulus I H B erit recto minor quod erat demonſtrandum.

Problema VI.

Data differentia ſegmentorum baſis trianguli differentia laterum & angulo verticis inuenire triangulum. Prob. 26 lib. 2

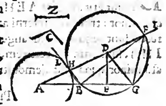
B Sit data differentia ſegmentorum baſis trianguli A B differentia laterum Z angulus ad verticem æqualis angulo C. Oportet inuenire triangulum.

Factum iam ſit & ſit illud triangulum D A G, in quo perpendicularis D E & centro D interuallo D G, quod ſit minus latus deſcribatur circulus ſecans latus D A in H, baſim vero A G in B differentia igitur ſegmentorum A E, E G erit erit A B, differentia vero laterum D A, D G erit A H. Eſto igitur A B poſitione, atque magnitudine data ipſa vero A H eſto æqualis datæ Z, & angulus A D G ad verticem æqualis angulo C, & producatur A D vſque ad circumferentiam in F, & iungantur H B, B F, F G. Quoniam igitur quadrilaterum F G, B H eſt in circulo, anguli H B G, H F G ex
C aduerſo duobus rectis erunt æquales, ſed & anguli H B G duobus rectis ſunt æquales, ergo anguli H B G, H F g angulis H B g, H B A æquales erunt, auferatur vtrinque angulus H B g, reliquus igitur H F g reliquo H b A æqualis erit, ſed angulus A d g ad centrum duplus eſt anguli A F g ad circumferentiam, ergo & anguli H B A duplus erit angulus A D G, ſed datur angulus A D G, dabitur ergo & H B A, quare dabitur
* B H poſitione, & quoniam à dato, puncto A in- 29 dat.
ipſam B H ducta eſt A H magnitudine data da-
bitur* A H poſitione quoque & propter datum 31 dat.
angulum H B F eſt enim, rectus in ſemicirculo 29 dat.
data* erit B F poſitione & datum* quoque pun- 25 dat.
D ctum F & ideo data* magnitudine H F & quo- 26 dat.
niam æquales ſunt H D, D F dabitur punctum
D, ſed datur & punctum G, ergo dabitur D G* ibid.
poſitione & magnitudine, ſed datur & punctum A, ergo & A D, A E poſi- ibid.
tione* & magnitudine datæ erunt.



Componetur autem ſic. centro A interuallo rectæ Z æquali deſcribatur circulus, & fiat angulus A B H æqualis dimidio anguli C, ex antecedente igitur quod primo loco præmiſſum eſt Lemmate, B H ſecabit ipſum circulum ſecet in punctis H L, & per punctum H, quod ſit proprius ad B ducatur recta linea A h I, ipſi autem B h ducatur perpendicularis B F. Quoniam

niam igitur ex antecedente quod ſecundo loco præmiſſum eſt Lemmate A.
angulus h B minor eſt recto & angulus F B h rectus, erunt ambo ſimul duobus rectis minores, & ideo coibunt rectæ lineæ A I, B F, coeant in F, & ſecetur h F biſariam in d, & centro D, interuallo D h vel D F, deſcribatur circulus eius circumferentia tranſibit per B propter angulum h B F rectum. Deinde producatur A B donec ſecet circulum F B h in G, & iungantur D G,



F G & ipſi A G ducatur perpendicularis D E erunt igitur æquales B E, E G, & ideo differentia ſegmentorum A E, E G erit ipſa A B data. Similiter quoniam æquales ſunt D h, D G vt ſemidiametri differentiæ laterum A D, D G B
erit A h, cui æqualis eſt Z data ex conſtructione. Supereſt igitur vt angulus A D G ad verticem trianguli D A G æquetur angulo C, id autem ita fit manifeſtum. Quoniam enim quadrilaterum F G, B h eſt in circulo anguli h B G, h F G ex aduerſo duobus rectis erunt æquales, ſed & anguli h B G, h B A ſunt æquales duobus rectis, ergo anguli h B G, h F G angulis h B G, H B A, æquales erunt: dempto communi angulo H B G, reliquus H F G reliquo H B A æqualis erit, ſed anguli H F G ad circumferentiam duplus eſt angulus H D G ad centrum ergo & anguli H B A duplus erit angulus A D G, ſed & angulus C duplus eſt anguli H b A ex conſtructione, ergo angulus A D G angulo C æqualis erit, quod oſtendiſſe oportuit. Constructum eſt igitur triangulum D a G quale conſtruendum proponebatur. C

Problema VII.

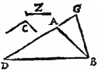
Dato vno ex lateribus trianguli datum verticis angulum ambientibus, & differentia inter reliquum latus, & baſim, inuenire triangulum.

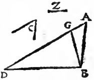
SIt datum vnum ex lateribus triangulum verticis ambientibus, a b: differentia inter latus reliquum & baſim z angulus ad verticem æqualis angulo C. Oportet inuenire triangulum.

Factũ iam ſit & ſit illud triangulũ a b D, cuius latus A b eſto poſitione, ac magnitudine datum, differentia vero inter reliquum latus a D & baſim D b eſto æqualis ipſi z, & angulus D A B ad verticem æqualis angulo C. Ponatur autem D G æqualis D B, differentia igitur ipſarum A D, D B erit A G D
& iungatur G B. Quoniam igitur datus eſt angulus D a B datus erit & angulus G a B, vt reliquus e duobus rectis, hic autem in prima figura ad primum Caſum pertinens, in ſecunda vero figura quæ ad ſecundum Caſum pertinet angulus D A B idem eſt quod angulus G a b, quocumque igitur Caſu
19 dat. datur angulus G a B eſt autem poſitione a B ergo * poſitione eſt & a g, ſed
27 dat. & magnitudine ponitur enim æqualis ipſi z, ergo * punctum g datum erit
xxvi dat. ſed datum eſt & B, ergo * g B poſitione erit & magnitudine, atque adeo dabitur
19 dat. angulus a g B quia datur * triangulum a g B ſpecie, & in ſecunda figura

da-

A dabitur quoq; & D g B vt reliquus è duobus rectis, itaque in vtraque figura dabitur angulus D B g. eſt enim ęqualis ipſi D g B æqualibus exiſtentibus D g, D B quare * B D poſitione erit & ideo * poſitione quoq; & punctũ D, ac propterea * ipſæ B D, a D magnitudine quoque datæ erunt. 29 dat. 25 dat. 26 dat.





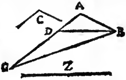
Componetur autem hoc modo. Conſtituatur angulo C æqualis angulus B a D, & ponatur ipſi z æqualis a g, & iungatur g B, & angulo D g B æqualis conſtituatur angulus G B D, & B D occurrat ipſi A D in D, erunt igitur D G, D B æquales, & ideo differentia inter la-
B tus a D, & baſim d B trianguli a b d erit a g hoc eſt z data: eſt autem & angulus d a b ad verticem æqualis angulo c ex conſtructione, & latus a b ipſum datum Constructum eſt igitur triangulum a b d, vt facere oportebat.

Problema VIII.

Dato vno ex lateribus trianguli datum verticis angulum ambientibus, datoque aggregato reliqui lateris, & baſis, inuenire triangulum.

SIt datum vnum ex lateribus trianguli angulum verticis ambientibus a b compoſita vero ex reliquo latere & baſe z & angulus ad verticem æqualis angulo C. Oportet iuuenire triangulum.
C Ponatur iam factum & ſit illud triangulum a b d, cuius latus a b eſto poſitione, ac magnitudine datum, compoſita vero ex reliquo latere a d, & baſe d b eſto æqualis ipſi z, & angulus ad verticem a æqualis angulo C. Producatur autem a d in G. vt ſit d G æqualis d b erit igitur a G æqualis compoſitæ ex a d, d b & iungatur G b. Quoniam igitur poſitione eſt a b & datus eſt angulus A erit A G * poſitione data, ſed data eſt & magnitudine ergo & * punctum G datum erit datur autem & B dabitur * ergo G B poſitione & magnitudine atq; adeo dabitur & angulus g, quia triangulum * A B G datur ſpecie; eſt autem angulo, G æqualis angulus G B D ratione æqualium D B, D g quare & ipſe G B D datus erit, poſitione igitur * erit B D quare & * punctum D. Quoniam
D igitur poſitione datarũ d b, d a, dati sũt termini A, D, B, ipſæ magnitudine quoque datæ erunt. Componetur autẽ ſic angulo C conſtituatur æqualis angulus B A G, & ponatur A G æqualis ipſi z, & iuncta G B, conſtituatur quoque angulus F B D æqualis angulo G erunt igitur D B, D G æquales addita cõmuni D A compoſita ex latere A D, & baſe D B trianguli A B D æqualis erit ipſi a g hoc eſt z datæ: eſt autem & angulus ad verticem A æqualis angulo C ex conſtructioue & latus A B ipſum datum. Constructum eſt igitur triangulum A B D quod facere oportebat.

29 dat. 27 dat. 26 dat. 39 dat. 29 dat. 25 dat.



F I N I S.

A01 1461578

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

F.32.

Digitized by Google